Suite de polygones qui convergent vers l'isobarycentre

Riffaut Antonin

2013-2014

Lemme 1. *Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

dite matrice circulante*. Soient $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{P(\omega^k)\,;\, 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Démonstration. En posant $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

on remarque que $A = P(U)$. Or U est une matrice compagnon, de polynôme caractéristique $X^n - 1$, dont les racines sont les ω^k, $0 \leq k \leq n-1$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(U) = \{\omega^k\,;\, 0 \leq k \leq n-1\}$, puis que $\mathrm{Sp}(A) = \{P(\omega^k)\,;\, 0 \leq k \leq n-1\}$. ■

Théorème 2. *Soient $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in \mathbb{C}^n$, et $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par*

$$z^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \frac{z_2^{(k)} + z_3^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_{n-1}^{(k)} + z_n^{(k)}}{2}, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Alors $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(g, g, \dots, g) \in \mathbb{C}^n$, où $g \in \mathbb{C}$ est l'isobarycentre de $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$.

Démonstration du théorème. La relation de récurrence (1) se réécrit

$$z^{(k+1)} = Az^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$z^{(k)} = A^k z^{(0)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme 1, les valeurs propres de A sont les $\lambda_p = \frac{1+\omega^p}{2}$, $0 \leq p \leq n-1$; comme elles sont deux à deux distinctes, on en déduit que A est diagonalisable : il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})Q^{-1}$. Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_0^k, \ldots, \lambda_{n-1}^k)Q^{-1}$. Or, $\lambda_0 = 1$, et pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, $|\lambda_p| < 1$, donc la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^\infty = Q\,\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)Q^{-1}$, ce qui entraîne que la suite $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $z^\infty = A^\infty z^{(0)}$.

Par passage à la limite dans la relation (2), on obtient $z^\infty = A^\infty z^\infty$; autrement dit, z^∞ appartient au sous-espace propre de A^∞ associé à la valeur propre 1. Ce sous-espace propre est de dimension 1, puisque A^∞ est semblable à $\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$. En outre, le vecteur $\pi = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$ appartient également à $E_1(A^\infty)$: en effet, il suffit d'observer que $A\pi = \pi$ (A est stochastique !), d'où $A^k\pi = \pi$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $A^\infty\pi = \pi$, par passage à la limite. En conséquence, $E_1(A^\infty) = \mathrm{Vect}(\pi)$, d'où l'existence d'un élément $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^\infty = (z, z, \ldots, z)$.

Il reste à vérifier que z est l'isobarycentre de $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$. Soit g cet isobarycentre. On vérifie aisément par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g est également l'isobarycentre de $z_1^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}$, ce qui entraîne que g est l'isobarycentre de $z, z, \ldots, z$, c'est-à-dire z. Par conséquent, le théorème est démontré. ∎