Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Un max de math de Maxime Zavidovique (pas tout à fait)
2. Exercices de probabilités de Marie Cottrell (pas tout à fait)
3. Fourier Series and Integrals de Dym Mc Kean (pas tout à fait)

Leçons.

1. 262 Convergences d'une suite de variables aléatoires, théorèmes limite, exemples et applications
2. 264 Variables aléatoires discrètes, exemples et applications
3. 266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités

Théorème. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, ..., e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $E = \{e_1, -e_1, ..., e_d, -e_d\}$, $S_0 = 0$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, alors le nombre moyen de passages en 0 est fini si et seulement si $d \geq 3$, autrement dit

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) < +\infty \Longleftrightarrow d \geq 3$$

Démonstration.

Etape 1 : Calcul de $\mathbb{E}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right)$

On a par théorème de Fubini-Tonnelli dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$\Sigma := \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

car pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$ parce qu'en $2n + 1$ pas on ne peut pas revenir en 0.
On considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \varphi_{S_n}(2\pi x) \end{array}$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}^d$, par théorème de transfert,

$$f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \cap \overline{B}_1(0,n)} \mathbb{P}(S_n = k) e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

Puis, comme $\mathbb{Z}^d \cap \overline{B}(0,n)$ est fini, par linéarité de l'intégration

$$\int_{[0,1]^d} f_n(t)dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\cap\overline{B}(0,n)} \mathbb{P}(S_n = k) \underbrace{\int_{[0,1]^d} e^{2i\pi\langle k,x\rangle}dx}_{=\delta_0(k)} = \mathbb{P}(S_n = 0)$$

De plus, par indépendance et identique distribution des X_k, on a

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(2\pi x) = (\varphi_{X_1}(2\pi x))^n$$

On considère donc $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \varphi_{X_1}(2\pi x) \end{array}$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a par théorème de transfert

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}\left(e^{2i\pi x_j} + e^{-2i\pi x_j}\right) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} cos(2\pi x_j)$$

En particulier f est à valeurs dans $[-1,1]$ et $f_{2n} = (f^n)^2$ à valeurs positives.

Ainsi par Fubini-Tonelli

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{[0,1]^d} f_{2n}(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{[0,1]^d}(f(t))^{2n}dt = \int_{[0,1]^d}\sum_{n=0}^{+\infty}(f(t))^{2n}dt$$

Puis comme $f^2 \neq 1$ presque partout,

$$\Sigma = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-(f(t))^2}dt$$

<u>Etape 2 : Intégrabilité de f</u>

Remarquons que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}(1 - 2\pi^2 x_j^2 + o(x_j^2)) = 1 - \frac{2\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o(\|x\|_2^2)$, d'où

$$(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{2\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o(\|x\|_2^2)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o(\|x\|_2^2)$$

Ainsi $1-(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o(\|x\|_2^2)$ puis $1-(f(x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2$.

Ainsi $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\frac{1}{\|x\|_2^2}$ l'est.

Or par changement de variable

$$\int_{[0,1]^d\setminus\{0\}} \frac{1}{\|x\|_2^2}dx = \int_0^1\int_{S_{d-1}(0,1)} \frac{1}{r^2}r^{d-1}drd\theta = \int_{S_{d-1}(0,1)} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r^{3-d}}dr$$

D'où $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable au voisinage de 0 (et de $(1,...,1)$ par périodicité) si et seulement si $d \geq 3$.

Par conséquent $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable sur $[0,1]^d\setminus$ si et seulement si $d \geq 3$, ce qui montre bien

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) < +\infty \iff d \geq 3$$

$\square$

Corollaire. Si $d \geq 3$ alors presque sûrement la marche aléatoire part à l'infini ie

$$\mathbb{P}(\|S_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty) = 1$$

Démonstration.
Comme $d \geq 3$, on a, d'après le théorème précédent, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty$.
Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}(S_m = 0)\right) = \mathbb{P}\left(\underset{n\to+\infty}{limsup}(S_n = 0)\right) = 0$$

Autrement dit l'état 0 est un état transcient.
Or la marche aléatoire est irréductible, donc tous les états sont transcients :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}(S_m = k)\right) = 0$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}(\|S_m\|_1 < q)\right) = \sum_{k\in B(0,q)\cap\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}(S_n = k)\right) = 0$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n}(\|S_m\|_1 \geq q)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n}(\|S_m\|_1 < q)\right) = 1 - 0 = 1$$

Ce qui montre bien, par intersection dénombrable d'événements presque sûrs, que

$$\mathbb{P}(\|S_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+^*}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n}(\|S_m\|_1 \geq q)\right) = 1$$

□

Corollaire. (S'il reste du temps) Si $d \leq 2$ alors presque sûrement la marche passe une infinité de fois par 0, ie

$$\mathbb{P}\left(\sup(n \in \mathbb{N}, S_n = 0) = +\infty\right) = 1$$

Démonstration.
On note $T = \sup(n \in \mathbb{N}, S_n = 0)$, alors on a $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, par indépendance

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}\left((S_n = 0) \cap \bigcap_{m>n}\left(\sum_{j=n+1}^{m} X_j \neq 0\right)\right) = \mathbb{P}(S_n = 0)\,\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{m>n}\left(\sum_{j=n+1}^{m} X_j \neq 0\right)\right)}_{=\mathbb{P}\left(\bigcap_{m>0}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j \neq 0\right)\right)}$$

Donc

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m>0}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j \neq 0\right)\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(T = 0)\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(S_n=0)}\right)$$

Or, comme $d \leq 2$, $\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) = +\infty$, donc comme l'égalité précédente a lieu dans $[0,1]$, on a $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ puis $\mathbb{P}(T < +\infty) = 0$.
Par conséquent $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1$. $\square$