# Théorème de la borne de Bézout

Riffaut Antonin

2013-2014

**Théorème 1.** *Soient $k$ un corps infini, et $P, Q \in k[X,Y]$ deux polynômes de degrés totaux respectifs $d$ et $d'$. On suppose que $P$ et $Q$ sont premiers entre eux. Alors les courbes $c_P = \{(x,y) \in k^2 \mid P(x,y) = 0\}$ et $c_Q = \{(x,y) \in k^2 \mid Q(x,y) = 0\}$ ont au plus $dd'$ points d'intersection.*

*Démonstration.* Définissons $R(X) = \mathrm{Res}_Y(P,Q) \in k[X]$, ainsi que $S(Y) = \mathrm{Res}_X(P,Q) \in k[Y]$.

- Nous allons tout d'abord établir que $c_P$ et $c_Q$ ont un nombre fini de points d'intersection. Le résultat découle directement de la définition des polynômes $R(X)$ et $S(Y)$ : en effet, si $(\alpha, \beta)$ est un point d'intersection de $c_P$ et $c_Q$, alors $R(\alpha) = 0$ et $S(\beta) = 0$ ; or, puisque $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, $R(X)$ et $S(Y)$ ne sont pas nuls, de sorte que chacun possède un nombre fini de racines, ce qui impose que les courbes s'intersectent en au plus $\deg(R)\deg(S)$ points.
- Nous allons montrer que le degré de $R(X)$ est inférieur ou égal à $dd'$ (et, par symétrie du raisonnement, que le degré de $S(Y)$ est également inférieur ou égal à $dd'$). Notons $p$ le degré en $Y$ de $P$, et $q$ le degré en $Y$ de $Q$, de sorte que l'on puisse écrire

$$P(X,Y) = \sum_{k=0}^{p} P_k(X) Y^{p-k}, \quad Q(X,Y) = \sum_{k=0}^{q} Q_k(X) Y^{q-k},$$

avec

$$\begin{cases} \deg(P_k) \leq d - p + k, & 0 \leq k \leq p, \\ \deg(Q_k) \leq d' - q + k, & 0 \leq k \leq q. \end{cases}$$

Notons $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p+q}$ la matrice de Sylvester de $P$ et $Q$ comme polynômes en l'indéterminée $Y$. On a alors

$$M = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_{p-1} & P_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_0 & \dots & P_{p-2} & P_{p-1} & P_p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_p \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_{q-1} & Q_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_0 & \dots & Q_{q-2} & Q_{q-1} & Q_q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_q \end{pmatrix}.$$

☐ Pour $1 \leq i \leq q$,

$$M_{i,j} = \begin{cases} P_{j-i} & \text{si } 0 \leq j-i \leq p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc pour tout $j \in \{1, \dots, p+q\}$, $\deg(M_{i,j}) \leq d - p + j - i$.

☐ De même, pour $q+1 \leq i \leq p+q$,

$$M_{i,j} = \begin{cases} Q_{j-i+q} & \text{si } 0 \leq j-i+q \leq q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc pour tout $j \in \{1, \dots, p+q\}$, $\deg(M_{i,j}) \leq d' - q + j - i + q = d' + j - i$.

On applique alors la formule du déterminant :

$$R = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{q} M_{i,\sigma(i)} \prod_{i=q+1}^{p+q} M_{i,\sigma(i)}}_{R_\sigma}.$$

Il suffit alors de montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$, $\deg(R_\sigma) \leq dd'$. En effet :

$$\begin{aligned}
\deg(R_\sigma) &\leq \sum_{i=1}^{q}(d - p + \sigma(i) - i) + \sum_{i=q+1}^{p+q}(d' + \sigma(i) - i) \\
&= q(d-p) + pd' + \underbrace{\sum_{i=1}^{p+q}(\sigma(i) - i)}_{=0} \\
&= qd + pd' - pq \\
&= \underbrace{(p-d)(d'-q)}_{\leq 0} + dd' \\
&\leq dd'.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\deg(R) \leq dd'$, et de même, $\deg(S) \leq dd'$.

- À ce stade, on en déduit que les courbes $c_P$ et $c_Q$ ont au plus $(dd')^2$ points d'intersection. Nous allons chercher à affiner cette borne. Notons $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_r, \beta_r)$ les différents points d'intersection de $c_P$ et $c_Q$. Choisissons $u \in k$ tel que

$$\alpha_i + u\beta_i \neq \alpha_j + u\beta_j, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, r\},\ i \neq j.$$

Un tel $u$ existe, puisque les droites d'équation $y = \alpha_i + x\beta_i$, $x \in k$, ont deux à deux au plus un point d'intersection, et que $k$ est supposé infini. Effectuons alors le changement de variables

$$\begin{cases} X = X' - uY', \\ Y = Y', \end{cases}$$

et notons $\widetilde{P}(X', Y') = P(X, Y)$, $\widetilde{Q}(X', Y') = Q(X, Y)$, ainsi que $c_{\widetilde{P}}$ et $c_{\widetilde{Q}}$ les courbes correspondantes. On a alors,

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) \in c_P \cap c_Q &\iff P(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta) = 0 \\
&\iff \widetilde{P}(\alpha + u\beta, \beta) = \widetilde{Q}(\alpha + u\beta, \beta) = 0 \\
&\iff (\alpha + u\beta, \beta) \in c_{\widetilde{P}} \cap c_{\widetilde{Q}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in k$ qui est l'abscisse d'un point d'intersection de $c_{\widetilde{P}}$ et $c_{\widetilde{Q}}$, il existe un unique $y \in k$ tel que $(x, y) \in c_{\widetilde{P}} \cap c_{\widetilde{Q}}$, et de plus que $\mathrm{card}(c_{\widetilde{P}} \cap c_{\widetilde{Q}}) = \mathrm{card}(c_P \cap c_Q)$. Donc, quitte à effectuer le changement de variables ci-dessus, on peut supposer sans perte de généralité que les abscisses $\alpha_i$ des points d'intersection de $c_P$ et $c_Q$ sont deux à deux distinctes. Or, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $R(\alpha_i) = 0$, et $R$ est non nul de degré inférieur ou égal à $dd'$. Par conséquent, $r \leq dd'$, ce qui achève la démonstration. ■

## Références


[Sau] Philippe Saux Picart, *Cours de calcul formel : Algorithmes fondamentaux*, page 157 exercice 8 (non corrigé).