Métaplans de leçons pour l'agrégation externe

Florian Lemonnier

Année 2014 – 2015

Avant-propos

Cher agrégatif,

Avant toute chose, bon courage.

Voici, dans ce document, tous les résumés de plans de leçons que j'ai rédigés durant mon année de préparation à l'agrégation externe de mathématiques, en 2014/2015.

Évidemment, ce document ne peut pas être exempt de coquilles, de mauvaise foi ou même de résultats présentés dans un ordre douteux. Gardez en tête cet avertissement ! Vous ne serez bien souvent pas d'accord avec ce que j'ai fait : vous et moi, nous ne pouvons pas avoir les mêmes goûts, ni les mêmes aptitudes. Ce document est fait pour y piocher des idées, des références. Je suis tout à fait conscient que les résumés présentés ici sont d'un niveau inégal : sur certains sujets, je ne voulais pas prendre le risque de présenter une leçon d'un niveau trop élevé ; aussi, les leçons que j'ai préparées en début d'année m'ont paru manquer d'exemples et d'illustrations au fur et à mesure que les oraux approchaient.

Je ne peux absolument pas assumer seul la paternité de ce document, car beaucoup d'idées m'ont été inspirées par d'autres personnes que je tiens tout particulièrement à remercier :

– ceux et celles qui nous ont précédé, et qui ont partagé – en ligne ou non – leurs plans résumés (et tout particulièrement Hélène HIVERT, Marine MALO et Arnaud GIRAND) ;
– ceux et celles qui, durant l'année, ont vu et/ou lu certains de mes plans, et qui m'ont permis de les corriger et/ou de les enrichir (et parmi eux, notamment, Arnaud STOCKER, Laura GAY, Maud JOUBAUD et Caroline ROBET) ;
– et surtout, le groupe de filles (Isaline AUBERT, Ninon FÉTIQUE, Camille FRANCINI, Laura GAY, Caroline ROBET et Maylis VARVENNE) ainsi qu'Arnaud STOCKER, dont les travaux ont été pour moi une formidable source d'idées, et auxquels je n'ai parfois rien retouché.

Je me suis efforcé de mettre des références aussi précises et récentes que possible ; cependant, j'ai parfois été obligé d'ajouter des résultats non-référencés (des exemples que j'ai inventés, ou des choses que j'ai trouvées ici et là sans réussir à les référencer). Souvent, la mention *"ajouter que ..."* précède ces faits démunis de sources.

Dans chaque leçon, les résultats encadrés correspondent aux développements que je proposais.

J'ai été contraint de faire quelques impasses au moment des oraux ; je ne ferai donc aucun conseil à propos des leçons suivantes :

110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

127 Droite projective et birapport.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

217 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

233 Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Bien sûr, je reste ouvert à toute remarque de votre part.

Table des matières

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I - Définitions et premières propriétés

1) Actions de groupes

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une action à gauche, à droite, d'un G-ensemble, le morphisme structurel et des exemples. Faire une grosse définition avec : point fixe, orbite, stabilisateur, action libre, transitive, fidèle, k-transitive.
- ↪ Dans *Perrin* : $\mathfrak{S}_n$ agit n-transitivement et $\mathfrak{A}_n$ $(n-2)$-transitivement sur $[\![1,n]\!]$.
- ↪ Dans *Ulmer* : D_n agit transitivement non-librement sur les sommets du n-gone régulier. La relation "appartenance à l'orbite de" est une relation d'équivalence, d'où la partition de X. En application, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est décomposable en produit de cycles à supports disjoints. Le noyau du morphisme structurel, puis libre $\Rightarrow$ fidèle, et le contre-exemple de la réciproque : D_3 agit fidèlement sur les sommets du triangle équilatéral.

2) Action d'un groupe fini sur un ensemble fini

- ↪ Dans *Ulmer* : la bijection ${}^{G}/_{G_x} \simeq G.x$ puis la relation orbite stabilisateur et la formule des classes. En application : les points fixes sous un p-groupe, le théorème de Cauchy et le centre d'un p-groupe.

II - Actions de groupes et théorie des groupes

1) Action par translation

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition de l'action par translation à gauche, elle est libre et transitive. En application : le théorème de Cayley. $G \curvearrowright {}^{G}/_{H}$ par translation est transitive ; en application $\mathrm{GL}(2,2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
- ↪ Dans *Combes* : l'application sur la théorème de Lagrange par la relation orbite-stabilisateur.
- ↪ Dans *Francinou, Gianella* : le théorème de Frobenius (sous-groupe d'indice minimal $\Rightarrow$ distingué), les groupes d'ordre pq ne sont pas simples.
- ↪ Dans *Ulmer* : si G admet un un sous-groupe d'indice k avec $\#G \nmid k!$, alors G n'est pas simple.

2) Action par conjugaison

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition de l'action par conjugaison, classe de conjugaison, éléments conjugués, centralisateur. Si $G \neq \{e\}$, elle n'est jamais libre, jamais transitive. Ses points fixes sont le centre. En application : ordre $p^2 \Rightarrow$ abélien ; les classes de conjugaison de D_n, de $\mathfrak{S}_n$; $\boxed{\mathfrak{A}_n \text{ est simple pour } n \geq 5}$.

3) Théorèmes de Sylow

- ↪ Dans *Perrin* : la définition d'un p-Sylow ; les matrices triangulaires supérieures unipotentes forment un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n,p)$; les théorèmes de Sylow, lien unicité/distinction. Il n'y a pas de groupe simple d'ordre 63.
- ↪ Dans *Francinou, Gianella* : les groupes d'ordre 15 sont cycliques, et les groupes simples d'ordre ≤ 59 sont cycliques d'ordre premier.

III - Actions de groupes et algèbre linéaire

1) Groupes de matrices

- ↪ Dans *H2G2* : la définition de l'action par équivalence, les orbites sont caractérisées par le rang ; en application : le nombre de matrices de rang r dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F}_q)$.
- ↪ Dans *Gourdon* : la définition de l'action par conjugaison, la remarque sur le changement de base, application à la réduction d'endomorphismes. Les orbites sont caractérisées par les invariants de similitude, la réduction de Frobenius et son application pour $n = 2$ ou 3.
- ↪ Dans *H2G2* : la définition de l'action par congruence, la remarque sur le changement de base, le théorème d'inertie de Sylvester, l'application à la classification des formes quadratiques.

2) Théorie des représentations

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une représentation, d'un caractère, des exemples. Le lien entre groupes distingués et table de caractères.
- ↪ À partir de *Leichtnam* : $\boxed{\text{le théorème de Molien}}$.

IV - Actions de groupes et géométrie

1) Géométrie affine

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition des espaces affines (à la fin des exos sur les actions de groupes).
- ↪ Dans *Tauvel* : la définition d'un angle orienté.
- ↪ Dans *H2G2* : le groupe d'isométries d'un solide, l'exemple du tétraèdre et du cube (faire des dessins).

2) Espaces projectifs

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition de $\mathrm{PGL}(V)$, $\mathrm{PSL}(V)$; $\mathrm{GL}(V) \curvearrowright \mathbb{P}(V)$ induit des actions de $\mathrm{SL}(V)$, $\mathrm{PGL}(V)$ et $\mathrm{PSL}(V)$, toutes 2-transitives, et fidèles pour $\mathrm{PGL}(V)$ et $\mathrm{PSL}(V)$.
- ↪ Dans *Perrin* : quelques isomorphismes exceptionnels.

Références :

- Ulmer (Théorie des groupes)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Gourdon (Algèbre)
- Tauvel (Géométrie)

102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

I - Nombres complexes de module 1

1) Définitions, trigonométrie

$\hookrightarrow$ Dans *Arnaudiès, Fraysse* : la définition de $\mathbb{U}$, l'isomorphisme $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{U} \simeq \mathbb{C}^*$, le morphisme surjectif $x \mapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$ induit un isomorphisme $\mathbb{U} \simeq {}^{\mathbb{R}}/_{2\pi\mathbb{Z}}$; la définition de cos et sin, les formules de de Moivre, d'Euler ; en application, le calcul d'une somme de cos, la linéarisation de $\cos^n$, les polynômes de Tchebychev.

2) Considérations géométriques

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : la paramétrisation du cercle unité, application à la résolution de l'équation de Diophante.

$\hookrightarrow$ Dans *Arnaudiès, Fraysse* : la définition de $\arg(z) = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$, la définition de $\mathrm{Arg}(z)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la relation d'équivalence qui permet de définir l'angle orienté, la définition d'angle orienté ; ajouter qu'on a la suite de surjections $\mathbb{R} \to \mathbb{U} \hookrightarrow \mathrm{O}^+\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow {}^{\left(\mathcal{S}^1\right)^2}/_{\mathcal{R}}$.

II - Racines de l'unité et cyclotomie

1) Sous-groupes des racines de l'unité

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition de $\mathbb{U}_n$, c'est un groupe cyclique d'ordre n donc isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés ; la définition du groupe diédral d'indice n, son ordre et ses générateurs.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 1* : le théorème de Kronecker.

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition d'une racine primitive de l'unité, $\#\mathcal{P}_m = \varphi(m)$; l'énumération de $\mathcal{P}_m$ en fonction d'une seule racine primitive ; la partition $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathcal{P}_d$ puis $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

2) Polynômes cyclotomiques

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition de Φ_n, son degré, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$; formule qui permet de calculer les polynômes cyclotomiques par récurrence ; $\boxed{\text{les polynômes cylotomiques sont irréductibles dans } \mathbb{Z}[X]}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : les corollaires de Kronecker.

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : Φ_n est le polynôme minimal des racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité ; quand $n \wedge m = 1$, on a les relations : $\mathbb{Q}(\omega_n) \cap \mathbb{Q}(\omega_m) = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\omega_n, \omega_m) = \mathbb{Q}(\omega_n\omega_m)$.

3) Polygones réguliers constructibles

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition d'un point constructible en un pas, d'un point constructible, d'un nombre constructible ; progressivement $\mathbb{Z}$ est constructible, $\mathbb{Q}$ aussi ; le théorème de Wantzel (si on a le temps à la fin, dessiner le pentagone régulier).

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : $\boxed{\text{le théorème de Gauss-Wantzel}}$.

III - Applications en algèbre linéaire

1) Matrices circulantes

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : la définition d'une matrice circulante, elles sont simultanément diagonalisables, leurs valeurs propres ; ajouter la valeur du déterminant circulant.

2) Représentations des groupes finis

$\hookrightarrow$ Dans *Peyré* : la définition d'une représentation ; ajouter que si $\#G = n < \infty$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{U}_n$; la table de caractères d'un groupe cyclique d'ordre n.

$\hookrightarrow$ Dans *Rauch* : quotienter par un sous-groupe distingué donne des représentations ; l'exemple de la table de Q_8.

Références :

- Arnaudiès, Fraysse (Cours de mathématiques, tome 1)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Audin (Géométrie)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et 2)
- Gourdon (Algèbre)
- Mercier (Cours de géométrie)
- Peyré (Algèbre discrète de la transformée de Fourier)
- Rauch (Groupes finis et leurs représentations)

103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Cadre : $(G, .)$ désignera un groupe.

I - Définitions et premières propriétés

1) Classes

↪ Dans *Perrin* : la définition d'une classe à gauche/droite, de l'indice ; le théorème de Lagrange, son corollaire sur les ordres des éléments d'un groupe fini ; ajouter que les groupes d'ordre premier sont cycliques.

2) Sous-groupes distingués

↪ Dans *Perrin* : la définition d'un automorphisme intérieur, d'un sous-groupe distingué ; ajouter qu'un sous-groupe distingué est union de classes de conjugaison ; sous-groupes triviaux ; G est abélien $\Rightarrow (< \Leftrightarrow \triangleleft)$, réciproque fausse avec Q_8.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ mais $\forall n \geq 2, \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ntriangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

↪ *Sans référence* : les sous-groupes d'indice 2 sont distingués, les exemples de $\mathfrak{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$ et $\langle r \rangle \triangleleft \mathcal{D}_n$.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : le théorème de Frobenius ; les sous-groupes d'ordre p^2 de groupes d'ordre p^3 sont distingués.

3) Groupes quotients

↪ Dans *Perrin* : si $H \triangleleft G$, alors G/H est un groupe ; ajouter que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des groupes ; $H \triangleleft G \Leftrightarrow H$ est le noyau d'un morphisme de groupes issu de G ; ajouter que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

↪ Dans *Calais* : le théorème de correspondance des sous-groupes, l'application au sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

II - Théorèmes d'isomorphisme

↪ Dans *Ulmer* : la PU du quotient, 1er théorème d'isomorphisme, l'unicité des groupes cycliques, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^\times$ et le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q$; la définition du normalisateur ; ajouter le normalisateur d'un sous-groupe distingué, de $\langle s \rangle$ dans $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$; 2ème théorème d'isomorphisme, $\mathfrak{S}_4/\mathrm{V}_4 \simeq \mathfrak{S}_3$; 3ème théorème d'isomorphisme, $\left(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\right)/\left(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\right) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

III - Groupes et sous-groupes remarquables

1) Sous-groupes caractéristiques : définition et exemples

↪ Dans *Ulmer* : la définition d'un sous-groupe caractéristique ; ajouter que ça implique d'être distingué, le contre-exemple de la réciproque avec $\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle \triangleleft \mathrm{V}_4$ non-stable par $\mathrm{Int}_{(1\ 2\ 3)}$; la proposition sur les sous-groupes caractéristiques des sous-groupes distingués/caractéristiques ; ajouter que $\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle \triangleleft \mathrm{V}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$ mais $(1\ 2)(3\ 4) \ntriangleleft \mathfrak{S}_4$.

↪ Dans *Perrin* : la définition du centre, il est caractéristique ; G abélien $\Rightarrow \mathrm{Z}(G) = G$; le centre de $\mathfrak{S}_n$ et le centre de Q_8.

↪ Dans *Combes* : ($H < \mathrm{Z}(G)$ et G/H cyclique) $\Rightarrow G$ abélien ; le centre d'un p-groupe, les groupes d'ordre p^2 sont abéliens.

↪ Dans *Ulmer* : $\mathrm{Int}(G) \simeq G/\mathrm{Z}(G)$.

↪ Dans *Perrin* : la définition du groupe dérivé, il est caractéristique ; G abélien $\Rightarrow \mathcal{D}(G) = \{e\}$; le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$, de Q_8, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; $\mathcal{D}(G)$ est le plus petit sous-groupe de G tel que $G/\mathcal{D}(G)$ soit abélien ; ajouter en conséquence que tout morphisme de groupes de G vers un groupe abélien se factorise par $\mathcal{D}(G)$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : $\boxed{\text{Frobenius-Zolotarev}}$; ajouter l'application au calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$.

2) Produit direct

↪ Dans *Ulmer* : la définition du produit direct, l'exemple de V_4, le théorème chinois.

↪ Dans *Combes* : le théorème de structure des groupes abéliens, qu'on applique aux groupes abéliens d'ordre 600 ; la définition des invariants de G ; $\exists a \in G, \omega(a) = \exp(G)$; l'existence (et parfois l'unicité) de sous-groupes d'ordre donné.

3) Groupes simples

↪ Dans *Perrin* : la définition de groupe simple, l'exemple de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; ajouter que les groupes d'ordre pq ne sont jamais simples, et que les morphismes de groupes au départ d'un groupe simple sont soit triviaux, soit injectifs.

↪ Dans *Ulmer* et *Francinou, Gianella* : $\boxed{\text{la simplicité de } \mathfrak{A}_n \text{ pour } n \geq 5}$.

↪ *Sans référence* : le fait que $\mathrm{V}_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4$; les seuls groupes abéliens simples sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier.

4) Théorème de Sylow

↪ Dans *Perrin* : la définition d'un p-Sylow, l'exemple dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, et le lemme sur les p-Sylows de $H < G$; le théorème d'existence d'un p-Sylow et le théorème de Sylow ; p-Sylow unique $\Leftrightarrow$ p-Sylow distingué ; les groupes d'ordre 63 ne sont pas simples et les groupes d'ordre pq avec $p < q$ premiers et $q \not\equiv 1\,[p]$ sont cycliques.

IV - Sous-groupes distingués et représentations

↪ *Selon la place disponible, plus ou moins bien introduire la théorie des représentations et des caractères.*

↪ Dans *Ulmer* : la définition de $\mathrm{Ker}\,\chi$; le théorème sur les sous-groupes distingués et leurs caractères et en application V_4 est le seul sous-groupe distingué propre de $\mathfrak{A}_4$.

↪ À partir de *Peyré* : la liste des sous-groupes distingués de $\mathcal{D}_6$; ajouter un critère de simplicité.

↪ À partir de *Colmez* : $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Références :

- Perrin (Cours d'algèbre)
- Objectif Agrégation
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Calais (Théorie des groupes)
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Combes (Algèbre et géométrie)

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

I - Étude générale des groupes finis

1) Ordre et exposant

↪ Dans *Ulmer* : la définition de l'ordre d'un groupe, d'un groupe fini ; ajouter les exemples de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$; la définition de l'ordre d'un élément ; ajouter $g^k = 1 \Leftrightarrow \omega(g)|k$.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 2* : la définition de l'exposant d'un groupe ; ajouter que $\exp(G) = 2 \Rightarrow G$ abélien ; $\boxed{\text{le théorème de Burnside}}$, et le contre-exemple $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{\mathbb{N}}$ d'exposant 2 mais infini.

2) Théorème de Lagrange

↪ Dans *Ulmer* : la définition de $(G : H)$, l'exemple de $(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}) = 2$; $\#G = (G : H)\#H$ et le théorème de Lagrange ; $(G : H) = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$; ajouter que si $H, K < G$ avec $\#H \wedge \#K = 1$, alors $H \cap K = \{e\}$.

3) Action de groupe

↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une action de groupes, du morphisme structurel, $\mathfrak{S}(X) \curvearrowright X$; la définition de l'orbite, du stabilisateur ; $\mathrm{Ker}\varphi = \bigcap_{x \in X} G_x$ et le théorème de Cayley ; si $H < G$ et $\#G \nmid (G : H)!$, alors $\exists N \triangleleft G, \{e\} \neq N \subseteq H$; la relation orbite-stabilisateur, la formule des classes et la formule de Burnside.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : le théorème de Frobenius.

II - Cas des groupes finis abéliens

1) Groupes cycliques

↪ Dans *Combes* : la définition d'un groupe cyclique, les exemples de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{U}_n$; si $G = \langle a \rangle$ alors $\omega\left(a^k\right) = \frac{\#G}{\#G \wedge k}$ et G possède donc $\varphi(\#G)$ générateurs ; l'exemple des générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; deux groupes cycliques sont isomorphes $\Leftrightarrow$ ils ont même ordre ; $\mathrm{Aut}(G) = \left\{x \mapsto x^k | k \wedge \#G = 1\right\}$; les sous-groupes d'un groupe cyclique et son corollaire $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

↪ Dans *Serre* : G est cyclique $\Leftrightarrow \forall d|n$, il existe au plus un sous-groupe de G d'ordre d ; $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique.

↪ Dans *Combes* : le lemme chinois.

2) Théorème de structure

↪ Dans *Combes* : le théorème de structure, qu'on applique aux groupes abéliens d'ordre 600 ; la définition des invariants de G ; $\exists a \in G, \omega(a) = \exp(G)$; le corollaire sur l'existence (et parfois l'unicité) de sous-groupes d'ordre donné.

III - Groupes et sous-groupes remarquables

1) Groupes symétriques et alternés

↪ Dans *Ulmer* : la définition du support, d'un cycle ; la décomposition en produit de cycles à supports disjoints et un exemple ; le type, les classes de conjugaison ; $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions ou encore par $\{(1, i) | i \in [\![2, n]\!]\}$.

↪ Dans *H2G2* : $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}(\text{tétraèdre}) \simeq \mathrm{Isom}^+(\text{cube})$.

↪ Dans *Ulmer* : la définition de la signature par le type ; ajouter en remarque que c'est le seul morphisme non-trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$; la définition de $\mathfrak{A}_n$, $(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2$, $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles ; $\boxed{\mathfrak{A}_n \text{ est simple pour } n \geq 5}$.

2) p-groupes et théorème de Sylow

↪ Dans *Ulmer* : la définition d'un p-groupe ; si G est p-groupe agissant sur X, alors $\#X^G \equiv \#X\,[p]$, l'application au théorème de Cauchy, les p-groupes finis sont d'ordre une puissance de p.

↪ Dans *Combes* : la définition d'un groupe simple ; ajouter l'exemple des groupes d'ordre pq qui ne sont jamais simples ; ordre premier $\Leftrightarrow$ cyclique simple ; si $H < \mathrm{Z}(G)$ et G/H cyclique, alors G est abélien ; G p-groupe fini $\Rightarrow \mathrm{Z}(G) \neq \{e\}$, et son corollaire $\#G = p^2 \Rightarrow G$ abélien, un p-groupe fini d'ordre non-premier n'est jamais simple.

↪ Dans *Perrin* : la définition d'un p-Sylow, l'exemple dans $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_p\right)$, et le lemme sur les p-Sylows de $H < G$; le théorème d'existence d'un p-Sylow et le théorème de Sylow ; p-Sylow unique $\Leftrightarrow$ p-Sylow distingué ; les groupes d'ordre 63 ne sont pas simples et les groupes d'ordre pq avec $p < q$ premiers et $q \not\equiv 1\,[p]$ sont cycliques.

3) Groupes diédraux

↪ Dans *Ulmer* : la définition de $\mathcal{D}_n$ comme groupe d'isométries du polygone, son ordre et ses générateurs, ses classes de conjugaison.

IV - Représentations des groupes finis

↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une représentation, d'un caractère (resp. irréductibles) et d'une sous-représentation.

↪ Dans *Rauch* : la décomposition en somme directe d'irréductibles.

↪ Dans *Ulmer* : le caractère de la somme directe, le lemme de Schur (si on a la place), l'orthogonalité des caractères irréductibles.

↪ Dans *Peyré* : la définition d'une table de caractères, l'orthogonalité des colonnes, l'exemple de la table de $\mathfrak{S}_4$.

↪ Dans *Ulmer* : la définition de Ker χ, le lien entre les sous-groupes et les caractères irréductibles, et son application à $\mathfrak{A}_4$.

Références :

- Ulmer (Théorie des groupes)
- Oraux X-ENS (Algèbre 2)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Combes (Algèbre et Géométrie)
- Serre (Cours d'arithmétique)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Rauch (Groupes finis et leurs représentations)
- Peyré (Algèbre discrète de la tranformée de Fourier)

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

I - Généralités sur le groupe symétrique

1) Définitions et propriétés

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une permutation, les notations $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}_n$, cardinalité, la structure de groupe, deux ensembles en bijection ont même groupe symétrique (à isomorphisme près) ; la notation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, le morphisme structurel d'une action, le théorème de Cayley et l'injection $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$.
- ↪ Dans *Perrin* : l'application au 1er théorème de Sylow.
- ↪ Dans *Ulmer* : $\bigcap_{i=m+1}^{n} \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(i) \simeq \mathfrak{S}_m$ et donc $\mathfrak{S}_m \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$.

2) Orbites et cycles

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition du support, deux permutations à supports disjoints commutent ; la définition de cycle et de transposition ; l'égalité $(i_1 \ \dots \ i_k) = (i_1 \ i_k)(i_1 \ i_{k-1}) \dots (i_1 \ i_2)$; le dénombrement des k-cycles ; le théorème de décomposition en produit de cycles à supports disjoints (et l'unicité à l'ordre près), un exemple ; la définition du type, l'ordre en fonction du type, un exemple.

3) Signature et groupe alterné

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition de la signature, un exemple ; ε est l'unique morphisme de groupe non-trivial de $\mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$; la signature d'une transposition, d'un cycle ; la définition de $\mathfrak{A}_n$, $(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2$, cardinalité.
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de Frobenius-Zolotarev, qu'on applique au calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$.

II - Structure de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$

1) Classes de conjugaison

- ↪ Dans *Ulmer* : l'égalité $\omega\,(i_1 \ \dots \ i_k)\,\omega^{-1} = (\omega\,(i_1) \ \dots \ \omega\,(i_k))$, cela permet de trouver les centres de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ pour n assez grand ; on peut classifier les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ à l'aide du type, ajouter l'exemple des classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$; $\boxed{\text{les classes de conjugaison de } \mathfrak{A}_n \text{ en fonction de celles de } \mathfrak{S}_n}$, ajouter que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$, et pareil pour les doubles-transpositions ($(n-2)$-transitivité).

2) Générateurs

- ↪ Dans *Ulmer* et *Combes* : $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les cycles, par les transpositions, par $\{(1\ i) | i \in [\![2, n]\!]\}$, par $\{(i\ (i+1)) | i \in [\![1, n-1]\!]\}$, par $\{(1\ 2), (1\ \dots\ n)\}$; $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, par $\{(1\ i\ j) | i \in [\![2, n-1]\!], j \in [\![i+1, n]\!]\}$, par $\{(1\ 2\ i) | i \in [\![3, n]\!]\}$.
- ↪ Dans *Perrin* : $\boxed{\text{la simplicité de } \mathfrak{A}_n \text{ pour } n \geq 5}$, le contre-exemple $\mathrm{V}_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4$; groupes dérivés de $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$pour n grand ; énumération des sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$; les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n sont isomorphes à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

III - Applications

1) Déterminant

- ↪ Dans *Gourdon* : tout ce qui permet d'aboutir à la définition du déterminant à partir de l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées.

2) Polynômes symétriques

- ↪ Dans *RDO1* : la définition d'un polynôme symétrique, l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A\,[X_1, \dots, X_n]$, un exemple ; la définition des polynômes symétriques élémentaires, un exemple, $A\,[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = A\,[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$; la formule coefficients-racines.
- ↪ Dans *FG* : les formules de Newton.

3) Quelques isomorphismes remarquables

- ↪ Dans *H2G2* : les groupes d'isométries (positives) du tétraèdre et du cube.
- ↪ Dans *Peyré* : $\boxed{\text{la table de } \mathfrak{S}_4}$.
- ↪ Dans *Perrin* : les isomorphismes exceptionnels.

Références :

- Ulmer (Théorie des groupes)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Objectif Agrégation
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Gourdon (Algèbre)
- Ramis, Deschamps, Odoux (Cours de mathématiques, Tome 1)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Peyré (Algèbre discrète de la transformée de Fourier)

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

I - Groupe linéaire et groupe spécial linéaire

1) Généralités

- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition de $\mathrm{GL}(E)$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'isomorphisme $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ non-canonique.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow \det f \neq 0 \Leftrightarrow f$ envoie base base ; faux en dimension finie.
- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^\times$ homomorphisme, $\mathrm{Ker} \det = \mathrm{SL}(E) \triangleleft \mathrm{GL}(E)$, définition $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\#\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_q\right)$ et $\#\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{F}_q\right)$.

2) Générateurs

- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les définition équivalentes des dilatations/transvections ; la conjugaison d'une transvection.
- $\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la génération de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$, les centres de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$, les classes de conjugaison des transvections.

3) Groupes dérivés

- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les groupes dérivés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, les cas exceptionnels.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la factorisation par le déterminant, $\boxed{\text{le théorème de Frobenius-Zolotarev}}$.

II - Quelques sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$

1) Groupes orthogonaux (en caractéristique différente de 2)

- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : définition isométrie, de $\mathrm{O}(f)$; $\mathrm{O}(f) < \mathrm{GL}(E)$, forme matricielle, déterminant vaut ± 1 ; lien formes quadratiques ; définition $\mathrm{SO}(f)$, symétries, réflexions, retournements ; cas euclidien, centre et générateurs de $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Alessandri* : les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) Sous-groupes finis

- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : définition P_σ ; $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$; ajouter que Cayley fournit $G \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\#G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_{\#G}(\mathbb{K})$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : l'exhibition d'un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_q\right)$, le premier théorème de Sylow.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : $\boxed{\text{le théorème de Burnside}}$, $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{\mathbb{N}}$ est un groupe infini d'exposant 2.

III - Actions de $\mathrm{GL}(E)$ et de ses sous-groupes

1) Sur les sous-espaces vectoriels de E

- $\hookrightarrow$ *Sans référence* : la définition de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur E par translation à gauche ; la définition de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\{$sev de E de dimension $k\}$ par translation à gauche, elle est transitive, sa restriction à $\mathrm{SO}(E)$ est transitive.
- $\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la définition de l'action de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$, la définition des angles orientés.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 1* : définition drapeau ; l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\{$drapeaux de $E\}$ par translation à gauche est transitive.

2) Sur $\mathbb{P}(E)$

- $\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$, le morphisme associé est de noyau $\mathbb{K}^\times \mathrm{Id}$; il en va de même quand on remplace $\mathrm{GL}(E)$ par $\mathrm{SL}(E)$; la définition de $\mathrm{PGL}(E)$ et $\mathrm{PSL}(E)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les cardinaux de $\mathrm{PGL}_n\left(\mathbb{F}_q\right)$ et de $\mathrm{PSL}_n\left(\mathbb{F}_q\right)$, les isomorphismes exceptionnels.

3) Sur les espaces de matrices

- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : la définition de l'action par équivalence, ses orbites sont caractérisées par le rang, le nombre de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{F}_q\right)$ de rang r ; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la topologie des orbites, le rang n'est pas continu.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition de l'action par conjugaison, les invariants de similitude, la réduction de Frobenius, la caractérisation des classes en dimensions 2 et 3, le contre-exemple dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : la définition de l'action par congruence, le lien avec les formes quadratiques, le théorème de Sylvester.
- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le lemme de réduction des formes quadratiques, le lemme de Morse.

IV - Aspects topologiques pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Densité

- $\hookrightarrow$ Dans *Mneimné, Testard* : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.
- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la différentielle du déterminant.

2) Connexité et compacité

- $\hookrightarrow$ Dans *Mneimné, Testard* : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert connexe, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ possède 2 composantes connexes.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ aussi, la décomposition polaire.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mneimné, Testard* : les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Références :

- Perrin (Cours d'algèbre)
- Gourdon (Algèbre)
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Objectif Agrégation
- Alessandri (Thèmes de géométrie)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et 2)
- Audin (Géométrie)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Mneimné, Testard (Groupes de Lie classiques)

107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

I - Représentations d'un groupe fini

1) Définitions et premiers exemples

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition d'une représentation, de son degré ; ajouter que si G est fini, alors $\forall g \in G, \rho(g)$ est diagonalisable (par Lagrange) et qu'une représentation est une action de groupes ; donner des exemples : les représentations triviale, par permutation, régulière ; ajouter la représentation signature dans $\mathfrak{S}_n$.

$\hookrightarrow$ Dans *Colmez* : le résultat sur les représentations de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition d'un morphisme de représentations, de $\mathcal{H}om_G(V_1, V_2)$, de représentations équivalentes/isomorphes ; l'exemple $f : V \to V$ linéaire $\Rightarrow \varphi = \frac{1}{\#G}\sum_{h\in G}\rho(h)^{-1}f\rho(h) \in \mathcal{H}om_G(V, V)$.

2) Opérations sur les représentations

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : les représentations $V_1 \oplus V_2$, $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$, V^* ; la propriété $\mathcal{H}om(V_1, V_2)^G = \mathcal{H}om_G(V_1, V_2)$.

3) Sous-représentations et représentations irréductibles

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition d'une sous-représentation, ajouter l'exemple de $\mathrm{Vect}\{(1, \ldots, 1)\}$ pour la représentation par permutations de $\mathfrak{S}_n$; l'exemple de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, où $\varphi \in \mathcal{H}om_G(V_1, V_2)$, et de $V^G = \{v \in V | \forall g \in G, \rho(g)v = v\}$; la définition d'une représentation irréductible, réductible, complètement réductible ; ajouter l'exemple des représentations de degré 1 qui sont toujours irréductibles.

$\hookrightarrow$ Dans *Rauch* : Si $H \triangleleft G$, les représentations (resp. irréductibles) de $G/_H$ donnent des représentations (resp. irréductibles) de G.

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : le théorème de Maschke, et son illustration sur la représentation par permutations de $\mathfrak{S}_n$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rauch* : le corollaire qui dit que toute représentation linéaire est somme directe de représentations irréductibles.

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : le lemme de Schur.

II - Théorie des caractères

1) Définitions et premières propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition d'une fonction centrale, elles forment un $\mathbb{C}$-ev, la définition d'un caractère et de son degré ; remarquer que deux représentations isomorphes ont même caractère et que le caractère est une fonction centrale ; un caractère est un morphisme de groupes $\Leftrightarrow$ il est de degré 1 ; le caractère de $V_1 \oplus V_2$, $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$, V^* ; dire que χ_P compte les points fixes de $g \in \mathfrak{S}_n$, décrire χ_R.

$\hookrightarrow$ À partir de *Leichtnam* : le théorème de Molien (qu'il faut reformuler en représentations et caractères).

2) Caractères irréductibles et orthogonalité

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition d'un caractère irréductible ; un gros théorème avec les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales, il y a autant de classes de conjugaison que de caractères irréductibles, si χ est irréductible alors il apparaît $\deg \chi$ fois dans χ_R ; un gros corollaire avec l'unicité de la décomposition des fonctions centrales comme combinaison linéaire de caractères irréductibles (et les coefficients sont dans $\mathbb{N}$), la CNS d'irréductibilité d'un caractère selon la valeur de son carré scalaire, deux représentations sont isomorphes $\Leftrightarrow$ elles ont même caractère.

3) Tables de caractères

$\hookrightarrow$ Dans *Peyré* : la définition d'une table de caractères (elle est carrée), la propriété d'orthogonalité des colonnes ; $\boxed{\text{la table de } \mathfrak{S}_4}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rauch* : les groupes $\mathcal{D}_4$ et Q_8 ont même table de caractères bien que ces groupes ne soient pas isomorphes.

III - Représentations et théorie des groupes

1) Caractérisation des sous-groupes distingués

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition de $\mathrm{Ker}\ \chi$; le théorème sur $\boxed{\text{les sous-groupes distingués et leurs caractères}}$ et en applications $\boxed{\text{l'énumération des sous-groupes de } \mathcal{D}_6}$ et V_4 est le seul sous-groupe distingué propre de $\mathfrak{A}_4$; le corollaire qui donne un critère de simplicité.

$\hookrightarrow$ Dans *Colmez* : $\mathfrak{A}_5$ est simple.

2) Groupes abéliens

$\hookrightarrow$ Dans *Serre* : un groupe est abélien $\Leftrightarrow$ ses caractères irréductibles sont tous de degré 1.

$\hookrightarrow$ Dans *Peyré* : la table de caractères de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$; la définition du dual d'un groupe fini, c'est l'ensemble des morphismes de G dans $\mathbb{U}_{\#G}$; si G est cyclique, alors $G \simeq \hat{G}$; rappeler le théorème de structure des groupes abéliens finis (si on a la place), puis si G est abélien fini, alors $G \simeq \hat{G}$; remarquer que cet isomorphisme n'est pas canonique ; la définition du bidual et l'isomorphisme canonique $G \simeq \hat{\hat{G}}$.

Références :

- Ulmer (Théorie des groupes)
- Colmez (Éléments d'analyse et d'algèbre)
- Rauch (Groupes finis et leurs représentations)
- Leichtnam (Exercices X-ENS, Algèbre et Géométrie)
- Peyré (Algèbre discrète de la transformée de Fourier)
- Serre (Représentations linéaires des groupes finis)

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition d'une partie génératrice, d'un groupe engendré ; donner l'exemple de $\mathcal{D}(G)$.

I - Groupes abéliens

1) Groupes monogènes et groupes cycliques

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un groupe monogène, d'un groupe cyclique ; monogène $\Rightarrow$ abélien.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les groupes monogènes sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ ou à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; ajouter l'exemple de $\mathbb{U}_n$; le lemme chinois ; ajouter que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont monogènes et que $\langle m, n\rangle = (m \wedge n)\mathbb{Z}$; les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'indicatrice d'Euler ; ajouter l'exemple de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et la formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$; ajouter que si $G = \langle g\rangle$, alors l'image d'un morphisme de groupes au départ de G est entièrement déterminé par l'image de g.

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : les sous-groupes d'un groupe cyclique.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : $\mathbb{F}_q^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le symbole de Legendre est l'unique morphisme de groupes non-trivial de $\mathbb{F}_p^\times \to \{-1, 1\}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : Tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique ; ajouter le contre-exemple $\mathbb{U} < \mathbb{C}^\times$.

2) Groupes abéliens de type fini

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : le théorème de structure des groupes abéliens finis, la définition de la suite des invariants, les groupes d'ordre 600, l'existence d'un élément d'ordre $\exp(G)$, l'existence (et parfois l'unicité) de sous-groupes d'ordre donné.

$\hookrightarrow$ Dans *Calais* : la définition de groupe de type fini, le théorème de structure des groupes abéliens de type fini (avec des $\times$ à la place des $\oplus$ – ADMIS).

II - Groupes symétriques et diédraux

1) Groupes symétriques, alternés

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition de $\mathfrak{S}_n$, des transpositions ; $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.

$\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : $\mathfrak{S}_4$ est le groupe des isométries du tétraèdre et le groupe des isométries positives du cube.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les familles suivantes : $\{(1\,2), \dots, (1\,n)\}, \{(1\,2), \dots, ((n-1)\; n)\}, \{(1\,2), (1\,2\,\dots\,n)\}$; la définition de la signature, de $\mathfrak{A}_n$, des cycles ; $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les doubles-transpositions, par les 3-cycles.

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : $\mathfrak{A}_n$ est engendré par la famille $\{(1\,2\,3), \dots, (1\,2\,n)\}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* et *Francinou, Gianella* : $\boxed{\mathfrak{A}_n \text{ est simple pour } n \geq 5}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les sous-groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$, y compris pour les petites valeurs de n.

2) Groupes diédraux

$\hookrightarrow$ Dans *Ulmer* : la définition de $\mathcal{D}_n$, ordre $2n$; la présentation $\mathcal{D}_n = \langle r, s | r^n, s^2, (sr)^2\rangle$; $\mathcal{D}_n = \left\{ s^i r^j \middle| i \in [\![0, 1]\!], j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$; le sous-groupe dérivé.

$\hookrightarrow$ Dans *Peyré* : $\boxed{\text{la table de } \mathcal{D}_n}$.

III - Autour du groupe linéaire

1) $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$

$\hookrightarrow$ *Ici, E est un K-ev de dimension finie, K étant un corps de caractéristique quelconque.*

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition de $\mathrm{GL}(E)$ et de $\mathrm{SL}(E)$; les définitions équivalentes pour une dilatation, pour une transvection ; les générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et de $\mathrm{SL}(E)$.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : $\mathrm{SL}(E)$ est connexe par arcs.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les sous-groupes dérivés de $\mathrm{GL}(E)$ et de $\mathrm{SL}(E)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de Frobenius-Zolotarev.

2) Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$

$\hookrightarrow$ *Ici, E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.*

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition de $\mathrm{O}(E)$ et de $\mathrm{SO}(E)$ (remarquer qu'ils sont isomorphes à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$), des réflexions et des renversements ; les générateurs de $\mathrm{O}(E)$ et de $\mathrm{SO}(E)$; l'application aux sous-groupes dérivés ; la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

3) Homographies

$\hookrightarrow$ *Ici, E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.*

$\hookrightarrow$ Dans *Samuel* : la définition de $\mathbb{P}(E)$, des homographies ; $\mathrm{PGL}(E)$ est un groupe.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la description des éléments de $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}^2)$, les générateurs de $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}^2)$, les homographies conservent les angles orientés.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Objectif Agrégation
- Calais (Théorie des groupes)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Peyré (Algèbre discrète de la transformée de Fourier)
- Oraux X-ENS (Algèbre 2)
- Samuel (Géométrie projective)
- Audin (Géométrie)

109 - Exemples et représentations de groupes finis de petit cardinal.

Cadre : G est un groupe fini, et V est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.

I - Quelques résultats de la théorie des représentations

1) Représentation linéaire d'un groupe

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une représentation, de son degré, d'une sous-représentation et d'une représentation irréductible ; ajouter que les représentations de degré 1 sont irréductibles ; des exemples comme la représentation triviale, par permutation, régulière, somme directe.
- ↪ Dans *Rauch* : si $H \triangleleft G$, alors les représentations (irréductibles) de ${}^{G}/_{H}$ donnent des représentations (irréductibles) de G ; la décomposition en somme directe de représentations irréductibles (Maschke).
- ↪ Dans *Ulmer* : le lemme de Schur.

2) Théorie des caractères

- ↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une fonction centrale, d'un caractère (irréductible) et de son degré ; les caractères sont des fonctions centrales ; décrire χ_R ; un caractère est un morphisme de groupes ⇔ il est de degré 1 ; le caractère somme directe ; la définition du produit scalaire sur les fonctions centrales dont les caractères irréductibles forment une base orthonormée ; il y a donc autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaison et tout caractère irréductible apparaît deg χ fois dans χ_R, d'où $\chi_R = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(e)^2$.
- ↪ Dans *Peyré* : la CNS d'irréductibilité selon la valeur du carré scalaire ; la définition d'une table de caractères et la propriété d'orthogonalité des colonnes.
- ↪ Dans *Ulmer* : la définition de ker χ et $\boxed{\text{caractères et sous-groupes distingués}}$.

II - Étude de quelques classes de groupes

1) Groupes cycliques

- ↪ Dans *Combes* : définition de groupe cyclique, groupes cycliques isomorphes ⇔ même ordre, l'exemple de ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$.
- ↪ Dans *Peyré* : la table de ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$.

2) Groupes abéliens

- ↪ Dans *Serre* : G est abélien ⇔ ses caractères irréductibles sont tous de degré 1.
- ↪ Dans *Combes* : le théorème de structure des groupes abéliens finis ; ajouter qu'on obtient ainsi la table de caractères des groupes abéliens et illustrer par l'exemple de V_4.

3) p-groupes

- ↪ Dans *Combes* : la définition d'un p-groupe ; ordre p ⇔ cyclique simple (donc ok pour la table) ; le lemme qui montre que $H < \mathrm{Z}(G)$ et ${}^{G}/_{H}$ cyclique ⇒ G est abélien, ce qui permet de montrer que les p-groupes finis ont un centre non-trivial ; puis ordre p^2 ⇒ abélien (donc ok pour la table et la classification) et ordre $p^m, m > 1$ ⇒ pas simple.

4) Groupes diédraux

- ↪ Dans *Ulmer* : $\mathcal{D}_n$ comme groupe d'isométries du polygone, son ordre, ses générateurs et ses classes de conjugaison.
- ↪ Dans *Peyré* : les tables de $\mathcal{D}_n$ (distinguer les cas n pair ou impair), on peut en déduire ses sous-groupes distingués, $\boxed{\text{exemple de } \mathcal{D}_6}$.

III - Étude des groupes d'ordre 8

1) Classification

- ↪ *Sans référence* : la liste des groupes abéliens d'ordre 8.
- ↪ Dans *Peyré* : la définition de Q_8.
- ↪ Dans *Ulmer* : la classification des groupes non-abéliens d'ordre 8 (sans produit semi-direct).

2) Étude de Q_8

- ↪ *Sans référence* : le centre de Q_8, ses sous-groupes sont tous distingués, ${}^{\mathrm{Q}_8}/_{\{\pm 1\}} \simeq \mathrm{V}_4$.
- ↪ Dans *Ulmer* : la table de Q_8 ; c'est la même que pour $\mathcal{D}_4$ même s'ils ne sont pas isomorphes.

IV - Étude de petits groupes symétriques et alternés

1) Étude de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$

- ↪ Dans *Ulmer* : les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$; la classification des groupes d'ordre 6, $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathcal{D}_3$ (donc ok pour la table).
- ↪ Dans *H2G2* : $\mathrm{Isom}(\text{tétraèdre}) \simeq \mathrm{Isom}^+(\text{cube}) \simeq \mathfrak{S}_4$ (dessins en annexe).
- ↪ Dans *Peyré* : $\boxed{\text{la table de } \mathfrak{S}_4}$.

2) Étude de $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_5$

- ↪ Dans *Ulmer* : les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_n$ en fonction de celles de $\mathfrak{S}_n$, et V_4 est le seul sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$.
- ↪ Dans *H2G2* : $\mathrm{Isom}^+(\text{tétraèdre}) \simeq \mathfrak{A}_4$.
- ↪ À partir de *Colmez* : $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Références :

- Ulmer (Théorie des groupes)
- Rauch (Groupes finis et leurs représentations)
- Peyré (Algèbre discrète de la transformée de Fourier)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Serre (Représentations linéaires des groupes finis)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Colmez (Éléments d'analyse et d'algèbre)

120 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

I - Structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1) Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↪ Dans *Risler, Boyer* : la définition de la congruence d'entiers, la définition du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, groupe abélien cyclique d'ordre n ; classification des groupes monogènes (ajouter l'exemple de $\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d'ordre $d|n$; définition de l'indicatrice d'Euler ; lien entre "premier avec n" et "générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$" ; nouvelle écriture de $\varphi(n)$, valeur de $\varphi(p^\alpha)$; lister les résultats précédents sur l'exemple de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(d)$ éléments d'ordre $d|n$, $n = \sum_{d|n, d>0} \varphi(d)$; Aut $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$, exemple pour $n = 4$.

↪ Dans *Combes* : le théorème de structure des groupes abéliens finis, ajouter la liste des groupes abéliens d'ordre 24.

2) L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↪ Dans *Risler, Boyer* : ce groupe est en fait un anneau, proposition sur ses éléments inversibles ; c'est un corps $\Leftrightarrow$ n est premier ; remarquer que $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ n'est pas le corps à p^α éléments et $(\mathbb{F}_{p^\alpha})^\times$ est cyclique.

↪ Dans *Perrin* : le lemme chinois, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$.

↪ Dans *Risler, Boyer* : la résolution d'un système congruentiel.

↪ Dans *Perrin* : un gros corollaire du lemme chinois ; $\left(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}\right)^\times$ et son lemme préliminaire ; $\left(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}\right)^\times$ et son lemme préliminaire.

II - Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1) Nombres premiers

↪ Dans *Francinou, Gianella* : le test de primalité d'Euler-Fermat.

↪ Dans *Risler, Boyer* : un exemple.

↪ Dans *Gourdon* : le chiffrement RSA ; définition des nombres pseudo-premiers en base a, il y en a une infinité ; définition des nombres de Carmichael, le théorème de Korselt [il est sans nom dans le livre], 561 est de Carmichael.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : le théorème de Wilson.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : le théorème de Sophie Germain.

↪ Dans *Zavidovique* : le théorème d'Erdös-Ginzburg-Ziv.

2) Résidus quadratiques

↪ Ici, p est premier, notations $\mathbb{F}_p^2$ et $\mathbb{F}_p^{*2}$.

↪ Dans *Perrin* : cardinal et caractérisation des éléments de $\mathbb{F}_p^2$.

↪ Dans *Combes* : $ax^2 + by^2 = c$ admet toujours des solutions, un exemple d'équation à résoudre.

↪ Dans *Perrin* : $-1 \in \mathbb{F}_p^2 \Leftrightarrow p \equiv 1\,[4]$, infinité de nombres premiers du type $4m + 1$.

↪ Dans *Combes* : si $p \equiv 3\,[4]$, $x^2 + y^2 = pz^2$ sans solution non-triviale.

↪ Dans *Perrin* : le théorème des deux carrés.

↪ Dans *Gozard* : définition du symbole de Legendre, loi de réciprocité quadratique, 17 pas carré dans $\mathbb{F}_{41}$.

↪ Dans *Gourdon* : $5 \in \mathbb{F}_p^2 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1\,[10]$, infinité de nombres premiers du type $10m - 1$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de Frobenius-Zolotarev, ajouter l'application au calcul de $\left(\frac{2}{p}\right)$.

III - Polynômes irréductibles

1) Irréductibilité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

↪ Dans *Gozard* : construction des corps finis en utilisant un polynôme irréductible, factorisation de $X^{p^n} - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$, corollaire sur le nombre d'irréductibles de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré d, exemple de la factorisation de $X^8 - X$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

↪ Dans *Perrin* : lien entre irréductibilité et recherche de racines dans les extensions de degré $\leq \frac{n}{2}$, $X^4 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

2) Irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$

↪ Dans *Perrin* : polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{Q}[X]$, critère d'Eisenstein, application à $X^{p-1} + \ldots + X + 1$ (p premier) ; test d'irréductibilité par réduction, exemples, mise en défaut par $X^4 + 1$.

3) Polynômes cyclotomiques

↪ Dans *Perrin* : la définition des polynômes cyclotomiques, la factorisation de $X^n - 1$.

↪ Dans *Gourdon* : l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

Références :

- Risler, Boyer (Algèbre pour la licence 3)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Gourdon (Algèbre)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1)
- Zavidovique (Un max de maths)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Objectif Agrégation

121 - Nombres premiers. Applications.

Cadre : On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

I - Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1) Nombres premiers : définitions et exemples

↪ Dans *Gourdon* : la définition de nombre premier, exemples ; la définition de nombres premiers entre eux, $p \in \mathcal{P}, p \nmid a \Rightarrow p \wedge a = 1$, Bézout, Gauss, Euclide ; si $p \in \mathcal{P}$ et $k \in [\![1, p-1]\!]$, alors $p | \binom{k}{p}$; le critère de primalité débile qui va jusqu'à $\sqrt{n}$.

2) Décomposition en facteurs premiers

↪ Dans *Gourdon* : $|n| \geq 2 \Rightarrow \exists p \in \mathcal{P}, p|n$; $\mathcal{P}$ est infini ; le théorème fondamental de l'arithmétique ; ajouter une remarque sur les anneaux factoriels ; expressions du pgcd et du ppcm ; application à l'infinité de nombres premiers de type $6k-1$.

3) Fonctions arithmétiques

↪ Dans *Demazure* : la définition d'une fonction multiplicative ; indicatrice d'Euler, elle est multiplicative, $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$; ajouter que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ et CS de cyclicité pour un groupe.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : la fonction de Möbius, elle est multiplicative, la formule d'inversion ; qu'on applique à φ ; l'identité d'Euler, et son application à ζ.

4) Répartition des nombres premiers

↪ *Sans référence* : le crible d'Ératosthène.

↪ Dans *Gourdon* : la version faible du théorème de Dirichlet (version forte admise) ; théorème des nombres premiers (admis).

↪ Dans *Francinou, Gianella* : $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

II - Corps finis

1) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

↪ Dans *Gourdon* : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\Leftrightarrow n$ est premier ; ajouter le calcul de l'inverse via Bézout.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : le théorème d'Euler-Fermat, le théorème de Wilson (penser à parler du critère de Lehmer).

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : le théorème de Sophie Germain.

↪ Dans *Gourdon* : le chiffrement RSA.

2) Théorie élémentaire des corps finis

↪ Dans *Perrin* : la définition de la caractéristique ; $\#K < \infty \Rightarrow \mathrm{car}(K) = p \in \mathcal{P} \Rightarrow \#K = p^r$, avec $r \in \mathbb{N}^*$; le morphisme de Frobenius et ses propriétés ; l'existence et l'unicité des corps finis ; $\mathbb{F}_q^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

↪ Dans *Zavidovique* : les théorèmes de Chevalley-Warning et d'Erdös-Ginzburg-Ziv (seulement le cas premier).

3) Carrés dans $\mathbb{F}_q$

↪ Dans *Perrin* : noter $\mathbb{F}_q^2$ et $\mathbb{F}_q^{\times 2}$, les carrés dans $\mathbb{F}_q$ (attention si $p = 2$) ; $-1 \in \mathbb{F}_q^2 \Leftrightarrow q \equiv 1\,[4]$; $\boxed{\text{le théorème des deux carrés}}$.

↪ Dans *Gozard* : la définition du symbole de Legendre, $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$ dans $\mathbb{F}_p$; la loi de réciprocité quadratique, $\left(\frac{17}{41}\right)$.

↪ Dans *Gourdon* : $\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1\,[10]$, l'infinité de nombres premiers du type $10k-1$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de Frobenius-Zolotarev, qu'on applique à $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

4) Irréductibilité de polynômes

↪ Dans *Perrin* : le critère d'Eisenstein, appliqué à $X^{p-1} + \ldots + X + 1$; le théorème de réduction, appliqué à $X^p + X + 1$; le lien entre irréductibilité et racines dans les extensions, l'intéressant $X^4 + 1$.

III - Théorie des groupes

1) Les p-groupes

↪ Dans *Ulmer* : la définition des p-groupes ; ajouter que ordre $p \Rightarrow$ cyclique ; les points fixes sous un p-groupe, le théorème de Cauchy ; cardinal des p-groupes finis ; le centre d'un p-groupe n'est jamais trivial, les groupes d'ordre p^2 sont abéliens.

2) Théorèmes de Sylow

↪ Dans *Perrin* : la définition d'un p-Sylow, un exemple dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$; le lemme sur les p-Sylows d'un sous-groupe ; le résultat d'existence d'un p-Sylow et le théorème de Sylow ; quand un p-Sylow est unique, il est distingué ; les groupes d'ordre 63 ne sont jamais simples et les groupes d'ordre pq, avec $p < q \in \mathcal{P}$ et $q \not\equiv 1\,[p]$ sont cycliques.

IV - Quelques familles de nombres remarquables

1) Nombres de Carmichael

↪ Dans *Gourdon* : la définition des nombres de Carmichael (lien avec le théorème de Fermat), le théorème de Korselt, 561.

2) Nombres de Fermat

↪ Dans *Demazure* : la définition des nombres de Fermat, quelques exemples.

↪ Dans *Gozard* : on rappelle la définition de point constructible, nombre constructible et le théorème de Wantzel.

↪ Dans *Mercier* : toujours dans le rappel, la définition d'angle constructible, et de polygone régulier constructible ; $\boxed{\text{Gauss-Wantzel}}$.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Demazure (Cours d'algèbre)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1)
- Zavidovique (Un max de maths)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Objectif Agrégation
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Mercier (Cours de géométrie)

122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.

Cadre : A désigne un anneau commutatif unitaire intègre, K un corps.

I - Notion de principalité

1) Idéaux d'un anneau

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : définition idéal principal ; tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ le sont, mais pas $(2, X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$; définition idéal premier, lien avec le quotient intègre, idéaux premiers de $\mathbb{Z}$; définition idéal maximal, lien avec le quotient corps, idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$; maximal $\Rightarrow$ premier, contre-exemple de la réciproque $(X) \subset K[X, Y]$.

2) Anneaux principaux

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition d'un anneau principal, l'exemple de $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, mais pas $\mathbb{Z}[X]$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : l'application à la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme de K-ev.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : l'application à la définition du polynôme minimal d'un élément algébrique sur K.

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : $A[X]$ est principal $\Leftrightarrow$ A est un corps, ajouter le corollaire $K[X_1, \dots, X_n]$ est principal $\Leftrightarrow n = 1$.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : A principal non-corps $\Rightarrow$ (I maximal $\Leftrightarrow$ I premier non-nul).

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : si A est principal, alors $S^{-1}A$ est principal ; ainsi $\mathbb{D}$ est un anneau principal.

3) Des exemples d'anneaux principaux : les anneaux euclidiens

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition d'un anneau euclidien ; l'exemple de $\mathbb{Z}$; la division euclidienne dans $A[X]$ et son corollaire $K[X]$ est euclidien ; euclidien $\Rightarrow$ principal.

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : $\mathbb{C}[X,Y]/\left(Y - X^2\right)$ est euclidien, $K[\![X]\!]$ aussi (mentionner ses idéaux et inversibles) ; A euclidien $\Rightarrow S^{-1}A$ est euclidien.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est euclidien ; si A est euclidien, alors $\exists x \in A \backslash A^\times, \pi_{x|A^\times \cup \{0\}}$ est surjective sur $A/(x)$; un exemple d'anneau principal non-euclidien $\boxed{\mathbb{Z}\left[\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}\right]}$.

II - Arithmétique dans les anneaux principaux

1) Divisibilité

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : définition divisibilité, interprétation idéaux ; $(a) = (b) \Leftrightarrow \exists u \in A^\times, a = bu$, définition éléments associés ; définition élément irréductible, p irréductible $\Rightarrow$ (p) maximal parmi les idéaux principaux propres de A (ajouter une conséquence quand A est principal).

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : les irréductibles de $K[\![X]\!]$ sont les associés de X.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : polynôme minimal d'un élément algébrique irréductible dans $K[X]$, corps de rupture, ajouter l'exemple de $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/\left(X^2+1\right)$; $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est intègre non-corps donc $\left(X^2+1\right)$ est irréductible non-maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition du pgcd dans un anneau non-nécessairement principal en tant qu'élément qui est diviseur commun et qui est multiple de tout diviseur commun (resp. ppcm).

$\hookrightarrow$ Dans *Ortiz* : on n'a pas forcément existence, regarder 3 et $2+\mathrm{i}\sqrt{5}$ sans ppcm, 9 et $6+3\mathrm{i}\sqrt{5}$ sans pgcd.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : Bézout (en supposant qu'on ait l'existence, elle va bientôt venir).

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le lemme de décomposition des noyaux (en supposant l'existence de la factorisation, idem).

2) La factorialité en héritage

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition d'un système de représentants des irréductibles, d'un anneau factoriel ; $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]$ ne l'est pas car $3 \times 3 = (2+\mathrm{i}\sqrt{5})(2-\mathrm{i}\sqrt{5})$; principal $\Rightarrow$ existence de la décomposition, préciser que cela résout notre ennui pour la décomposition des noyaux ; les conditions équivalentes pour être factoriel quand il y a existence de la décomposition (Gauss, Euclide...) ; principal $\Rightarrow$ factoriel, $\mathbb{Z}[X]$ factoriel non-principal ; l'existence et la formulation du pgcd/ppcm dans un anneau principal (cela résout notre ennui pour Bézout), un contre-exemple à Bézout $(X, Y) \subset K[X, Y]$.

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : un anneau factoriel qui vérifie Bézout est principal.

3) Lemme chinois

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : le lemme chinois.

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : la résolution d'un système de congruences.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : u est diagonalisable $\Leftrightarrow K[u] \simeq K^l$, pour un certain $l \in \mathbb{N}$.

III - Entiers d'un corps quadratique

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : On se place ici dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ sans facteur carré.

1) Généralités

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : la définition de la norme, de la trace, d'un entier de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; la notation A_d ; A_d est un anneau, sa forme selon la congruence de d modulo 4 ; la CNS pour que la norme soit un stathme quand $d < 0$.

$\hookrightarrow$ Dans *Duverney* : la résolution de $y^2 = x^3 - 2$, de $y^2 = x^3 - 11$.

2) L'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ des entiers de Gauss

$\hookrightarrow$ *On a déjà vu que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau euclidien.*

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les unités de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, ses irréductibles ; $\boxed{\text{le théorème des deux carrés}}$.

Références :

– Perrin (Cours d'algèbre)
– Tauvel (Algèbre)
– Gourdon (Algèbre)
– Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
– Ortiz (Exercices d'algèbre)
– Combes (Algèbre et géométrie)
– Objectif Agrégation
– Duverney (Théorie des nombres)

123 - Corps finis. Applications.

I - Généralités sur les corps finis

1) Caractéristique et sous-corps premier

↪ Dans *Perrin* : si $K \subset L$ des corps finis, alors L est un K-ev et $\#L = \#K^{\dim_K L}$; la définition du sous-corps premier, de la caractéristique ; la proposition qui donne que le cardinal d'un corps fini est p^n, p premier. Ajouter qu'il n'y a pas de corps de cardinal 6. Définir le morphisme de Frobenius.

2) Existence et unicité des corps finis

↪ Dans *Perrin* : le théorème d'existence et d'unicité des corps finis et l'exemple de la construction de $\mathbb{F}_4$.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : la CNS de primalité de Wilson.

↪ Dans *Gozard* : les sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ et l'application à $\mathbb{F}_{16}$.

3) Groupe multiplicatif d'un corps fini

↪ Dans *Perrin* : $\mathbb{F}_q^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : le test de primalité d'Euler-Fermat, le théorème de l'élément primitif pour les corps finis.

II - Carrés dans $\mathbb{F}_q$

1) Généralités

↪ Dans *Perrin* : introduire les notations $\mathbb{F}_q^2$ et $\mathbb{F}_q^{\times 2}$; la caractérisation des carrés dans $\mathbb{F}_q$ (distinguer la caractéristique 2) et le corollaire $-1 \in \mathbb{F}_q^2 \Leftrightarrow q \equiv 1\ [4]$; le théorème des deux carrés et l'infinité de nombres premiers de type $4m+1$.

2) Symbole de Legendre

↪ Ici, p est premier impair.

↪ Dans *Gozard* : la définition du symbole de Legendre, $\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}}$ dans $\mathbb{F}_p$, la loi de réciprocité quadratique et l'exemple de $\left(\frac{17}{41}\right)$. [Je n'introduis pas le symbole de Jacobi, parce qu'il ne sert qu'à enjoliver les calculs. Se le garder sous le pied pour les questions.]

↪ Dans *Gourdon* : $\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1\ [10]$ et l'infinité de nombres premiers de type $10m-1$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de $\boxed{\text{Frobenius-Zolotarev}}$. Ajouter en application $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

III - Polynômes sur un corps fini

1) Clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$

↪ Dans *Gozard* : $\mathbb{F}_q$ ne peut pas être algébriquement clos à cause de $\prod_{a\in\mathbb{F}_q}(X-a)+1$; la clôture algébrique des corps finis.

2) Polynômes irréductibles sur un corps fini

↪ Dans *Gozard* : $\mathbb{F}_{p^n} \simeq \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ où π est un polynôme irréductible de degré n et son corollaire sur l'existence de polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$ de tout degré.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : $\mathbb{F}_8 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$.

↪ Dans *Gozard* : la factorisation de $X^{p^n} - X$, et le corollaire sur le nombre d'irréductibles de degré d de $\mathbb{F}_p[X]$; ajouter en exemple la factorisation de $X^{2^3} - X$.

↪ Dans *Perrin* : $X^p - X - 1$ est toujours irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, la caractérisation des irréductibles de degré n par la recherche de racines dans les extensions de $\mathbb{F}_p$ de degré $\geq \frac{n}{2}$, l'exemple de X^4+X+1 irréductible de $\mathbb{F}_2[X]$. La proposition qui dit que X^4+1 est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais réductible sur tout $\mathbb{F}_p$, p premier ; mettant en évidence l'échec possible du critère de réduction.

3) Équations polynomiales

↪ Dans *Serre* et *Zavidovique* : le théorème de $\boxed{\text{Chevalley-Warning}}$ et ses corollaires.

IV - Algèbre linéaire et bilinéaire

1) Groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$

↪ Dans *Perrin* : les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$. Les matrices triangulaires supérieures strictes forment un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, l'application au 1er théorème de Sylow. L'action de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^n)$ est fidèle. Quelques isomorphismes exceptionnels.

2) Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$

↪ Dans *Perrin* : la définition du discriminant d'une forme quadratique ; le lemme qui dit que $ax^2+by^2=1$ admet toujours au moins une solution dans les corps finis et l'application à la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$. Ça permet de redémontrer la réciprocité quadratique.

Références :

- Perrin (Cours d'algèbre)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Gourdon (Algèbre)
- Objectif Agrégation
- Serre (Cours d'arithmétique)
- Zavidovique (Un max de maths)

124 - Anneau des séries formelles. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle.

I - L'anneau $\mathbb{K}[\![X]\!]$

1) Structure de l'ensemble des séries formelles

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition de $\mathbb{K}[\![X]\!]$, c'est un anneau commutatif intègre de neutres 0 et 1 ; la définition de l'élément X et justification de l'appellation "série" ; les éléments inversibles et l'exemple de $1-X$; la définition de la valuation et son comportement avec les opérations.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : les idéaux de $\mathbb{K}[\![X]\!]$, principalité, irréductibles ; euclidiennité.

↪ Dans *Saux-Picart* : l'injection des fractions rationnelles qui n'ont pas zéro pour pôle, ajouter une remarque pour dire que c'est important.

↪ Dans *ADF exos* : l'exemple marrant de $\frac{1}{(1-X^p)(1-X^q)}$ dans $\mathbb{R}[\![X]\!]$.

2) Opérations

↪ Dans *AF cours* : la définition de la sommabilité, la justification de la notation "série", les puissances d'une série formelle de valuation non-nulle sont sommables ; la définition de la composée, l'exemple de $(1-S)^{-1}$; les polynômes de Tchebychev de 2$^{\text{nde}}$ espèce ; valuation de la composée, composer à gauche est un morphisme, associativité de $\circ$.

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition de la dérivation et ses propriétés.

3) Quelques séries formelles usuelles dans $\mathbb{C}[\![X]\!]$

↪ Dans *AF cours* et *ADF exos* : des exemples de séries formelles usuelles ; du dénombrement dans $\mathfrak{S}_n$ (dérangements et involutions).

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : les nombres de Bell.

II - Séries génératrices et suites récurrentes linéaires

1) Séries génératrices

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition de la série génératrice d'une suite, des exemples, une application à un calcul de série.

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : $\boxed{\text{partitions d'un entier en parts fixées}}$ et façons de faire n € avec des pièces de 1, 2 ou 5 €.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : les formules de Newton.

↪ À partir de *Leichtnam* : $\boxed{\text{le théorème de Molien}}$.

2) Suites récurrentes linéaires

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition des suites récurrentes linéaires, leur série génératrice est une fraction rationnelle ; l'exemple de la suite de Fibonacci.

III - Équations différentielles dans $\mathbb{K}[\![X]\!]$

1) Suites P-récurrentes et séries Δ-finies

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition des suites P-récurrentes, l'exemple de la suite qui génère l'exponentielle ; les définitions équivalentes des séries Δ-finies, l'exponentielle est Δ-finie ; le théorème qui montre que ça n'est pas une coïncidence, et son corollaire qui montre que les équations différentielles à coefficients polynomiaux dans $\mathbb{K}[\![X]\!]$ ont toujours des solutions ; un exemple de système différentiel qui possède une solution.

2) Application aux nombres de Catalan

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition des nombres de Catalan, exemple de γ_2 et γ_3 si on a la place, la formule qui donne γ_n, détailler les étapes de la démo sur le plan pour pas se faire avoir avec la relation de Bézout qui peut pas s'inventer au tableau.

Références :

- Saux-Picart (Cours de calcul formel, Algorithmes fondamentaux)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Arnaudiès, Delezoïde, Fraysse (Exercices résolus, Algèbre 1)
- Arnaudiès, Fraysse (Cours de mathématiques, Algèbre 1)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et Analyse 2)

125 - Extensions de corps. Exemples et applications.

Cadre : K et L sont deux corps.

I - Corps et extensions de corps

1) Définitions et premières propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition d'un corps, de la caractéristique ; elle vaut 0 ou un nombre premier, l'exemple de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$; si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, alors $\mathbb{K}$ est infini, mais on n'a pas la réciproque, considérer $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}(X)$; la définition d'une extension de corps, la notation $L/_K$, les exemples de $\mathbb{C}/_\mathbb{R}$ et $K(T)/_K$; la définition du degré d'une extension, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ et $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$; le théorème de la base téléscopique, la multiplicativité du degré ; la définition de $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L \supset K$.

2) Extensions algébriques

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : une grosse définition avec éléments algébriques et transcendants, le polynôme minimal (unitaire, irréductible) ; des exemples sur $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ et i sont algébriques, alors que e et π sont transcendants (ADMIS) ; α algébrique sur $K \Leftrightarrow K[\alpha] = K(\alpha) \Leftrightarrow \dim_K K[\alpha] < \infty$ et alors $\deg \pi_\alpha = [K[\alpha] : K]$ est le degré de α, et $\left(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\right)$ base de $K[\alpha]$; donner le polynôme minimal de $\sqrt[n]{r}$ pour $r \in \mathbb{Q}$; calculer un polynôme annulateur de $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ et dire qu'il est irréductible ; la définition d'une extension algébrique, l'ensemble des éléments algébriques sur K est une extension algébrique de K, une extension finie est algébrique et l'ensemble des éléments algébriques de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$ est une extension algébrique sur $\mathbb{Q}$ qui n'est pas finie.

II - Adjonction de racines

1) Corps de rupture

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition du corps de rupture, existence et unicité, degré et base ; les exemples de la construction de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{F}_4$.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : le critère d'irréductibilité de P à propos de l'absence de racines dans des extensions de K de degré inférieur à $\frac{\deg P}{2}$, l'application à $X^4 + 1$ irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ pour tout p premier (met en échec la réduction) ; le théorème de conservation de l'irréductibilité par extension, l'exemple de $X^3 + X + 1$ sur $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, le contre-exemple de $X^4 + 1$ sur $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

2) Corps de décomposition

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : la définition du corps de décomposition, $\mathbb{C}$ en est un pour $X^2 + 1$, mais $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est un corps de rupture mais pas de décomposition de $X^3 - 2$; l'existence et l'unicité du corps de décomposition.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : l'application à l'existence et l'unicité des corps finis ; $X^p + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : $\mathbb{F}_{p^n} \simeq \mathbb{F}_p[X]/_{(\pi)}$ où π est un irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n, des exemples ; l'existence d'irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$; $\mathbb{F}_{p^n}$ est à la fois corps de rupture et de décomposition de tout irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : l'application à Cayley-Hamilton.

3) Clôture algébrique

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : les définitions équivalentes d'un corps algébriquement clos, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne le sont pas ; les corps algébriquement clos sont infinis ; le théorème de d'Alembert-Gauss, l'application aux irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, ajouter que toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables ; la définition d'une clôture algébrique, $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{Q}$; le théorème d'existence et d'unicité de la clôture algébrique.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les exemples des clôtures algébriques de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{F}_p$, p premier.

$\hookrightarrow$ Dans *Francinou, Gianella* : $\boxed{\text{les irréductibles de } \mathbb{F}_q[X]}$.

III - Construction à la règle et au compas

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : introduction des notations, la définition de point constructible en un pas, la définition de point constructible ; la définition de nombre constructible, $\mathbb{Q}$ est constructible, un point est constructible $\Leftrightarrow$ ses coordonnées sont constructibles, l'ensemble des nombres constructibles est stable par passage à la racine carrée ; le théorème de Wantzel et son corollaire ; l'application à l'impossibilité de la duplication du cube.

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : $\boxed{\text{le théorème de Gauss-Wantzel}}$.

Références :

- Gozard (Théorie de Galois)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Gourdon (Algèbre)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Mercier (Cours de géométrie)

126 - Exemples d'équations diophantiennes.

I - Équations de degré 1

1) Exemple de l'équation $ax + by = c$

$\hookrightarrow$ Dans *1001* : l'ensemble des solutions de $ax + by = c$ à partir d'une solution particulière, un exemple facile et $303x + 57y = a^2 + 1$ n'a jamais de solution ; ajouter qu'on utilise l'algorithme d'Euclide étendu pour déterminer une solution particulière.

2) Équations de degré 1 en n variables

$\hookrightarrow$ Dans *Berhuy* : existence et forme des solutions de $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ quand $\operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)|b$, l'exemple de $3x + 4y + 7z = b$.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 2* : $\boxed{\text{les partitions d'un entier en parts fixées}}$.

3) Équations modulaires

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : le lemme chinois, et un exemple à la noix.

II - Quelques méthodes pratiques

1) Réduction modulaire

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : expliquer le principe, et donner l'exemple de $x^2 + 1 = p$ qui n'a pas de solution pour p premier impair avec $p \not\equiv 1\,[4]$.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 1* : le théorème de Sophie Germain.

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : les triplets pythagoriciens (2 n'est pas un carré modulo 4).

$\hookrightarrow$ Dans *1001* : des exemples d'équations qui n'ont pas de solutions comme $x^3 + 5 = 117y^3$, $x^3 + y^3 + z^3 = 4$ ou 5, $x^2 + y^2 = 8z + 7$.

2) Méthode de descente infinie

$\hookrightarrow$ Dans *Samuel* et *Combes* : expliquer le principe de la méthode.

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : des exemples d'équations qui n'ont pas de solutions non-triviales comme $x^4 + y^4 = z^2$, $x^4 + y^4 = z^4$, $x^2 + y^2 = pz^2$ avec $p \equiv 3\,[4]$ premier.

III - Méthodes géométriques

1) Paramétrisation rationnelle de courbes

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : résoudre $P(x, y, z) = 0$ avec P homogène revient à chercher les points rationnels de la courbe $P(x, y, 1) = 0$; si on a un paramétrage rationnel, c'est cool.

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* et *Audin* : donner des exemples de coniques, de cubiques à point double, comme le cercle (qui redonne les triplets pythagoriciens), le folium de Descartes, ou $x^3 + y^3 = xyz$.

2) Théorème de Minkowski et réseaux

$\hookrightarrow$ Dans *Szpirglas* : le théorème de Minkowski et son corollaire (si on a la place : définition de réseau, domaine fondamental, covolume) ; par exemple, $\exists (r, s) \in \mathbb{Z}^2, p = r^2 + 2s^2$, quand $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : le théorème des 4 carrés.

IV - Utilisation des corps quadratiques

1) Entiers d'un corps quadratique

$\hookrightarrow$ Dans *Combes* : on se place dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ avec $d \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sans facteur carré ; les définitions de norme, de trace et d'entier de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$; la notation A_d, c'est un anneau, sa forme ; la CNS pour que la norme soit un stathme.

$\hookrightarrow$ Dans *Duverney* : des exemples d'équations de Mordell, comme $y^2 = x^3 - 2$, $y^2 = x^3 - 11$, $y^2 = x^3 - 1$ ou $x^5 - y^2 = 1$.

2) Entiers de Gauss

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : les unités, les irréductibles de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$; $\boxed{\text{le théorème des 2 carrés}}$.

3) Équations de Pell

$\hookrightarrow$ Dans *Duverney* : on parle de $x^2 - dy^2 = 1$; solution triviale et la définition de solution fondamentale, il y a une infinité de solutions (ADMIS) ; l'existence d'une solution fondamentale ; le théorème avec $x_n + \sqrt{d}y_n = \left(x_1 + \sqrt{d}y_1\right)^n$, l'exemple de $d = 19$.

Références :

- De Koninck (1001 problèmes en théorie classique des nombres)
- Berhuy (Modules)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et Analyse 2)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Samuel (Théorie des nombres)
- Audin (Géométrie)
- Szpirglas (Algèbre L3)
- Tauvel (Algèbre)
- Duverney (Théorie des nombres)
- Perrin (Cours d'algèbre)

140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif quelconque.

I - Corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$

1) Structure de $\mathbb{K}(X)$

↪ Dans *RDO 1* : la définition de $\mathbb{K}(X) = \mathrm{Frac}(\mathbb{K}[X])$, de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}(X)$, la structure de $\mathbb{K}$-algèbre ; le théorème de changement du corps de base ; la forme irréductible ; la définition du degré, il est indépendant du représentant choisi, le lien avec les opérations.

↪ Dans *Tauvel Algèbre* : $\mathbb{K}(X)$ n'est pas algébriquement clos.

2) Pôles et racines

↪ Dans *RDO 1* : la définition d'une racine/d'un pôle d'ordre k, remarquer qu'on ne peut pas être à la fois pôle et racine ; l'influence du corps de base, illustrée par $\frac{1}{X^2+1}$ quand on le voit dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$.

↪ Dans *X-ENS Analyse 1* : $\boxed{\text{les automorphismes de } \mathbb{K}(X)}$.

3) Dérivation

↪ Dans *RDO 1* : la définition de F', les formules de dérivation ; si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, alors $F' = 0 \Leftrightarrow F \in \mathbb{K}$; si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p$, $F' = 0 \Leftrightarrow F \in \mathbb{K}(X^p)$.

II - Fonctions rationnelles

↪ Dans *RDO 1* : la définition d'une fonction rationnelle ; si $\#\mathbb{K} = \infty$, alors F est définie sur une infinité de points, sinon l'ensemble de définition peut être vide, l'exemple de $\frac{1}{X(X-1)\ldots(X-p+1)} \in \mathbb{F}_p(X)$; deux fonctions rationnelles égales sur un ensemble infini proviennent de la même fraction rationnelle, le contre-exemple de $\frac{1}{X^p}$ et $\frac{1}{X}$ dans $\mathbb{F}_p(X)$.

↪ Dans *Audin* : l'exercice sur le paramétrage rationnel des coniques, l'exemple du cercle.

↪ Dans *Combes* : application à la résolution de l'équation de Diophante.

III - Décomposition en éléments simples

1) Étude théorique de la décomposition

↪ Dans *LFA* : le théorème de décomposition en éléments simples avec partie entière et parties polaires ; on en déduit que $\{X^n | n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{X^k}{P^l} \middle| P \text{ irréductible unitaire, } l \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in [\![0, \deg P - 1]\!] \right\}$ est une base de $\mathbb{K}(X)$ sur $\mathbb{K}$.

↪ Dans *Tauvel Algèbre* : le calcul de $\frac{P'}{P}$ et le théorème de Lucas.

↪ Dans *LFA* : la forme des parties polaires sur un corps algébriquement clos.

↪ Dans *RDO 1* : la forme des parties polaires sur $\mathbb{R}$; ajouter l'exemple de $\frac{1}{X(X^2+1)^2}$ et application au calcul de primitives.

2) Calcul pratique de la décomposition

↪ Dans *LFA* : le lemme de division selon les puissances croissantes, les parties polaires pour le pôle 0 ; tirer des exemples de calculs du livre que pour $F = \frac{1+2X+X^3}{X^4(1+X+2X^2)}$, $\mathcal{P}_0(F) = \frac{1}{X^4} + \frac{1}{X^3} - \frac{3}{X^2} + \frac{2}{X}$; la formule de la partie polaire relative à un pôle simple ; ajouter une application à $\frac{1}{X^4+1}$.

↪ Dans *RDO 1* : le traitement des éléments simples de 2^{nde} espèce dans $\mathbb{R}(X)$.

3) Résidus

↪ Dans *Tauvel Algèbre* : la définition de $\mathrm{Res}(F, \alpha)$; si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et de caractéristique nulle, quand $\deg F < -1$, alors $\sum \mathrm{Res}(f, \alpha) = 0$ et l'image de l'opérateur de dérivation est l'ensemble des fractions rationnelles dont les résidus sont tous nuls.

↪ Dans *Tauvel Analyse complexe* : si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ et si α est pôle d'ordre n, alors $\mathrm{Res}(F, \alpha) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}(X-\alpha)^n F}{\mathrm{d}^{n-1} X}(\alpha)$.

↪ Dans *Tauvel Algèbre* : le théorème des résidus ; ajouter une application gentille du style $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^6}$.

IV - Lien avec les séries formelles

↪ Dans *RDO 1* : la définition du développement en série formelle et le théorème de développabilité en série formelle.

↪ Dans *AF cours* : la notation $\mathbb{K}(X)_0$, l'unicité du prolongement de $\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[\![X]\!]$ en $\mathbb{K}(X)_0 \hookrightarrow \mathbb{K}[\![X]\!]$; en caractéristique nulle, on a : $\frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n=0}^\infty \binom{n+p-1}{p-1} X^n$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$; le contre-exemple de la série formelle $\ln X \notin \mathbb{K}(X)_0$.

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : $\boxed{\text{les partitions d'un entier en parts fixées}}$.

Références :

- Ramis, Deschamps, Odoux (Cours de mathématiques, Tome 1)
- Tauvel (Algèbre et Analyse complexe)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et Analyse 2)
- Audin (Géométrie)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Lelong-Ferrand, Arnaudiès (Cours de mathématiques, Tome 1)
- Arnaudiès, Fraysse (Cours de mathématiques, Tome 1)

141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Cadre : A est un anneau commutatif unitaire intègre, K est un corps, et L/K est une extension de corps.

I - Polynômes irréductibles

1) Définitions et premières propriétés

↪ Dans *Perrin* : la définition d'un polynôme irréductible.

↪ Dans *Gozard* : degré 1 sur $K \Rightarrow$ irréductible dans $K[X]$; irréductible de degré > 1 dans $K[X] \Rightarrow$ sans racine dans K ; irréductible de degré 2 ou 3 dans $K[X] \Rightarrow$ sans racine dans K ; le contre-exemple de $\left(X^2+1\right)^2$ sans racine dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ mais réductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

2) Critères d'irréductibilité

↪ Dans *Gozard* : la définition du contenu, le lemme de Gauss pour A factoriel puis le lien entre irréductibles de $A[X]$ et de $\mathrm{Frac}(A)[X]$; ajouter le contre-exemple de $2X$ dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$.

↪ Dans *Perrin* : A factoriel $\Rightarrow A[X]$ factoriel ; le critère d'Eisenstein, l'exemple de $X^{p-1}+\ldots+X+1$, où p est premier ; le test par réduction, et un exemple simple.

3) Éléments algébriques et polynôme minimal

↪ Dans *Perrin* : une grosse définition avec éléments algébriques et transcendants, polynôme minimal ; $\sqrt{2}$ et i sont algébriques, e et π sont transcendants (ADMIS) ; $\alpha \in L$ algébrique $\Leftrightarrow K(\alpha) = K[\alpha] \Leftrightarrow \dim_K K[\alpha] < \infty$, alors $[K[\alpha] : K] = \deg \pi_\alpha$; définition d'une extension algébrique.

II - Adjonction de racines

1) Corps de rupture

↪ Dans *Gozard* : la définition du corps de rupture, existence et unicité, degré et base ; les exemples de la construction de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{F}_4$.

↪ Dans *Perrin* : le critère d'irréductibilité de P à propos de l'absence de racines dans des extensions de K de degré inférieur à $\frac{\deg P}{2}$, l'application à X^4+1 irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ pour tout p premier (met en échec la réduction) ; le théorème de conservation de l'irréductibilité par extension, l'exemple de X^3+X+1 sur $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, le contre-exemple de X^4+1 sur $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$.

2) Corps de décomposition

↪ Dans *Gozard* : la définition du corps de décomposition, $\mathbb{C}$ en est un pour X^2+1, mais $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ est un corps de rupture mais pas de décomposition de X^3-2 ; l'existence et l'unicité du corps de décomposition.

↪ Dans *Perrin* : l'application à l'existence et l'unicité des corps finis ; X^p+X+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ et dans $\mathbb{Z}[X]$.

↪ Dans *Gourdon* : l'application à Cayley-Hamilton.

3) Clôture algébrique

↪ Dans *Gozard* : les définitions équivalentes d'un corps algébriquement clos, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne le sont pas ; les corps algébriquement clos sont infinis ; le théorème de d'Alembert-Gauss, l'application aux irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, ajouter que toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables ; la définition d'une clôture algébrique, $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ mais pas de $\mathbb{Q}$; le théorème d'existence et d'unicité de la clôture algébrique.

↪ Dans *Perrin* : les exemples des clôtures algébriques de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{F}_p$, p premier.

III - Polynômes cyclotomiques

↪ Dans *Perrin* : la définition des polynômes cyclotomiques sur un corps K (quand on sous-entend le corps, c'est sur $\mathbb{Q}$), des exemples ; $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_{d,K}$; $\boxed{\Phi_n \in \mathbb{Z}[X] \text{ est irréductible sur } \mathbb{Z}[X]}$; l'obtention de $\Phi_{n,K}$ à l'aide du morphisme canonique à partir de Φ_n.

↪ Dans *Gozard* : la version faible du théorème de Dirichlet.

↪ Dans *Perrin* : $\zeta \in \mu_n^*(\mathbb{Q}) \Rightarrow [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$; $\alpha \in \mu_n^*(\mathbb{Q}), \beta \in \mu_m^*(\mathbb{Q}), n \wedge m = 1 \Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

IV - Polynômes irréductibles sur les corps finis

↪ Dans *Gozard* : $\mathbb{F}_{p^n} \simeq \mathbb{F}_p[X]/(\pi)$ où π est un irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n, des exemples ; l'existence d'irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$; $\mathbb{F}_{p^n}$ est à la fois corps de rupture et de décomposition de tout irréductible de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré n ; la factorisation de $X^{p^n} - X$ et le corollaire sur les degrés ; ajouter l'exemple de la factorisation de $X^8 - X$ dans $\mathbb{F}_2[X]$; la définition de la fonction de Möbius et la formule d'inversion.

↪ Dans *Francinou, Gianella* : $\boxed{\text{les irréductibles de } \mathbb{F}_q[X]}$.

Références :

- Perrin (Cours d'algèbre)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Gourdon (Algèbre)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)

142 - Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Cadre : A est un anneau commutatif unitaire et K est un corps ; introduire la norme d'un multi-indice (norme 1).

I - Polynômes à n indéterminées

1) L'algèbre $A[X_1, \ldots, X_n]$

↪ Dans *RDO* : la définition formelle, les opérations, c'est une A-algèbre, introduction de la notation comme somme de monômes.

↪ Dans *Goblot* : la propriété universelle des A-algèbres.

↪ Dans *RDO* : l'isomorphisme canonique entre $A[X_1, \ldots, X_n]$ et $A[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$. Ajouter l'exemple du déterminant, du polynôme caractéristique.

2) Degré et polynômes homogènes

↪ Dans *RDO* : la définition du degré partiel relativement à une variable et ses propriétés, la même chose sur le degré total, un exemple. La définition de l'homogénéité, un exemple ; le produit de deux polynômes homogènes est homogène et la terminologie pour les degrés 0, 1 et 2. $A[X_1, \ldots, X_n]$ est une algèbre graduée.

↪ À partir de *Leichtnam* : $\boxed{\text{le théorème de Molien}}$.

↪ Dans *RDO* : le polynôme dérivé partiel et la CNS de p-homogénéité sur un corps de caractéristique nulle.

3) Propriétés arithmétiques

↪ Dans *RDO* : transport de l'intégrité, de la factorialité ; perte de toute euclidiennité. Parler des conséquences de la factorialité ; on perd Bézout. La proposition sur la divisibilité par $X_n - B$ où $B \in A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, un exemple et le corollaire sur la divisibilité par le produit $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$.

II - Fonctions polynômes

1) Définition et prolongement des identités

↪ Dans *RDO* : la définition d'une fonction polynôme, le théorème qui donne la permission de faire l'abus d'écriture entre un polynôme et sa fonction associée quand A est intègre infini. Ajouter un contre-exemple.

↪ Dans *Goblot* : la définition d'identité polynomiale, le théorème de prolongement des identités, et son application $\chi_{MN} = \chi_{NM}$.

2) Sur des corps finis

↪ Dans *Serre* et *Zavidovique* : $\boxed{\text{Chevalley-Warning}}$ et ses applications.

3) Sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

↪ Dans *Goblot* : le prolongement des identités sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ajouter en application le théorème de Cayley-Hamilton.

III - Polynômes symétriques

1) Définition et relation coefficients-racines

↪ Dans *RDO* : l'action de $\mathfrak{S}_n$, la définition d'un polynôme symétrique, d'un polynôme symétrique élémentaire ; σ_k est k-homogène. La relation coefficients-racines dans $A[Y]$.

2) Structure des polynômes symétriques

↪ Dans *RDO* : la définition du poids d'un monôme, de l'ordre d'un polynôme symétrique, le théorème de structure qui donne l'existence d'un polynôme Q en les polynômes symétriques élémentaires égal à P, pour tout $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$. Détailler l'algorithme de symétrisation.

Références :

- Ramis, Deschamps, Odoux (Cours de mathématiques spéciales, Algèbre 1)
- Goblot (Algèbre commutative)
- Serre (Cours d'arithmétique)
- Zavidovique (Un max de maths)

143 - Résultant. Applications.

Cadre : A désigne un anneau commutatif unitaire intègre, $\mathrm{Frac}(A)$ son corps de fractions ; K sera un corps, dont on notera $\overline{K}$ la clôture algébrique et L une extension quelconque ; $A_d[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans A de degré $\leq d$; $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{q} b_j X^j$ vérifient $a_p \neq 0 \neq b_q$.

I - Définitions et premières propriétés

1) Matrice de Sylvester et résultant

↪ Dans *Szpirglas* : la définition de la matrice de Sylvester (et mettre en avant l'application linéaire associée), la définition du résultant ; ajouter un exemple ; $\mathrm{Res}(P,Q) \in \mathbb{Z}\left[a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q\right] \subset A$ donc le résultant est continu en les polynômes.

↪ Dans *Saux-Picart* : la proposition avec les formules élémentaires autour du résultant.

2) Liens avec le PGCD

↪ Dans *Szpirglas* : $\exists (U,V) \in A_{q-1}[X] \times A_{p-1}[X], PU + QV = \mathrm{Res}(P,Q)$; $\mathrm{Res}(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \deg(P \wedge Q) \geq 1$ quand A est factoriel ; on en déduit que sur A factoriel, quand le résultant est nul, il y a un facteur commun non-trivial.

↪ Dans *Mérindol* : l'excellent contre-exemple de cette remarque sur un anneau intègre non-factoriel.

↪ Dans *Szpirglas* : la conséquence de la propriété précédente avec la présence de racines communes dans $\overline{\mathrm{Frac}(A)}$.

II - Calcul effectif du résultant

1) Algorithme d'Euclide

↪ Dans *Saux-Picart* : la formule du résultant avec le reste de la division euclidienne dans $\mathrm{Frac}(A)[X]$, l'algorithme de calcul via Euclide, exemple.

2) Liens avec les racines des polynômes

↪ Dans *Saux-Picart* : la formule du résultant avec les racines dans $\overline{\mathrm{Frac}(A)}$.

↪ Dans *Szpirglas* : l'exercice sur $\mathrm{Res}\left(\Phi_p, \Phi_{2p}\right)$; la multiplicativité par rapport à chacune des variables.

↪ Dans *Szpirglas* et *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème de Kronecker et son corollaire}}$.

III - Applications algébriques

1) Discriminant

↪ Dans *Szpirglas* : la définition du discriminant, les exemples en degré 2 et 3, l'expression à l'aide des racines dans $\overline{\mathrm{Frac}(A)}$; le lien avec la présence de racines multiples, l'application à Cayley-Hamilton.

↪ Dans *Gourdon* : l'intérieur des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes.

2) Éléments algébriques

↪ Dans *Szpirglas* : des polynômes annulateurs de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$ connaissant des polynômes annulateurs de α et β, des exemples ; l'ensemble des éléments algébriques sur K inclus dans L est un corps intermédiaire entre K et L ; la remarque sur les entiers algébriques qui forment un anneau.

3) Élimination dans les systèmes polynomiaux

↪ Dans *Saux-Picart* : la présentation du problème, expliquer qu'on n'a pas "$(\mathrm{Res}_X(P,Q))(\beta) = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta)$ solution" avec un contre-exemple ; le lemme et le théorème à ce sujet, un retour sur le contre-exemple ; l'exemple résolu du livre.

IV - Applications géométriques

1) Équation implicite d'une courbe paramétrée

↪ Dans *Mérindol* : la présentation du problème et sa résolution ; ajouter un exemple.

2) Intersection de courbes planes

↪ Dans *Szpirglas* : la définition de courbes algébriques planes, $\boxed{\text{la borne de Bézout}}$; ajouter une application à l'intersection de deux coniques, et des exemples.

Références :

- Szpirglas (Algèbre L3)
- Saux-Picart (Cours de calcul formel, Algorithmes fondamentaux)
- Mérindol (Nombres et algèbre)
- Gourdon (Algèbre)

144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Cadre : K est un corps commutatif, et A est un anneau commutatif unitaire.

I - Racines d'un polynôme

1) Définitions et premières propriétés

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition de racine d'un polynôme, ajouter l'exemple de $X^n - 1$, la relation de divisibilité qui s'ensuit ; la définition d'une racine d'ordre h, ce que cela impose aux polynômes dérivés en caractéristique 0, un contre-exemple en caractéristique p, et le fait que ça reste néanmoins vrai pour les racines d'ordre 1 ; quand on est de degré n sur un corps on admet au plus n racines, un contre-exemple sur un anneau.
- ↪ Dans *X-ENS Algèbre 2* : le déterminant de Vandermonde.
- ↪ Dans *Gourdon* : l'interpolation de Lagrange ; si $\#K = \infty$ et si P s'annule sur K, alors $P = 0$, le contre-exemple sur les corps finis, en déduire une bijection entre polynôme et fonction polynomiale ; la définition d'un polynôme scindé.
- ↪ Dans *Perrin* : la définition d'un polynôme irréductible ; degré 1 $\Rightarrow$ irréductible ; irréductible et degré $> 1 \Rightarrow$ sans racines ; le contre-exemple de $\left(X^2+1\right)^2$ sur $\mathbb{R}$.
- ↪ Dans *Gozard* : le théorème de d'Alembert-Gauss, les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont toutes trigonalisables, les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

2) Aspect topologique

- ↪ Dans *FG* : la continuité des racines de polynômes.
- ↪ Dans *OA* : les racines dépendent localement de façon $\mathcal{C}^\infty$ du polynôme, et l'ensemble des polynômes scindés à racines constitue un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Extensions de corps par adjonction de racines

- ↪ Dans *Gozard* : la définition d'un corps de rupture, existence et unicité, construction de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_4$.
- ↪ Dans *Perrin* : le lien entre irréductibilité et absence de racines dans les extensions de petit degré ; $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais sur aucun $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- ↪ Dans *Gozard* : la définition du corps de décomposition, parler de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$, existence et unicité.
- ↪ Dans *Perrin* : l'application à l'existence et l'unicité des corps finis ; $X^p + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$.
- ↪ Dans *Gozard* : la définition d'un corps algébriquement clos, ce n'est pas le cas de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{F}_p$, rappel de d'Alembert-Gauss.

4) Résultant

- ↪ Dans *Nourdin* : la définition du résultant, ajouter une remarque pour le définir sur un anneau intègre, il est nul quand $P \wedge Q \neq 1$, la formule avec les racines ; le discriminant (définition, lien avec la simplicité des racines, exemples).

II - Polynômes symétriques, fonctions symétriques élémentaires

1) Définition et relation coefficients-racines

- ↪ Dans *RDO* : l'action de $\mathfrak{S}_n$, la définition d'un polynôme symétrique, d'un polynôme symétrique élémentaire, remarquer que σ_k est k-homogène, et la relation coefficients-racines dans $A[Y]$.
- ↪ Dans *FG* : les formules de Newton.

2) Structure des polynômes symétriques

- ↪ Dans *RDO* : la définition du poids d'un monôme, le premier théorème de structure des polynômes symétriques ; bien détailler l'algorithme de symétrisation pour ne pas se faire avoir dans les questions.
- ↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* et *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème de Kronecker et son corollaire}}$.

III - Localisation et comptage des racines

1) Localisation

- ↪ Dans *Nourdin* : les racines rationnelles des polynômes à coefficients entiers et le théorème de Gauss-Lucas.
- ↪ Dans *Mignotte* : les règles de Newton, Lagrange et Descartes (précédée de son lemme) ; la proposition et au moins une partie du théorème dans le cas complexe, la remarque pour obtenir des minorations.

2) Comptage

- ↪ Dans *Zavidovique* : $\boxed{\text{le théorème de Chevalley-Warning et son application à Erdös-Ginzburg-Ziv}}$.
- ↪ Dans *Mignotte* : la définition d'une suite de Sturm, le théorème de Sturm, la proposition sur la construction d'une telle suite ; ajouter un exemple.
- ↪ Dans *Amar, Matheron* : le théorème de Rouché auquel on ajoutera un exemple.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et 2)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Objectif Agrégation
- Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)
- Ramis, Deschamps, Odoux (Cours de mathématiques spéciales, Algèbre 1)
- Mignotte (Mathématiques pour le calcul formel)
- Zavidovique (Un max de maths)
- Amar, Matheron (Analyse complexe)

150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cadre : E et F sont deux K-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, où K est un corps (et même $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ quand on parle de topologie).

I - Action par translation – Pivot de Gauss

↪ Dans *H2G2* : la motivation sur la résolution de systèmes linéaires ; la définition de l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ par translation à gauche sur $\mathcal{M}_n(K)$, dont les orbites sont caractérisées par le noyau ; la définition du pivot, d'une matrice échelonnée en lignes, réduite avec un exemple ; une remarque sur l'échelonnement en colonnes ; la décomposition en orbites (par la méthode du pivot de Gauss) ; la définition d'une dilatation, d'une transvection, d'une permutation, leurs conséquences sur les lignes/colonnes ; pour l'action par translation à droite, les orbites sont caractérisées par l'image, et on échelonne les matrices par colonnes ; les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(K)$, et quand on ajoute les dilatations on engendre $\mathrm{GL}_n(K)$.

II - Action de Steinitz – Matrices équivalentes

1) Orbite et rang

↪ Dans *H2G2* : la définition de l'action par équivalence de $\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_m(K)$ par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,m}(K)$; deux matrices équivalentes représentent le même morphisme ; les orbites sont caractérisées par le rang ; ajouter que $\{J_r | 0 \leq r \leq \min\{m,n\}\}$ est un système de représentants des orbites.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\,({}^{\mathrm{t}}A)$; si $k \subset K$, deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(k)$ équivalentes dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ le sont dans $\mathcal{M}_{n,p}(k)$.

↪ Dans *H2G2* : le nombre de matrices de rang r dans $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{F}_q\right)$.

2) Topologie des orbites (sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

↪ Dans *H2G2* : l'adhérence des orbites ; ajouter que $\mathrm{GL}_n(K)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(K)$; unique orbite fermée, ouverte ; $\mathrm{GL}_n(K)$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(K)$; le rang n'est pas continu ; l'expression en termes de suites de matrices.

↪ Dans *Mneimné, Testard* : pour $p < n$, l'ensemble des matrices de rang p est connexe.

III - Action par conjugaison – Matrices semblables

1) Généralités

↪ Dans *Gourdon* : la définition de l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\mathcal{M}_n(K)$, de matrices semblables, traduction d'un changement de base pour un endomorphisme ; si $\#K = \infty$ et $K \subset L$, alors deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ semblables sur L le sont sur K ; la définition de matrice trigonalisable, diagonalisable ; ajouter une application au calcul de puissance.

2) Classification des orbites

↪ Dans *Gourdon* : la réduction de Jordan pour les trigonalisables sur K (ajouter que c'est trop cool quand K est algébriquement clos !) ; sur un corps algébriquement clos, M et $2M$ sont semblables $\Leftrightarrow$ M est nilpotente ; si K est infini, M et ${}^{\mathrm{t}}M$ sont semblables ; la définition des invariants de similitude, la réduction de Frobenius, la définition d'une matrice compagnon, les invariants de similitude portent bien leur nom ; la caractérisation des classes de similitude en dimensions 2 et 3 ; inventer un contre-exemple dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

3) Actions de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$

↪ Dans *Gourdon* : la définition de l'action de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{la réduction des endomorphismes normaux}}$, les conséquences pour les matrices symétriques/anti-symétriques, ajouter que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ; la définition de l'action de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la réduction des endomorphismes normaux, les conséquences pour les matrices hermitiennes, la racine carrée d'une matrice hermitienne positive.

IV - Action par congruence – Matrices congruentes

↪ Dans *H2G2* : la définition de l'action par congruence, de matrices congruentes, le lien avec les formes quadratiques ; le théorème d'inertie de Sylvester pour $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_q$.

↪ Dans *Rouvière* : le lemme de réduction des formes quadratiques et le lemme de Morse.

↪ Dans *Alessandri* : $\boxed{\text{les sous-groupes compacts de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.

Références :
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Objectif Agrégation
- Mneimné, Testard (Groupes de Lie classiques)
- Gourdon (Algèbre)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Alessandri (Thèmes de géométrie)

151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

I - Théorie de la dimension

1) Familles génératrices, familles libres, bases

- ↪ Dans *Grifone* : la définition de famille génératrice/libre/base, des exemples ; toute sur/sous-famille d'une famille libre/génératrice est libre/génératrice.
- ↪ Dans *Debeaumarché 4* : une famille est une base ⇔ elle est génératrice minimale ⇔ elle est libre maximale.

2) Espaces vectoriels de dimension finie

- ↪ Dans *Grifone* : la définition d'un ev de dimension finie, des exemples ; si G est génératrice et $L \subset G$ libre, alors il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$; de toute famille génératrice on peut extraire une base et on peut compléter en une base toute famille libre ; la détermination d'une base par algorithme de Gauss en échelonnant des matrices ; dans un ev engendré par n éléments, toute famille d'au moins $(n+1)$ éléments est liée ; toutes les bases ont même cardinalité, la définition de la dimension d'un ev, des exemples ; en dimension n, plus de n éléments ⇒ liée et moins de n éléments ⇒ pas génératrice, une famille libre/génératrice de cardinal n est une base, des exemples.
- ↪ Dans *Gourdon Algèbre* : $\boxed{\text{la réduction des endomorphismes normaux}}$.
- ↪ Dans *Grifone* : la dimension du produit d'ev.

3) Sous-espace vectoriel

- ↪ Dans *Grifone* : si F sev de E, $\dim F \leq \dim E$ et $\dim E = \dim F \Leftrightarrow F = E$; la définition de la somme, de la somme directe, du supplémentaire ; $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow$ pour toutes bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E_1 et E_2, $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de E ; tout sev possède au moins un supplémentaire, et ceux-ci sont de même dimension ; $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$; des exemples de supplémentaires ; la formule de Grassmann.

4) Dimension et applications linéaires

- ↪ Dans *Grifone* : l'image d'une famille libre/génératrice par une application injective/surjective est libre/surjective ; deux ev sont isomorphes ⇔ ils ont même dimension ; la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- ↪ Dans *Gourdon Analyse* : la dimension de l'espace des solutions d'une EDL.

II - Rang et applications linéaires

1) Définitions et théorème du rang

- ↪ Dans *Grifone* : la définition du rang d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs, d'une matrice ; la rang de f est la rang de sa matrice ; deux matrices semblables ont même rang.
- ↪ Dans *Debeaumarché 4* : le rang est invariant par composition par un isomorphisme.
- ↪ Dans *Grifone* : le théorème du rang ; si p est un projecteur, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
- ↪ Dans *Debeaumarché 4* : les noyaux itérés.
- ↪ Dans *Grifone* : l'équivalence en dimension finie entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
- ↪ Dans *Debeaumarché 4* : les polynômes interpolateurs de Lagrange.
- ↪ Dans *Madère* : $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$.

2) Caractérisation et calcul effectif du rang

- ↪ Dans *Gourdon Algèbre* : une matrice de rang r est équivalente à J_r, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t A$, deux matrices sont équivalentes ⇔ elles ont même rang ; le rang d'une matrice est la taille du plus grand sous-déterminant non-nul ; les opérations élémentaires n'affectent pas le rang, application au calcul du rang d'une matrice.
- ↪ Dans *Nourdin* : la résolution des systèmes linéaires, avec Cramer...

3) Formes linéaires

- ↪ Dans *Grifone* : la définition d'une forme linéaire, du dual ; l'exemple de la différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- ↪ Dans *Gourdon Analyse* : $\boxed{\text{le théorème des extréma liés}}$.
- ↪ Dans *Grifone* : le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan, $\dim \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \operatorname{tr} A = 0\} = n^2 - 1$; en dimension finie, E et son dual sont isomorphes ; la définition de la base duale, un exemple ; le bidual E^{**} est canoniquement isomorphe à E.

III - Extension de corps et dimension

- ↪ Dans *Gozard* : la définition d'une extension de corps, du degré de l'extension, des exemples ; le théorème de la base téléscopique, la multiplicativité du degré ; la définition d'un élément algébrique, du polynôme minimal ; $a \in K$ est algébrique sur $k \Leftrightarrow k[a]$ est de dimension finie, elle-même égale au degré du polynôme minimal, un exemple.

Références :

- Grifone (Algèbre linéaire)
- Debeaumarché (Manuel de mathématiques, Tome 4)
- Gourdon (Algèbre et Analyse)
- Madère (Leçons d'algèbre)
- Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)
- Gozard (Théorie de Galois)

152 - Déterminant. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n < \infty$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

I - Définitions du déterminant

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : la définition d'une forme p-linéaire, de l'ensemble $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$, d'une forme alternée, antisymétrique ; f antisymétrique $\Leftrightarrow \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}\right) = \epsilon(\sigma) f\left(x_1, \dots, x_p\right) \Leftrightarrow f$ est alternée ; les formes n-linéaires alternées font une droite vectorielle et $\det_{\mathcal{B}}(x, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$; la remarque sur le changement de base ; la CNS pour qu'une famille soit liée ; l'exemple de $f_u : x \mapsto \sum_{i=1}^n f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, u\left(x_i\right), x_{i+1}, \dots, x_n\right)$ et $f_u = \mathrm{tr}(u) f$.

2) Déterminant d'un endomorphisme

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : la définition de $\det \varphi$, c'est indépendant de la base (savoir qu'on utilise le fait que $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}\left(\varphi\left(u_1\right), \dots, \varphi\left(u_n\right)\right)$ est une forme n-linéaire alternée) ; $\det f \circ g = \det f \det g$, $\det \mathrm{Id} = 1$, $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \det f \neq 0$, $(\det f)^{-1} = \det\left(f^{-1}\right)$; ajouter que $\mathrm{SL}(E) \triangleleft \mathrm{GL}(E)$.

3) Déterminant d'une matrice

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : la définition de $\det A$, $\det A = \det {}^{t}A$, $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \Rightarrow \det A = \det f$, $\det AB = \det BA$ et deux matrices semblables ont même déterminant.

II - Calculs de déterminants

1) Déterminants triangulaires par blocs

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det A \det C$; invariance par opérations élémentaires sur les lignes/colonnes ; influence d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ des lignes/colonnes ; ajouter sur un exemple qu'on peut utiliser le pivot de Gauss pour calculer un déterminant.

2) Mineurs et cofacteurs

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : la définition des mineurs, des cofacteurs, de la comatrice ; le principe de développement par rapport à une ligne/colonne qu'on illustre sur un exemple ; la formule de la comatrice et l'application à la formule de l'inverse dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

3) Déterminants particuliers

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : le déterminant de Vandermonde et son application à une famille étagée de polynômes ; le déterminant de Cauchy ; le déterminant circulant et son application à celui composé de $\cos j\theta$, où $j \in [\![1, n]\!]$ et où $\theta \notin \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$.

III - Applications en algèbre et géométrie

1) Systèmes de Cramer

↪ Dans *Grifone* : la définition d'un système de Cramer, le théorème de Cramer et un exemple.

2) Polynôme caractéristique

↪ *Sans référence* : faire remarquer que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre donc se plonge dans son corps de fractions $\mathbb{K}(X)$, et que la formule $\det_{\mathcal{B}}(x, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \dots x_{n,\sigma(n)}$ assure que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]), \det M \in \mathbb{K}[X]$.

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : la définition du polynôme caractéristique ; $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$; le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon, et son application au théorème de Cayley-Hamilton.

3) Résultant

↪ Dans *Szpirglas* : la définition de la matrice de Sylvester, du résultant ; $\mathrm{Res}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \wedge B \notin \mathbb{K}$; l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$; le théorème de Kronecker.

4) Géométrie

↪ Dans *Objectif Agrégation* : l'interprétation du déterminant comme volume d'un parallélépipède.

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : l'inégalité de Hadamard ; la définition d'une matrice de Gram et son application à la distance à un sev.

↪ Dans *Grifone* : la notion de même orientation, l'exemple de l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$.

5) Réciprocité quadratique

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition du symbole de Legendre, $\boxed{\text{le théorème de Frobenius-Zolotarev}}$, et son application à $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

IV - Applications en analyse

1) Régularité du déterminant

↪ Dans *Gourdon Analyse* : le déterminant est polynomial en les coefficients, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$; la différentielle du déterminant.

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ (application de la continuité).

↪ *Sans référence* : deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$ (application de la polynomialité).

2) Changement de variables

↪ Dans *Gourdon Analyse* : la définition du jacobien, l'exemple du passage en polaire, le théorème de changement de variable.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 3* : $\boxed{\text{l'ellipsoïde de John-Loewner}}$.

Références :

- Gourdon (Algèbre, Analyse)
- Grifone (Algèbre linéaire)
- Szpirglas (Algèbre L3)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)

153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Applications à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Polynômes d'endomorphisme

1) Définitions et structure de $\mathbb{K}[u]$

↪ Dans *Gourdon* : la définition de $P(u)$, de $P(A)$; le morphisme d'évaluation en u et la définition de $\mathbb{K}[u]$; remarquer que Ker $P(u)$ et Im $P(u)$ sont stables par u ; le théorème de décomposition des noyaux qu'on applique aux projecteurs et symétries (en caractéristique autre que 2).

2) Polynôme minimal

↪ Dans *Cognet* : la définition du polynôme minimal ; les polynômes annulateurs sont multiples de π_u ; les exemples pour les nilpotents, projecteurs et symétries.

↪ Dans *Gourdon* : les valeurs propres annulent les polynômes annulateurs, l'absence de réciproque ; les valeurs propres de u sont les racines de π_u.

↪ Dans *Cognet* : deux endomorphismes semblables ont même polynôme minimal, l'absence de réciproque ; le lien avec les endomorphismes induits sur les sous-espaces stables et le théorème qui donne la structure de $\mathbb{K}[u]$, sa dimension et sa base canonique ; une remarque sur le théorème chinois.

3) Polynôme caractéristique

↪ Dans *Cognet* : la définition du polynôme caractéristique d'une matrice, puis d'un endomorphisme ; l'exemple des nilpotents et des projecteurs ; les valeurs propres de u sont les racines de χ_u ; sur un corps algébriquement clos, les spectres ne sont jamais vides, ce qui est faux en dimension infinie ; si F est stable par u, le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u.

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de Cayley-Hamilton ; $\pi_u | \chi_u$; si 0 n'est pas racine de χ_u alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

II - Un outil pour la réduction

1) Critères de diagonalisabilité

↪ Dans *Objectif Agrégation* : des CNS de diagonalisabilité, les exemples des projecteurs et symétries ; une CNS de diagonalisabilité sur les corps finis.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 2* : le théorème de Burnside.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : les restrictions d'endomorphismes diagonalisables sont diagonalisables.

2) Critères de trigonalisabilité

↪ Dans *Objectif Agrégation* : des CNS de trigonalisabilité ; sur un corps algébriquement clos, tout le monde il est trigonalisable (youpi !) ; ajouter que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp \circ \operatorname{tr} = \det \circ \exp$ et que les restrictions de trigonalisables sont trigonalisables.

3) Décomposition de Dunford

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{la décomposition de Dunford qui permet de montrer qu'on a des polynômes en } u}$.

↪ Dans *Cognet* : la surjectivité de l'exponentielle sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; ajouter que u est diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(u)$ l'est.

4) Décomposition de Frobenius

↪ Dans *Gourdon* : le morphisme d'évaluation simultanée en u et x, la base de E_x ; $\exists x \in E, \pi_{u,x} = \pi_u$; la définition d'endomorphisme cyclique et de matrice compagnon ; les polynômes caractéristique et minimal d'une matrice compagnon ; le lien entre endomorphisme cyclique et matrice compagnon ; le théorème des invariants de similitude et le théorème de réduction de Frobenius ; plein d'applications (les invariants de similitude caractérisent la relation de similitude, matrices semblables en dimensions 2 et 3, matrices semblables et extensions de corps, une CS de cyclicité avec le commutant).

5) Réduction des endomorphismes normaux

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème de réduction des endomorphismes normaux}}$ et quelques applications.

III - Applications

1) Calculs de puissances et d'inverses

↪ Dans *Méthodix* : le calcul de puissances positives de matrices et le calcul d'inverses.

2) Calcul d'exponentielles

↪ Dans *Méthodix* : la définition de $\exp(A)$, $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$; la décomposition de Dunford de l'exponentielle ; le calcul de $\exp(A)$ (ne pas oublier de faire remarquer que si on doit commencer par calculer la décomposition de Dunford, c'est pas pratique parce que c'est à peu près aussi dur que le calcul direct de l'exponentielle).

↪ Dans *Gourdon Analyse* : l'utilité de l'exponentielle pour les systèmes différentiels.

Références :

- Gourdon (Algèbre, Analyse)
- Cognet (Algèbre linéaire)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 2)
- Merlin (Méthodix Algèbre)

154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, F est un sev de E de dimension r ; $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

I - Sous-espaces stables

1) Définitions et premières propriétés

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'un sous-espace stable (ses), des exemples triviaux comme $\{0\}$, E, Ker et Im ; sur $\mathbb{C}$, on a l'existence d'une droite stable et sur $\mathbb{R}$ l'existence d'une droite ou d'un plan stable ; si $u \circ v = v \circ u$, alors Ker v et Im v sont u-stables.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : si u laisse stable tous les sev de dimension k (où $k \in [\![1, n-1]\!]$), alors u est une homothétie.

↪ Dans *Mansuy* : la détermination des ses de $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)\mathrm{I}_n$.

2) Endomorphismes induits et base adaptée

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition de $u_{|F}$ et $\overline{u}$, le gros lemme avec les matrices, la "réciproque" et la remarque dans le cas où $C = 0$.

↪ Dans *Mansuy* : les endomorphismes laissant stables tous les plans contenant une certaine droite.

↪ Dans *Debeaumarché 4* : les matrices diagonalisables/trigonalisables par blocs.

3) Dualité et sous-espaces stables

↪ Dans *Gourdon* : la définition de $A^\perp$ (c'est un sev de E^*), de ${}^t u$; F est u-stable $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est ${}^t u$-stable.

↪ Dans *Madère* : les ses de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II - Applications à la réduction

1) Premières applications des ses à la réduction

↪ Dans *Objectif Agrégation* : les sep et les sec sont des ses ; l'égalité $\chi_u = \chi_{u_{|F}}\chi_{\overline{u}}$ qui permet de montrer que χ_u est irréductible $\Leftrightarrow$ u n'a pas de ses non-trivial.

↪ Dans *Gourdon* : si $w = uv - vu$ est de rang 1, alors χ_w n'est pas irréductible.

↪ Dans *Mansuy* : si $E = F \oplus G$ avec F et G u-stables, alors $\pi_u = \pi_{u_{|F}} \vee \pi_{u_{|G}}$.

2) Lemme des noyaux et conséquences

↪ Dans *Gourdon* : le lemme des noyaux et son application aux sec.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le lemme des noyaux et la stabilité, avec un contre-exemple ; ajouter que si u est diagonalisable/trigonalisable et que F est u-stable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable/trigonalisable.

↪ Dans *Mansuy* : les ses de $\operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$.

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{la décomposition de Dunford}}$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : l'application au calcul de l'exponentielle (attention à faire la remarque sur la complexité) ; u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(u)$ diagonalisable.

3) Réduction simultanée

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de réduction simultanée, des remarques ; l'application aux sous-groupes abéliens d'exposant fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \Leftrightarrow n = m$; la diagonalisabilité de l'application $\Phi_{U,V} : M \mapsto UM - MV$.

III - Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes semi-simples

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'être semi-simple, diagonalisable $\Rightarrow$ semi-simple $\Leftrightarrow$ π_u est produit d'irréductibles unitaires 2 à 2 distints ; sur $\mathbb{C}$, diagonalisable $\Leftrightarrow$ semi-simple ; les endomorphismes non-nuls nilpotents ne sont pas semi-simples ; u semi-simple et F u-stable $\Rightarrow$ $u_{|F}$ et $\overline{u}$ sont semi-simples, mais la réciproque est fausse.

2) Endomorphismes normaux

↪ Dans *Gourdon* : la définition des endomorphismes normaux, l'exemple des symétriques ; les deux lemmes de stabilité de l'orthogonal ; la réduction dans le cas hermitien ; le lemme dans le cas euclidien en dimension 2 lorsque le spectre est vide ; $\boxed{\text{la réduction des endomorphismes normaux}}$.

3) D'autres endomorphismes remarquables

↪ Dans *X-ENS Algèbre 2* : bouchez un trou avec une collection d'exercices originaux !

IV - Théorie des représentations

↪ Dans *Ulmer* : la définition d'une représentation, du degré ; l'exemple des représentations triviale, par permutation ; la définition d'une sous-représentation, d'une représentation irréductible, l'exemple des représentations de degré 1 ; le théorème de Maschke et le lemme de Schur.

Références :

- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et 2)
- Mansuy (Algèbre liénaire, réduction des endomorphismes)
- Debeaumarché (Manuel de mathématiques, Tome 4)
- Madère (Leçons d'algèbre)
- Ulmer (Théorie des groupes)

155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Cadre : K est un corps, E est un K-ev de dimension $n < \infty$; on procède à l'identification $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(K)$.

I - Définitions et premières propriétés

1) Éléments propres

↪ Dans *Gourdon* : la définition de valeur propre, de vecteur propre, de sous-espace propre ; ajouter que c'est un espace stable, ajouter l'exemple d'une rotation de $\mathbb{R}^2$; les sous-espaces propres sont en somme directe.

2) Polynômes d'endomorphismes et idéal annulateur

↪ Dans *Gourdon* : la définition de polynôme d'endomorphisme, de l'évaluation en un endomorphisme, de l'idéal annulateur, du polynôme minimal ; ajouter les exemples des nilpotents, projecteurs, symétries ; ajouter que Ker $P(f)$ et Im $P(f)$ sont f-stables ; le lemme des noyaux, ajouter son application aux projecteurs et symétries en caractéristique $\neq 2$; les valeurs propres de f sont les racines de π_f.

↪ Dans *Cognet* : sur un corps algébriquement clos, les spectres sont non-vides, du moins en dimension finie (contre-exemple en dimension infinie).

3) Polynôme caractéristique

↪ Dans *Cognet* : la définition du polynôme caractéristique d'une matrice, il est invariant par similitude donc on le définit pour un endomorphisme ; ajouter l'exemple des nilpotents et projecteurs ; les valeurs propres de f sont les racines de χ_f, $\chi_{f|_F} | \chi_f$.

↪ Dans *Gourdon* : la dimension du sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre comme racine de χ_f ; le théorème de Cayley-Hamilton ; ajouter qu'on en déduit $\pi_f | \chi_f$ et $\deg \pi_f \leq n$.

II - Diagonalisabilité

1) Définition et critères de diagonalisabilité

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'endomorphisme et de matrice diagonalisable ; un endomorphisme est diagonalisable $\Leftrightarrow$ sa matrice est diagonalisable ; χ_f scindé à racines simples $\Rightarrow f$ est diagonalisable.

↪ Dans *Gourdon*, *Grifone*, *Objectif Agrégation* : lister un maximum de CNS de diagonalisabilité.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : parler des projecteurs, des symétries, du cas des corps finis.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 2* : le théorème de Burnside.

↪ Dans *Mansuy* : des exemples avec des matrices par blocs.

↪ Dans *Grifone* : un exemple de matrice réelle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : les endomorphismes induits par des endormophismes diagonalisables sont diagonalisables.

2) Conséquences topologiques

↪ Dans *Objectif Agrégation* : introduire les notations $\mathcal{D}_n(K)$, $\mathcal{T}_n(K)$ et $\mathcal{C}_n(K)$, donner les propriétés d'ouverture, d'adhérence dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; l'application à $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{tr}$.

3) Diagonalisation simultanée

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la diagonalisation simultanée pour une famille d'endomorphismes, les remarques sur la commutativité, la somme, la composée ; les exercices sur $M \mapsto UM - MV$ et sur le crochet de Lie.

III - Décomposition de Dunford

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{la décomposition de Dunford}}$.

↪ Dans *Cognet* : la surjectivité de l'exponentielle, f diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(f)$ diagonalisable.

↪ Dans *Gourdon* : le calcul pratique de la décomposition de Dunford, puis de l'exponentielle.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford n'est pas continue.

IV - Théorèmes spectraux

↪ Dans *Gourdon* : la définition des endomorphismes normaux/matrices normales ; rappeler l'exemple des matrices orthogonales/unitaires/symétriques réelles/hermitiennes complexes ; la réduction des endomorphismes normaux quand $K = \mathbb{C}$, l'écriture matricielle ; ajouter un exemple de matrice normale non-diagonalisable sur $\mathbb{R}$; le lemme qui dit qu'une matrice symétrique admet une valeur propre réelle ; $\boxed{\text{la réduction des endomorphismes normaux dans le cas réel}}$, l'application aux matrices symétriques réelles/hermitiennes complexes/anti-symétriques réelles/anti-hermitiennes complexes.

Références :
- Gourdon (Algèbre)
- Cognet (Algèbre linéaire)
- Grifone (Algèbre linéaire)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 2)
- Mansuy, Mneimné (Réduction des endomorphismes)

156 - Exponentielle de matrices. Applications.

Cadre : On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre notée $\|.\|$.

I - Généralités

1) Définitions et premières propriétés

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition de l'exponentielle ; ajouter que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$; $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$ et $A \mapsto \exp(A)$; ajouter l'exemple d'une triangulaire et d'une nilpotente ; $\exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$ et la remarque sur la similitude.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : l'injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$; ajouter un contre-exemple pour les matrices non-diagonalisables $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\exp(A+B)$ quand A et B commutent, pondre un contre-exemple avec $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$; le corollaire sur l'inversibilité de $\exp(A)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Zavidovique* : $\exp : (\mathbb{K}[A], +) \to (\mathbb{K}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), .)$ est un morphisme de groupes.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{tr}$, et l'application $\det\left(\exp\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)\right) \in \mathbb{R}^{+*}$; ajouter la stabilité par la transposée.

2) Calcul de l'exponentielle

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la décomposition de Dunford, l'application à $\exp(D+N)$; faire remarquer que c'est dur en général d'obtenir la décomposition de Dunford de A.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la décomposition de Dunford de $\exp(A)$; A diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(A)$ diagonalisable ; $\exp(A) = \mathrm{I}_n \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \subset 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\exp(tM) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{-*}$, la réduction de Jordan ; ajouter que c'est cool Jordan parce qu'on a facilement l'exponentielle d'une diagonale par blocs.

II - Propriétés de la fonction exponentielle

1) Différentiabilité

- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la différentielle de l'exponentielle (la version facile avec les limites et sans le crochet de Lie), exp est $\mathcal{C}^1$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mneimné, Testard* : $\mathrm{D}(\exp)(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donc exp réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un voisinage de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.
- $\hookrightarrow$ Dans *Szpirglas* : la dérivée de $t \mapsto \exp(tM)$; la définition du logarithme sur $\mathcal{B}(\mathrm{I}_n, 1)$; $\forall M \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_n, 1), \exp(\log(M)) = M$; l'extension de la définition aux unipotentes ; l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{U}$ d'inverse log.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : $\boxed{\text{l'homéomorphisme } \exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$, le corollaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{\text{l'étude de } \mathrm{O}(p,q)}$.

2) Surjectivité

- $\hookrightarrow$ *On rappelle que l'exponentielle n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dès que $n \geq 2$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dès que $n \geq 1$.*
- $\hookrightarrow$ Dans *Zavidovique* : $\boxed{\text{la surjectivité de } \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$; $\exp\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \left\{A^2 \middle| A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\forall p \geq 2, \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A = B^p$, le contre-exemple quand $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe (par arcs).
- $\hookrightarrow$ Dans *Szpirglas* : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective, non-injective.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : l'exercice sur l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

III - Applications

1) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

- $\hookrightarrow$ Dans *Szpirglas* : la solution de $Y' = MY$ avec $Y(t_0) = Y_0$; la définition de la stabilité (asymptotique) et la caractérisation de la stabilité (asymptotique) par les valeurs propres.

2) Groupes à un paramètre

- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : les exercices sur les morphismes de groupes entre $\mathbb{R}$ et un ensemble de matrices.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Oraux X-ENS (Algèbre 2)
- Zavidovique (Un max de maths)
- Objectif Agrégation
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Mneimné, Testard (Groupes de Lie classiques)
- Szpirglas (Algèbre L3)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)

157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\overline{\mathbb{K}}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

I - Endomorphismes trigonalisables

1) Définition et caractérisations

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable ; la remarque u trigonalisable $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(E)$ trigonalisable.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : u trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow \pi_u$ scindé sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0$; si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, c'est la fête ; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\mathbb{C}$-trigonalisable mais pas $\mathbb{R}$-trigonalisable.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : en caractéristique 0, $\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : ajouter que $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A))$ si $\mathbb{K}$ algébriquement clos, et le contre-exemple dans $\mathbb{R}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\overline{\mathbb{K}}}(A)} \lambda$, $\det A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\overline{\mathbb{K}}}(A)} \lambda$; Cayley-Hamilton.

2) Trigonalisation simultanée

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : si u et v commutent, les sous-espaces propres de u et $\operatorname{Im} u$ sont v-stables ; le théorème de trigonalisation simultanée de $(f_i)_{i \in I}$; ajouter $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont simultanément trigonalisables sans commuter.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : somme et composée de trigonalisables qui commutent sont trigonalisables ; ajouter $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui sont trigonalisables mais pas simultanément trigonalisables ; l'application $\Phi_{U,V} : M \mapsto UM - MV$ est trigonalisable $\Leftrightarrow U$ et V le sont.

3) Propriétés topologiques

- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; définition de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$; $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \overline{\mathcal{C}_n(\mathbb{K})}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; mais $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; en déduire une nouvelle démonstration de Cayley-Hamilton.

II - Endomorphismes nilpotents

1) Définition et caractérisations

- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'un nilpotent, de l'ensemble $\mathcal{N}$, exemples d'une matrice nilpotente et de la dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$, définition de l'indice de nilpotence ; u est p-nilpotent $\Rightarrow \pi_u = X^p$ (et par CH : $n \geq p$) et $\Rightarrow \exists x \in E, \left(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\right)$ famille libre ; u nilpotent $\Leftrightarrow \chi_u = (-1)^n X^n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, \pi_u = X^p \Leftrightarrow u \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$; le contre-exemple d'une matrice à spectre nul non-trigonalisable donc non-nilpotente ; en caractéristique 0, u nilpotent $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}\left(u^k\right) = 0$; ajouter le contre-exemple de I_p en caractéristique $p > 0$.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 2* : $\boxed{\text{le théorème de Burnside}}$.

2) Nature de $\mathcal{N}$

- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : $\mathcal{N}$ est instable par addition car I_2 non-nilpotente ; $\mathcal{N}$ est stable par multiplication scalaire donc c'est un cône ; l'exemple en dimension 2 (faire un dessin) ; la somme de deux nilpotents qui commutent est nilpotente ; si f commute avec u nilpotent, alors $u \circ f$ nilpotent ; $\operatorname{Vect} \mathcal{N} = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.

III - Applications à la réduction

1) Réduction selon les sous-espaces caractéristiques

- $\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la définition des sous-espaces caractéristiques, la conséquence du lemme des noyaux, les sec sont stables par u ; le théorème de réduction selon les sec, avec un exemple ; application au calcul de puissance matricielle.

2) Décomposition de Dunford

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{la décomposition de Dunford via les projecteurs spectraux}}$, le calcul effectif ; application au calcul d'exponentielle matricielle via les projecteurs spectraux.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la surjectivité de l'exponentielle sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (si on a le temps de regarder la démonstration avant de passer, c'est pas évident) ; la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford n'est pas continue en M sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3) Réduction de Jordan des nilpotents

- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'un bloc de Jordan, la proposition sur les nilpotents et les blocs de Jordan, le théorème de réduction de Jordan des nilpotents, l'exemple de deux matrices non-semblables, l'existence de la décomposition de Jordan des trigonalisables.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Objectif Agrégation
- Grifone (Algèbre linéaire)
- Oraux X-ENS (Algèbre 2)

158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Généralités

1) Définitions et premières propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une matrice symétrique/antisymétrique/hermitienne, les notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$; ajouter des exemples, ce qu'on peut dire des coefficients diagonaux, l'exemple de la hessienne d'une fonction $\mathcal{C}^2$; la définition d'une matrice symétrique/hermitienne (définie) positive, leurs valeurs propres ; la dimension des $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les sommes directes $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas un $\mathbb{C}$-ev mais un $\mathbb{R}$-ev de dimension n^2.

2) Lien avec les endomorphismes, les formes bilinéaires symétriques ou hermitiennes

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une forme bilinéaire symétrique/sesquilinéaire hermitienne, l'exemple de $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$; l'écriture matricielle et l'isomorphisme $\varphi \mapsto \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)$; le lien avec les matrices symétriques/hermitiennes, le changement de base ; la définition d'une forme quadratique/hermitienne, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(q)$, des exemples.

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la définition de l'adjoint dans le cas euclidien/hermitien, sa matrice, des endomorphismes autoadjoints.

II - Réduction et applications

1) Théorèmes spectraux

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : les théorèmes de réduction dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, dans $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$; la définition d'un endomorphisme normal, leur réduction.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 3* : la caractérisation de Sylvester des matrices symétriques définies positives ; la pseudo-réduction simultanée, la convexité logarithmique du déterminant, l'ellipsoïde de John-Loewner, la racine carrée positive d'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Conséquences sur les formes quadratiques et hermitiennes

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : le théorème d'inertie de Sylvester sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, la définition de la signature ; le lien entre la signature et les matrices définies positives/négatives ; l'exemple du déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 3* : la conséquence de la réduction simultanée pour les formes quadratiques.

3) Décomposition polaire

$\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : la décomposition polaire dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$; $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\,({}^{\mathrm{t}}AA)}$, même pour $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; le corollaire pour la maximalité de $\mathrm{O}(n)$; $\boxed{\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un homéomorphisme et on a l'homéomorphisme } \mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}}$, $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est aussi un homéomorphisme.

III - Applications en analyse

1) Problèmes d'extremums

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le théorème sur la différentielle seconde et les extremums, des contre-exemples ; l'application à la recherche des extremums de $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.

2) Étude locale de surfaces

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : $\boxed{\text{la réduction des formes quadratiques (version différentiable) et le lemme de Morse}}$.

3) Résolution de systèmes linéaires

$\hookrightarrow$ Dans *Hiriart-Urruty* : l'inégalité de Kantorovitch, le gradient à pas optimal.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Grifone (Algèbre linéaire)
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Hiriart-Urruty (Optimisation et analyse convexe)

159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Cadre : K est un corps et E un K-ev de dimension $n < \infty$.

I - Généralités

1) Formes linéaires

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une forme linéaire, du dual, la notation E^* ; des exemples comme $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ ou $Df(a)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 1* : $\boxed{\text{l'isomorphisme entre } \mathcal{M}_n(K) \text{ et son dual, la première application}}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : une forme linéaire est soit nulle soit surjective ; le théorème de représentation de Riesz, qui donne $E \simeq E^*$ quand $K = \mathbb{R}$; la définition du vecteur gradient ; le théorème de Hahn-Banach géométrique.

2) Hyperplans

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un hyperplan par sa dimension ; les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non-nulles.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 1* : $\boxed{\text{tout hyperplan de } \mathcal{M}_n(K) \text{ rencontre } \mathrm{GL}_n(K)}$; les endomorphismes stabilisant tous les hyperplans sont les homothétie ; ajouter une interprétation géométrique de Hahn-Banach géométrique avec les hyperplans.

II - Dualité

1) Bases duales

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition de la forme linéaire coordonnée ; ajouter l'exemple de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$; le théorème de la base duale qui implique de façon plus générale qu'avant que $E \simeq E^*$; ajouter l'exemple de la base duale canonique de $\mathbb{R}^2$, la méthode d'obtention par inversion de matrice et un exemple ; le polynôme interpolateur de Lagrange et l'équivalence φ surjective $\Leftrightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_p$ linéairement indépendantes.

2) Bidual et bases antéduales

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition du bidual, l'isomorphisme canonique entre E et E^{**}, l'identification ; la définition de la base antéduale, un exemple.

III - Application transposée et orthogonalité

1) Orthogonalité au sens des formes linéaires

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un élément orthogonal à une forme, ajouter l'exemple de e_i et e_j^* ; la définition de l'orthogonal à une partie, $\{\varphi\}^\circ = \mathrm{Ker}\varphi$; quelques propriétés triviales, puis $F^{\perp\circ} = F$ et $G^{\circ\perp} = G$; en conséquence $F = E \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$ en dimension finie ; l'application aux équations des sev ; l'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur un hyperplan est une droite de E^*.
- $\hookrightarrow$ *Sans référence* : dans un ev euclidien, on a le théorème de représentation de Riesz, et l'orthogonalité au sens des formes linéaires coïncide avec l'orthogonalité au sens du produit scalaire.

2) Application transposée

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition de l'application transposée, l'écriture matricielle ; les propriétés autour du rang, de l'image, du noyau, de la composée ; F est u-stable $\Leftrightarrow F^\perp$ est ${}^t u$-stable ; ajouter que ça s'applique à des démonstrations par récurrence sur la dimension, comme pour f trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_f$ scindé ou la trigonalisation simultanée.
- $\hookrightarrow$ *Sans référence* : dans un ev euclidien, la transposée coïncide avec l'adjoint.

IV - Formes linéaires en analyse

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème des extrémas liés}}$ et son interprétation géométrique.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la diagonalisation des endomorphismes symétriques.
- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : l'inégalité d'Hadamard sur le déterminant et son interprétation géométrique.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1)
- Objectif Agrégation
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Cadre : E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n < \infty$, muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$, de norme associée $\|.\|$.

I - Adjoint d'un endomorphisme

1) Définitions et propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la propriété d'existence et d'unicité de l'adjoint, l'interprétation de la transposée d'une matrice, l'application qui dit que ${}^{t}AA = 0 \Rightarrow A = 0$; les propriétés de l'adjoint avec les opérations, le rang, le déterminant, le noyau et l'image ; si F est un sev stable par f alors $F^{\perp}$ est stable par f^{*}.

2) Vocabulaire

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la définition d'un endomorphisme auto-adjoint/symétrique (ajouter en remarque la définition d'un antisymétrique), le lien matriciel, l'exemple des projecteurs orthogonaux ; la définition d'un endomorphisme orthogonal/isométrie, le lien matriciel, l'exemple des symétries orthogonales ; la définition d'un endomorphisme normal, le lien matriciel, l'exemple des endomorphismes auto-adjoints, orthogonaux, construire un exemple d'endomorphisme normal ni orthogonal, ni auto-adjoint, à partir du théorème de réduction des endomorphismes normaux.

II - Endomorphismes auto-adjoints

1) Quelques propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un endomorphisme auto-adjoint positif (resp. défini positif), de l'ensemble $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) ; cela implique que le spectre est dans $\mathbb{R}^{+}$ (resp. $\mathbb{R}^{+*}$) ; si f est auto-adjoint, alors F est un sev f-stable $\Rightarrow F^{\perp}$ est f-stable.

2) Réduction des endomorphismes auto-adjoints

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème spectral et sa version matricielle ; si f est auto-adjoint, alors f est positif (resp. défini positif) $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+}$ (resp. $\mathbb{R}^{+*}$) ; en corollaires : la réduction des formes quadratiques, et le théorème de pseudo-réduction simultanée.

3) Applications

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 3* : la stricte convexité logarithmique du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{l'ellipsoïde de John-Loewner}}$, l'existence et l'unicité de la racine carrée symétrique positive d'un endomorphisme auto-adjoint positif, la décomposition polaire des matrices inversibles et l'inégalité de Hadamard.

III - Endomorphismes normaux

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : si u est normal, alors $\|u(x)\| = \|u^{*}(x)\|$ et si E_{λ} est un sous-espace propre de u alors $E_{\lambda}^{\perp}$ est u-stable ; le lemme de réduction des endomorphismes normaux en dimension 2 à spectre vide ; $\boxed{\text{le théorème de réduction des endomorphismes normaux}}$; en remarque, on retrouve le théorème spectral et ça s'applique aux endomorphismes orthogonaux ; en exemple, la réduction des endomorphismes antisymétriques.

IV - Endomorphismes orthogonaux

1) Quelques propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : les différentes définitions équivalentes, les propositions sur les valeurs propres, le déterminant, les bases ON sont envoyées sur des bases ON.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : si F est stable par u orthogonal, alors $F^{\perp}$ aussi ; la définition de $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}(E) \triangleright \mathrm{O}(E)$; une remarque pour définir $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; le théorème de réduction.

2) Étude en dimensions 2 et 3

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la forme des matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, et des dessins ; l'application du théorème de réduction en dimension 3, la caractérisation géométrique par la trace et le déterminant ; obtention de l'axe et de l'angle sur un exemple.

3) Topologie du groupe orthogonal et applications

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 3* : la décomposition polaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^{t}AA\right)}$, la maximalité du groupe orthogonal parmi les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs et homéomorphes à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Références :

- Grifone (Algèbre linéaire)
- Gourdon (Algèbre)
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Audin (Géométrie)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)

161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

Cadre : $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ et de direction E.

I - Généralités

1) Définitions

- $\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la définition d'une application affine, cela ne dépend pas du point de base.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition d'une isométrie.
- $\hookrightarrow$ Dans *Audin* : les exemples des translations, homothéties.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : une application affine est une isométrie $\Leftrightarrow$ sa partie linéaire est orthogonale ; les isométries sont bijectives donc $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) < \mathrm{GA}(\mathcal{E})$; les définitions de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Isom}^-(\mathcal{E})$; le stabilisateur d'un point dans $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ est isomorphe à $\mathrm{O}(E)$.

2) Exemples et propriétés

- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : l'unicité de la décomposition en translation et isométrie conservant un point, on peut y ajouter la commutativité et $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,(L(f) - \mathrm{Id}_E)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la définition d'une symétrie (affine) orthogonale, d'une réflexion.
- $\hookrightarrow$ Dans *Combes* : la définition d'une symétrie glissée.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : une isométrie est entièrement déterminée par l'image de $(n+1)$ points ; les applications aux déplacements et antidéplacements, aux triangles isométriques.

II - Étude de $\mathrm{O}(E)$

- $\hookrightarrow$ Dans *Audin* : on a l'isomorphisme $\mathrm{O}(E) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact ; pour $f \in \mathrm{O}(E)$, F f-stable $\Rightarrow F^\perp$ f-stable ; la réduction des endomorphismes orthogonaux, sa version matricielle ; $\mathrm{SO}(E)$ est connexe par arcs.
- $\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : la définition d'un renversement, retrouver celle d'une réflexion ($\dim E^- = 1$) ; les générateurs de $\mathrm{O}(E)$ et de $\mathrm{SO}(E)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Audin* : toute isométrie de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme composée de p réflexions avec $p \leq n+1$.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : $\boxed{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ est compact connexe et c'est un groupe simple}}$; la décomposition polaire, application à la norme 2 ; la maximalité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

III - Classification des isométries du plan et de l'espace

1) En dimension 2

- $\hookrightarrow$ Dans *Combes* et *Audin* : le tableau de classification selon les ensembles invariants, avec la matrice, un dessin, et dire si c'est un déplacement ou un antidéplacement.

2) En dimension 3

- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition du vissage, de la rotation axiale, de la rotation-symétrie.
- $\hookrightarrow$ Dans *Combes* : faire un peu comme en dimension 2, ne pas oublier de faire quelques dessins.

IV - Groupe d'isométries préservant une partie du plan ou de l'espace

1) Définition

- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition de $\mathrm{Isom}(P)$, c'est un groupe ; la relation entre $\mathrm{Isom}^+(P)$ et $\mathrm{Isom}^-(P)$.

2) Polygones réguliers (dimension 2)

- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : le lien entre polygone inscrit dans un cercle à côtés égaux et rotations, la définition de polygone régulier ; $\mathrm{Isom}^+(P_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on en déduit $\mathrm{Isom}^-(P_n)$; $\mathrm{Isom}\,(P_n)$ est appelé groupe diédral d'indice n, noté $\mathcal{D}_n$, d'ordre $2n$, engendré par r et s ; l'isomorphisme $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathcal{D}_3$.

3) Cube et tétraèdre (dimension 2)

- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition de $\mathrm{Isom}\,(\mathrm{C}_6)$; faces, arêtes, sommets sont conservés par une isométrie.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : $\boxed{\mathrm{Isom}^+(\mathrm{C}_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \text{ et } \mathrm{Isom}\,(\mathrm{C}_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : le dénombrement des déplacements et antidéplacements ; la définition de $\mathrm{Isom}\,(\Delta_4)$.
- $\hookrightarrow$ Dans *H2G2* : $\boxed{\mathrm{Isom}\,(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4 \text{ et } \mathrm{Isom}^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : le dénombrement des déplacements et antidéplacements.

Références :

- Audin (Géométrie)
- Mercier (Cours de géométrie)
- Combes (Algèbre et géométrie)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)

170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n < \infty$.

I - Généralités

1) Définitions et premières propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une forme bilinéaire (symétrique), d'une forme quadratique, un exemple dans $\mathbb{R}^3$, dans $\mathbb{C}^3$; l'unicité de la forme polaire associée à q (parler d'isomorphisme), identités de polarisation, revenir aux exemples précédents, l'exemple de $\operatorname{tr}({}^tAA)$.

2) Expressions matricielles

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : l'écriture matricielle d'une forme bilinéaire (symétrique) ; ajouter une remarque sur la dimension de l'espace des formes quadratiques ; le changement de base, la définition de la matrice de q dans une base ; le retour aux exemples précédents.

3) Rang et noyau d'une forme quadratique

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : une grosse définition avec le rang et le noyau d'une forme quadratique, les formes définies, (non-)dégénérées ; l'implication "définie $\Rightarrow$ non-dégénérée" ; l'exemple fourni dans le livre ; la propriété $\dim E = \dim N(q) + \operatorname{rg} q$.

II - Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : une grosse définition ($x \perp y$, $A^\perp$, $A \perp B$) et une grosse proposition ($A^\perp$ est un sev, $F \subset F^{\perp\perp}$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ et $E^\perp = \operatorname{Ker} q$) ; la définition d'une base q-orthogonale, remarquer que dans cette base, la matrice de q est diagonale, le théorème d'existence en dimension finie ; quand E est de dimension finie et F un sev, on a : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker} q)$ et $F^{\perp\perp} = F + \operatorname{Ker} q$.

2) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : dire qu'on veut étudier les endomorphismes de E qui préservent q ; la définition/proposition sur l'adjoint f^*, l'écriture matricielle et un exemple en dimension 2 ; la définition d'un endomorphisme orthogonal, du groupe orthogonal (et la caractérisation matricielle) ; l'exemple de $\mathrm{O}(q)$ quand $q(x, y) = 2xy$.

3) Bases orthogonales et pseudo-réduction simultanée

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 3* : le théorème de pseudo-réduction simultanée (et son interprétation en termes de bases orthogonales), $\boxed{\text{la convexité logarithmique du déterminant sur } \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$ et $\boxed{\text{l'ellipsoïde de John-Loewner}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la méthode de Gauss, un exemple, préciser que ça permet de construire des bases q-orthogonales.

4) Isotropie

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : la définition du cône isotrope, exemples et dessins ; $\operatorname{Ker} q \subset I(q)$; la définition de sev isotrope, le résultat d'existence ; si F n'est pas isotrope $E = F \oplus F^\perp$; la définition de sev totalement isotrope, les caractérisations équivalentes, un exemple.

III - Classification des formes quadratiques

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : expliquer ce que signifie classifier, définir la relation d'équivalence associée.

$\hookrightarrow$ Dans *Grifone* : le théorème de classification sur un corps algébriquement clos, le corollaire sur l'existence d'une base q-orthonormée, le fait que toutes les formes quadratiques non-dégénérées sont équivalentes ; le théorème de classification sur $\mathbb{R}$ (Sylvester), la caractérisation des formes définies/non-dégénérées via la signature, il y a $(n+1)$ classes d'équivalence de formes quadratiques non-dégénérées, ajouter la signature du déterminant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ Dans *Perrin* : le théorème de classification sur $\mathbb{F}_q$.

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : ajouter des exemples.

IV - Applications en géométrie différentielle

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la définition de la hessienne, le théorème de Schwarz qui en fait une forme bilinéaire symétrique à laquelle on associe une forme quadratique ; le théorème sur les extrema locaux, un exemple d'application ; finir avec $\boxed{\text{le lemme de Morse précédé de son lemme préliminaire}}$.

Références :

- Gourdon (Algèbre)
- Grifone (Algèbre linéaire)
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Cadre : E est un $\mathbb{R}$-ev.

I - Formes quadratiques et algèbre bilinéaire

1) Définitions et premières propriétés

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une forme bilinéaire (symétrique), d'une forme quadratique, un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

↪ Dans *Grifone* : un exemple dans $\mathbb{R}[X]$.

↪ Dans *Gourdon* : l'unicité de la forme polaire associée à q, identités de polarisation, l'exemple de $\mathrm{tr}\left({}^tAA\right)$; l'écriture matricielle de φ en dimension finie, la définition de la matrice de q dans une base, le changement de base, la bonne définition de $\mathrm{rg}(\varphi)$ et de $\mathrm{rg}(q)$, le retour à l'exemple précédent ; la définition du noyau de q, de la (non-)dégénérescence, $\det M \neq 0 \Leftrightarrow q$ est non-dégénérée.

2) Formes quadratiques positives, définies positives

↪ Dans *Gourdon* : la définition des formes quadratiques définies, positives, définies positives ; un exemple de forme quadratique positive non-définie ; la proposition qui dit définie $\Rightarrow$ non-dégénérée et un contre-exemple ; les inégalités de Schwarz et Minkowski.

II - Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

↪ Dans *Gourdon* : une grosse définition ($x \perp y$, $A^\perp$, $A \perp B$) et une grosse proposition ($A^\perp$ est un sev, $F \subset F^{\perp\perp}$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ et $E^\perp = \mathrm{Ker}\, q$) ; la définition d'une base q-orthogonale, remarquer que dans cette base, la matrice de q est diagonale, le théorème d'existence en dimension finie ; quand E est de dimension finie et F un sev, on a : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{Ker}\, q)$ et $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}\, q$.

2) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique

↪ Dans *Grifone* : dire qu'on veut étudier les endomorphismes de E qui préservent q ; la définition/proposition sur l'adjoint f^*, l'écriture matricielle et un exemple en dimension 2 ; la définition d'un endomorphisme orthogonal, du groupe orthogonal (et la caractérisation matricielle) ; l'exemple de $\mathrm{O}(q)$ quand $q(x, y) = 2xy$.

3) Isotropie

↪ Dans *Grifone* : la définition du cône isotrope, exemples et dessins ; $\mathrm{Ker}\, q \subset I(q)$; la définition de sev isotrope, le résultat d'existence ; si F n'est pas isotrope $E = F \oplus F^\perp$; la définition de sev totalement isotrope, les caractérisations équivalentes, un exemple.

III - Réduction des formes quadratiques

1) Pseudo-réduction simultanée

↪ Dans *X-ENS Algèbre 3* : le théorème de pseudo-réduction simultanée, $\boxed{\text{la convexité logarithmique du déterminant sur } \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$ et $\boxed{\text{l'ellipsoïde de John-Loewner}}$.

2) Théorème d'inertie de Sylvester

↪ Dans *Grifone* : la méthode de Gauss, un exemple, préciser que ça permet de construire des bases q-orthogonales ; le théorème d'inertie de Sylvester ; la définition de la signature, retour à l'exemple précédent, une remarque sur la signature des formes définie positive/négative ou non-dégénérée.

IV - Applications à la géométrie

1) Classification euclidienne des coniques

↪ Dans *Grifone* : la définition d'une conique ; la disjonction de cas avec la forme quadratique associée et la mise de l'équation sous forme canonique.

2) Géométrie différentielle

↪ Dans *Rouvière* : la définition de la hessienne, le théorème de Schwarz qui en fait une forme bilinéaire symétrique à laquelle on associe une forme quadratique ; le théorème sur les extrema locaux, un exemple d'application ; finir avec $\boxed{\text{le lemme de Morse précédé de son lemme préliminaire}}$.

Références :
- Gourdon (Algèbre)
- Grifone (Algèbre linéaire)
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

180 - Coniques. Applications.

Cadre : $\mathcal{E}$ est un plan affine réel de direction E.

I - Coniques affines

1) Définitions

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la définition d'une conique comme lieu d'annulation d'une quadrique affine, des petits exemples ; la décomposition $f(M) = q\left(\overrightarrow{OM}\right) + L_O\left(\overrightarrow{OM}\right) + c_O$; la définition de la quadrique homogénéisée, d'une conique propre/dégénérée, des exemples.

2) Réduction de l'équation d'une conique et classification

$\hookrightarrow$ Dans *Ladegaillerie* : les équations réduites des coniques affines réelles, la classification, la terminologie et des dessins.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la définition du centre, une remarque sur la symétrie ; la définition d'une conique à centre, les exemples de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole, ou de $\left\{x^2 = 0\right\}$.

3) Tracé des coniques

$\hookrightarrow$ Dans *Ladegaillerie* : dire que ça ne pose pas de problème pour les paraboles ou pour les coniques dégénérées ; donner quelques explications pour l'ellipse ou l'hyperbole ; l'exemple de $x^2 + 2xy - y^2 - 4x = 0$.

II - Construction des coniques "ordinaires" dans un plan affine euclidien

$\hookrightarrow$ Dans cette partie, on munit $\mathcal{E}$ d'un produit scalaire euclidien et on n'utilisera que des repères orthonormés (sauf mention contraire) ; expliquer comment on peut adapter la classification affine pour obtenir la classification euclidienne.

1) Définition monofocale

$\hookrightarrow$ Dans *Ladegaillerie* : adapter le théorème de génération monofocale en "Soit $F \in \mathcal{E}$, Δ une droite de $\mathcal{E}$ avec $F \notin \Delta$, $e \in \mathbb{R}^{+*}$; on note $\Gamma = \{M \in \mathcal{E} | MF = e\mathrm{d}(M, \Delta)\}$; si $e = 1$, Γ est une parabole ; si $e < 1$, Γ est une ellipse non-circulaire ; si $e > 1$, Γ est une hyperbole ; en faisant varier le couple (F, Δ) on obtient toutes les paraboles, ellipses non-circulaires et hyperboles" ; mettre une grosse définition avec conique "ordinaire", excentricité, foyer, directrice, axe focal, $h = \mathrm{d}(F, \Delta)$, paramètre.

$\hookrightarrow$ Dans *Debeaumarché 1* : l'équation polaire des coniques ordinaires et une remarque sur le domaine de définition.

2) Parabole

$\hookrightarrow$ Dans *Debeaumarché 1* : l'équation cartésienne dans le bon repère, les coordonnées du foyer, l'équation de la directrice, la construction à la règle et au compas.

3) Ellipse non-circulaire

$\hookrightarrow$ Dans *Debeaumarché 1* : l'équation cartésienne dans le bon repère, la paramétrisation, l'existence d'un second foyer et d'une seconde directrice, la définition du demi-grand axe, du demi-petit axe ; les coordonnées des foyers, les équations des directrices ; la définition bifocale et la construction d'une ellipse dans un jardin.

4) Hyperbole

$\hookrightarrow$ Dans *Debeaumarché 1* : l'équation cartésienne dans le bon repère, la paramétrisation, l'existence d'un second foyer et d'une seconde directrice, la définition des axes et sommets ; les coordonnées des foyers, les équations des directrices ; la définition bifocale et la construction d'un segment d'hyperbole dans un jardin ; l'équation dans le repère des asymptotes.

III - Propriétés géométriques et des coniques et applications

1) Tangentes des coniques "ordinaires"

$\hookrightarrow$ Dans *Ladegaillerie* : l'équation de la tangente à une conique en un point.

$\hookrightarrow$ Dans *Debeaumarché 1* : la tangente à une parabole, les applications aux antennes paraboliques et au four solaire ; la tangente à une ellipse, l'application aux rayons lumineux ; la tangente à une hyperbole.

$\hookrightarrow$ Dans *Ladegaillerie* : le lemme de Poncelet.

$\hookrightarrow$ Dans *CAPES 2011* : $\boxed{\text{l'ellipse de Steiner}}$.

2) Intersections

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : $\boxed{\text{le théorème de Bézout}}$; ajouter des exemples et des contre-exemples.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : les intersections entre droites et coniques.

3) Lois de Kepler

$\hookrightarrow$ Dans *Debeaumarché 1* : la définition d'un mouvement à accélération centrale, la trajectoire sous accélération newtonienne, l'application aux 3 lois de Kepler.

Références :

– Audin (Géométrie)
– Ladegaillerie (Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique)
– Debeaumarché (Manuel de mathématiques, tome 1)
– Mercier, Rombaldi (Annales du CAPES 2009 à 2011)

181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Cadre : $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension $n < \infty$.

I - Barycentres

1) Définitions et premières propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition d'un système de points pondérés, la fonction de Leibniz (qui est constante ou bijective) ; la définition du barycentre, il est homogène, commutatif, associatif ; la définition de l'isobarycentre, on parle du centre de gravité d'un triangle, de l'isobarycentre d'un parallélogramme et de celui d'un tétraèdre.

2) Lien entre sous-espaces affines et barycentration

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition de sous-espace affine engendré, l'exemple de la droite, du plan ; les sous-espaces affines sont les parties stables par barycentration.

3) Repérage

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition (avce les conditions équivalentes) d'un système affinement libre ; la définition d'un repère affine, le lien avec les bases d'espaces vectoriels ; la définition des coordonnées barycentriques, l'unicité du système de coordonnées barycentriques normalisé, un contre-exemple quand on ne se place pas dans un repère affine.

4) Interprétation en termes d'aires

$\hookrightarrow$ Dans *Truffault* : la définition d'aire algébrique, avec un dessin ; le lien avec les coordonnées barycentriques d'un point du plan ; les applications aux centres des cercles incrit et circonscrit.

5) Applications des barycentres

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : la définition d'une application affine, le lien avec la conservation du barycentre.

$\hookrightarrow$ Dans *Truffault* : les théorèmes de Ménélaüs et Céva.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : le théorème de Lucas (qu'on réinterprète en termes de barycentres à coefficients positifs).

$\hookrightarrow$ Dans *CAPES11* : $\boxed{\text{l'ellipse de Steiner}}$.

II - Convexité

1) Définitions et exemples

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition d'une combinaison convexe, d'une partie étoilée, d'une partie convexe ; tout un tas d'exemples.

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : l'image directe et l'image réciproque d'un convexe par une application affine sont convexes.

2) Enveloppe convexe

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition de l'enveloppe convexe, rappeler le théorème de Lucas ; ajouter que c'est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points considérés ; quelques propriétés sur les enveloppes convexes ; un exemple de partie fermée dont l'enveloppe convexe n'est pas fermée ; le théorème de Carathéodory et son corollaire.

3) Points extrémaux

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition de point extrémal, les points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$; la propriété sur les points extrémaux (on reste convexe quand on les enlève, etc.), le théorème de Krein-Milman.

4) Applications de la convexité

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : le théorème de Hahn-Banach et son contre-exemple ; la définition d'hyperplans qui séparent (strictement) et la reformulation de Hahn-Banach en ces termes.

$\hookrightarrow$ Dans *Alessandri* : $\boxed{\text{les sous-groupes compacts de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.

Références :

- Mercier (Cours de géométrie)
- Truffault (Géométrie élémentaire)
- Tauvel (Géométrie)
- Mercier, Rombaldi (Annales du CAPES 2009-2011)
- Alessandri (Thèmes de géométrie)

182 - Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

I - Géométrie euclidienne

1) Définitions et quelques propriétés

$\hookrightarrow$ Dans *Eiden* : identification $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$; $\overline{z_M} z_{M'} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} + \mathrm{i} \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$; l'aire d'un triangle.

$\hookrightarrow$ Dans *Trignan* : une CNS d'alignement de trois points ; lieu géométrique de $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta\,[\pi]$.

2) Angles

$\hookrightarrow$ Dans *Nourdin* : un petit paragraphe sur l'exponentielle complexe.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la relation d'équivalence qui permet de définir l'angle orienté, la définition de l'angle orienté ; ajouter qu'on a la suite de surjections $\mathbb{R} \to \mathbb{U} \hookrightarrow \mathrm{O}^+\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{S}^1\right)^2 / \mathcal{R}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Eiden* : les coordonnées polaires ; la caractérisation des triangles équilatéraux ; les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont les sommets d'un n-gone régulier.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : le théorème de l'angle au centre.

3) Transformations du plan

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : la définition de similitude directe ; elles forment un groupe, engendré les rotations, les homothéties et les translations ; elles conservent les angles orientés, les rapports de distances ; $(\mathcal{D}, f(\mathcal{D}))$ est l'angle de f ; une similitude envoie un cercle de rayon R sur un cercle de rayon kR (où k est le rapport) de centre l'image du centre ; ajouter le lien entre conjugaison complexe et réflexion d'axe (Ox) ; la définition d'une isométrie affine ; les isométries forment un groupe engendré par les similitudes de rapport 1 et la conjugaison ; la caractérisation des similitudes directes/indirectes, la caractérisation des similitudes.

$\hookrightarrow$ Dans *Eiden* : la définition de l'inversion analytique, de l'inversion géométrique ; $M'N' = k\frac{MN}{AM.AN}$; le théorème de Ptolémée.

4) Polynômes et barycentres

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition du barycentre, le théorème de Lucas.

$\hookrightarrow$ Dans *CAPES 2011* : $\boxed{\text{l'ellipse de Steiner}}$.

II - Géométrie projective complexe

1) Espaces projectifs

$\hookrightarrow$ Dans *Samuel* : la définition de $\mathbb{P}(E)$, ce sont les droites vectorielles de E ; la définition de point projectif et de droite projective ; la projection stéréographique, la bijection $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}^2$; la définition de repère projectif, un exemple de repère projectif de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

2) Homographies et birapport

$\hookrightarrow$ Dans *Samuel* : la définition d'une homographie, de $\mathrm{PGL}(E)$; on peut définir une homographie en envoyant un repère projectif sur un autre.

$\hookrightarrow$ Dans *Audin* : l'écriture des homographies de la droite projective ; génération de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

$\hookrightarrow$ Dans *Samuel* : la définition du birapport ; l'écriture comme rapport de rapports ; les homographies sont les bijections qui conservent le birapport.

III - Constructibilité à la règle et au compas

$\hookrightarrow$ Dans *Gozard* : mettre tout ce qu'on peut sur la constructibilité ; ne pas oublier le théorème de Wantzel.

$\hookrightarrow$ Dans *Mercier* : $\boxed{\text{le théorème de Gauss-Wantzel}}$.

Références :

- Eiden (Géométrie analytique classique)
- Trignan (Géométrie des nombres complexes)
- Nourdin (Épreuve orale de l'agrégation de mathématiques)
- Audin (Géométrie)
- Tauvel (Géométrie)
- Mercier, Rombaldi (Annales du CAPES 2009 à 2011)
- Samuel (Géométrie projective)
- Gozard (Théorie de Galois)
- Mercier (Cours de Géométrie)

183 - Utilisation des groupes en géométrie.

Cadre : E et E' sont des ev de dimension finie, d'espaces affines canoniquement associés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

I - Géométrie affine

1) Espace affine, application affine

↪ Dans *Combes* : la définition d'un espace affine par action de groupe, la notation $\overrightarrow{MN}$, la relation de Chasles, l'exemple de la structure affine canonique sur E ; la définition d'une application affine, l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$; l'unicité de la partie linéaire $\overrightarrow{f}$, f injective/surjective $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{f}$ injective/surjective ; $f \mapsto \overrightarrow{f}$ surjective de $\mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$, l'exemple des homothéties, des translations.

↪ Dans *Mercier* : l'application au théorème de Thalès ; une application est affine $\Leftrightarrow$ elle conserve le barycentre $\Rightarrow$ elle préserve l'alignement ; une bijection affine conserve le parallélisme.

2) Groupe affine

↪ Dans *Combes* : la définition de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$, la caractérisation des translations, la structure de groupe ; $\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(\mathcal{E}) & \to & \mathrm{GL}(E) \\ f & \mapsto & \overrightarrow{f} \end{array}\right.$ est surjective de noyau $\mathcal{T}(\mathcal{E})$; le groupe des homothéties-translations (ou dilatations).

↪ Dans *Mercier* : les dilatations sont les applications affines qui transforment une droite en une droite qui lui est parallèle.

II - Isométries et géométrie euclidienne

1) Isométries vectorielles, isométries affines

↪ Dans *Combes* : la définition de $\mathrm{O}(E)$, de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$, ce sont des groupes ; la forme canonique d'une isométrie affine ; les isométries du plan réel (faire un tableau).

2) Angles orientés dans le plan

↪ Dans *Audin* : la relation d'équivalence sur les paires de vecteurs unitaires, le passage au quotient qui permet de définir les angles orientés, le transport de structure vers $\mathrm{O}^+(\mathbb{R}^2)$, la relation de Chasles.

↪ Dans *Mercier* : la définition de l'angle d'une rotation, de la mesure d'un angle (introduire l'orientation du plan), l'expression du sinus et du cosinus ; des applications comme Al-Kashi et le passage en coordonnées polaires.

↪ Dans *Audin* : le théorème de l'angle inscrit.

3) Polygones et polyèdres

↪ Dans *Mercier* : la définition d'un polygone, d'un polygone régulier.

↪ Dans *Ulmer* : la définition du groupe diédral $\mathcal{D}_n$, la présentation par générateurs et relations, l'isomorphisme $\mathcal{D}_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

↪ Dans *H2G2* : $\boxed{\text{les isométries du cube et du tétraèdre}}$.

III - Géométrie projective

1) Espaces projectifs

↪ Dans *Samuel* : la définition d'espace projectif (classes d'équivalence sous l'action du groupe des homothéties), de sous-espace projectif, de droite projective, de repère projectif ; dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$, il suffit de 3 points comme $(0,1,\infty)$.

2) Homographies et birapport

↪ Dans *Samuel* : la définition d'une homographie, elles forment le groupe $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ isomorphe à ${}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}/_{\mathbb{K}^\times .\mathrm{Id}}$; il existe une unique homographie qui envoie un repère projectif sur un autre (lien avec l'action transitive et simple).

↪ Dans *Audin* : expliquer pourquoi $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \middle| ad-bc \neq 0 \right\}$, générateurs.

↪ Dans *Samuel* : la définition et l'expression du birapport.

↪ Dans *Audin* : birapport réel $\Leftrightarrow$ points cocycliques ou alignés ; les homographies stabilisent l'ensemble des "cercles ou droites".

IV - Coniques

↪ Dans *Audin* : la définition d'une quadrique affine et d'une conique, la définition des qualificatifs "propre" et "dégénéré" ; la classification euclidienne des coniques affines.

↪ Dans *H2G2* : l'ellipse de Steiner.

V - Constructibilité à la règle et au compas

↪ Dans *Gozard* : la définition d'un point constructible ; si a et b le sont, alors aussi $a+b$, ab et $\frac{a}{b}$ (par Thalès), donc $\mathbb{Q}$ est constructible ; l'ensemble des nombres constructibles est un corps ; le théorème de Wantzel.

↪ Dans *Mercier* : $\boxed{\text{le théorème de Gauss-Wantzel}}$.

Références :

- Combes (Algèbre et Géométrie)
- Mercier (Cours de géométrie)
- Audin (Géométrie)
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Samuel (Géométrie projective)
- Gozard (Théorie de Galois)

190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

I - Quelques outils de dénombrement

1) Ensembles finis

↪ Dans *De Biasi* : la définition d'un ensemble fini, deux ensembles finis de même cardinal sont en bijection ; en cas d'union disjointe $\#\bigsqcup_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \#E_i$, la formule du crible ; le cardinal de $A \times B$ et de $A_1 \times \ldots \times A_n$; des applications, comme le nombre d'applications d'un n-ensemble dans un p-ensemble, les tirages ordonnés successifs avec remise, l'alphabet braille, $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$, l'exercice avec les chiffres 0, 3, 6 et 9.

2) Arrangements, permutations et combinaisons

↪ Dans *De Biasi* : la définition d'un arrangement, le lien avec les injections, le dénombrement des arrangements, les tirages sans remise ; la définition d'une permutation, leur dénombrement ; la définition d'une combinaison, on note leur cardinal $\binom{n}{p}$, le théorème qui dit que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{C}$; des applications comme le tiercé, l'inverse de la matrice de Pascal, le nombre de dérangements, de surjections, d'applications strictement croissantes, d'applications croissantes.

3) Quelques principes fondamentaux de combinatoire

↪ Dans *De Biasi* : le lemme des bergers.

↪ Dans *Perrin* : le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q^\times$; $\# {}^{G}/_{H} = \frac{\#G}{\#H}$.

↪ *Sans référence* : le principe de double comptage, faire remarquer que ça servira pour Burnside ; le principe des tiroirs, qui permet de démontrer que $ax^2 + by^2 = c$ a toujours une solution dans $\mathbb{F}_q$.

II - Dénombrement, théories des groupes et corps finis

1) Utilisation de la théorie des groupes

↪ Dans *Ulmer* : la relation orbite-stabilisateur et la formule des classes ; la formule de Burnside, le nombre moyen de points fixes d'une permutation.

↪ Dans *Combes* : l'application sur le collier de perles.

2) Dénombrement sur les corps finis

↪ Dans *Perrin* : les cardinaux des $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$; les isomorphismes exceptionnels.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : le nombre d'involutions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

↪ Dans *Perrin* : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$; le 1er théorème de Sylow.

↪ Dans *H2G2* : le nombre de matrices de rang r dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$, le nombre de p-Sylow dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, cela redonne une preuve de la réciprocité quadratique.

III - Fonctions multiplicatives

1) Indicatrice d'Euler

↪ Dans *Combes* : la définition de $\varphi(n) = \#\left({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right)^\times$, sa multiplicativité, la propriété $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{m \wedge n}{\varphi(m \wedge n)}$.

↪ Dans *De Biasi* : l'expression de $\varphi(n)$ via le crible.

↪ Dans *Combes* : la formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$; on l'utilise notamment pour obtenir la caractérisation des groupes cycliques ($\forall d | \#H, \#\left\{x \in H \middle| x^d = 1\right\} \leq d \Rightarrow H$ cyclique), $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique.

2) Fonction de Möbius

↪ Dans *Francinou, Gianella* : la définition de la fonction de Möbius, elle est multiplicative ; $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la formule d'inversion ; application aux $\boxed{\text{irréductibles de } \mathbb{F}_q[X]}$, à l'expression de $\varphi(n)$ avec la fonction de Möbius.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : la probabilité que deux nombres pris au hasard soient premiers entre eux.

IV - Utilisation des séries formelles

↪ Dans *Saux-Picart* : la définition d'une série génératrice.

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : $\boxed{\text{les partitions d'un entier en parts fixées}}$ et l'application aux pièces de monnaie.

↪ Dans *AF cours* et *ADF exos* : le nombre de dérangements et d'involutions dans $\mathfrak{S}_n$.

↪ Dans *Saux-Picart* : les nombres de Catalan (si on a encore de la place).

Références :
- De Biasi (Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne)
- Perrin (Cours d'algèbre)
- Ulmer (Théorie des groupes)
- Combes (Algèbre et Géométrie)
- Oraux X-ENS (Algèbre 1 et Analyse 2)
- Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)
- Francinou, Gianella (Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1)
- Saux-Picart (Cours de calcul formel, Algorithmes fondamentaux)
- Arnaudiès, Fraysse (Cours de mathématiques, tome 1)
- Arnaudiès, Delezoïde, Fraysse (Exercices résolus, tome 1)

201 - Espaces de fonctions : exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; (X, d) est un espace métrique ; on note $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-ev des fonctions continues de X dans $\mathbb{K}$; $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

I - Espaces de fonctions régulières

1) Généralités

- ↪ Dans *Gourdon* : l'uniforme continuité implique la continuité, le contre-exemple de $\frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$, l'exemple des fonctions lipschitziennes ; le théorème de Heine ; si X est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.
- ↪ **Désormais** X **est supposé compact.**
- ↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition de la norme uniforme, $(\mathcal{C}(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un Banach ; faire remarquer que le lemme de Baire est valide.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition de $\mathcal{C}^k$ et de $\mathcal{C}^\infty$, ils sont complets.

2) Parties compactes

- ↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'une partie équicontinue, des fonctions k-lipschitziennes, le théorème d'Ascoli, les opérateurs linéaires à noyau continu.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème d'Arzela-Peano.

3) Parties denses

- ↪ Dans *Gourdon* : le théorème de Weierstrass ; le lemme qui dit que si $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$; $\boxed{\text{la densité des fonctions continues nulle part dérivables}}$ et l'exemple d'une telle fonction.

4) Fonctions holomorphes

- ↪ Dans *Amar, Matheron* : la définition d'une fonction holomorphe, un exemple ; le théorème de Cauchy, la formule de Cauchy ; holomorphe ⇒ analytique ; le principe du prolongement analytique ; le théorème de convergence uniforme et de dérivation des fonctions holomorphes ; l'application à la fonction ζ ; $\mathcal{H}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$ et $f \mapsto f'$ est continue sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

II - Espace des applications linéaires continues

- ↪ Dans *Gourdon* : les conditions équivalentes à la continuité des applications linéaires de E dans F, la définition de la norme subordonnée, la sous-multiplicativité, $\mathcal{L}_C(E)$ est une algèbre normée ; si F est un Banach, alors $\mathcal{L}_C(E, F)$ aussi, par exemple E' est toujours un Banach ; une forme linéaire est continue ⇔ son noyau est fermé dans E ; en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.
- ↪ Dans *Brézis* : le théorème de Banach-Steinhaus.
- ↪ Dans *Gourdon* : l'application des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

III - Espaces L^p

1) Structure

- ↪ Dans *Briane, Pagès* : la définition de L^p pour $p \in [1, \infty]$; les inégalités de Hölder et Minkowski.
- ↪ Dans *Brézis* : $\boxed{\text{le théorème de Riesz-Fischer}}$; la convergence en norme p implique la convergence presque partout d'une sous-suite.
- ↪ Dans *Briane, Pagès* : L^2 est un espace de Hilbert, il vérifie le théorème de projection sur un convexe fermé, le théorème de Riesz.

2) Parties denses

- ↪ Dans *Briane, Pagès* : la densité des fonctions continues à support compact dans L^p.
- ↪ Dans *Brézis* : la définition du produit de convolution ; si $f \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \star g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$; la définition de suite régularisante, un exemple ; le théorème de convergence dans L^p avec les suites régularisantes ; la densité de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans L^p.

3) Le cas de L^2

- ↪ Dans *Rudin* : $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ est dense dans L^2 ; la transformée de Fourier-Plancherel.
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une fonction poids, de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$, le produit scalaire associé ; l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes orthogonaux, la densité des polynômes orthogonaux.

4) Relations d'inclusions

- ↪ Dans *Briane, Pagès* : la relation d'inclusion dans le cas d'une mesure finie ; contre-exemples à un telle règle dans le cas d'une mesure infinie.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Hirsch, Lacombe (Éléments d'analyse fonctionnelle)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Amar, Matheron (Analyse complexe)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Objectif Agrégation

202 - Exemples de parties denses et applications.

Cadre : (E, d) est un espace métrique, $A \subset E$.

↪ Dans *Gourdon Analyse* : définition et caractérisation séquentielle de la densité.

I - Exemples de parties denses dans des espaces de dimension finie

1) Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

↪ Dans *Gourdon Analyse* : l'exemple sur la densité dans $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

↪ Dans *Pommellet* : le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité.

↪ Dans *Gourdon Analyse* : les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, l'application $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

↪ Dans *Pommellet* : le corollaire sur la densité de $\left\{e^{2in\pi\theta} \middle| \theta \in \mathbb{R}\right\}$ dans $\mathcal{S}^1$. L'ensemble des nombres p-adiques est dense dans $\mathbb{R}$.

↪ Dans *Gourdon Analyse* : application des nombres dyadiques à la condition nécessaire pour qu'une fonction soit convexe.

↪ Dans *X-ENS Analyse 1* : $\boxed{\text{le théorème de réarrangement de Riemann}}$.

2) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

↪ Dans *Gourdon Algèbre* : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : l'application sur $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

↪ Dans *Rouvière* : l'application sur la différentielle du déterminant.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la partie topologie et endomorphismes diagonalisables sur les ensembles $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$; l'application à la partie diagonale de Dunford et le théorème de Cayley-Hamilton.

II - Densité dans les espaces de fonctions

1) Dans l'ensemble des fonctions continues

↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'une partie séparante, le théorème de Stone-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. L'application aux fonctions lipschitziennes et aux fonctions polynomiales (Weierstrass).

↪ Dans *Gourdon Analyse* : l'application de Weierstrass : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$ sur $[0, 1]$. Le théorème de Fejér, l'application à la densité des polynômes trigonométriques.

↪ *Sans référence* : les fonctions continues sont limite uniformes de fonctions étagées.

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : la définition des suites équiréparties et le critère de Weyl.

2) Prolongements de fonctions

↪ Dans *Pommellet* : le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense et l'application à la construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

3) Densité dans les espaces L^p, $p \in [1, +\infty]$

↪ Dans *Briane, Pagès* : la densité des fonctions étagées (il faut distinguer les cas $p < \infty$ et $p = \infty$) ; les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont denses. Ajouter en application de lemme de Riemann-Lebesgue. $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ est dense dans L^2.

↪ Dans *Rudin* et *Faraut* : la transformée de Fourier-Plancherel.

↪ Dans *Brézis* : l'espace $\mathrm{L}^p(\mu)$ est séparable.

III - Lemme de Baire et conséquences

↪ Dans *Brézis* : le lemme de Baire.

↪ Dans *Gourdon* : deux applications : $\boxed{\text{les fonctions continues nulles part dérivables sont denses}}$ et evn à base dénombrable implique pas complet.

↪ Dans *Brézis* : le théorème de Banach-Steinhaus et son corollaire.

↪ Dans *Gourdon* : l'application des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

↪ Dans *Brézis* : le théorème de l'application ouverte et son corollaire sur la continuité de l'inverse ; le théorème du graphe fermé.

IV - Espaces de Hilbert

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le critère de densité dans les espaces de Hilbert ; la définition et la caractérisation des bases hilbertiennes ; l'exemple des séries de Fourier.

Références :

- Gourdon (Analyse et Algèbre)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Oraux X-ENS (Analyse 1 et 2)
- Objectif Agrégation
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Hirsch, Lacombe (Éléments d'analyse fonctionnelle)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Faraut (Calcul intégral)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)

203 - Utilisation de la notion de compacité.

Cadre : (E, d) est un espace métrique.

I - Généralités

1) Définitions et caractérisations de la compacité

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'un espace compact (une remarque pour définir les parties compactes) ; l'exemple des espaces métriques finis, $\mathbb{R}$ n'est pas compact.
- ↪ Dans *Pommellet* : les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts.
- ↪ Dans *Gourdon* : les compacts sont bornés ; si (F_n) est une suite décroissante de fermés non-vides, alors $\bigcap F_n \neq \varnothing$.
- ↪ Dans *Queffélec* : le premier théorème de Dini et son application au théorème de Mercer.
- ↪ Dans *Gourdon* : une réunion finie de compacts est compacte, une intersection de compacts est compacte.

2) Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences

- ↪ Dans *Gourdon* : le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- ↪ Dans *Pommellet* : un sous-ensemble infini d'un compact possède un point d'accumulation ; compact $\Rightarrow$ complet ; une partie compacte est fermée bornée ; un sous-espace fermé d'un compact est compact ; les parties compactes de $\mathbb{R}$, la remarque qui dit que ce ne sont pas forcément des réunions finies d'intervalles, un produit fini de compacts est compact ; une suite (x_n) d'un compact converge $\Leftrightarrow$ elle a au plus une valeur d'adhérence ; le graphe fermé compact.
- ↪ Dans *Nourdin* : $(x_n) \subset \mathbb{R}$ converge $\Leftrightarrow$ $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_n}\right)$ converge ; la limite de lois gaussiennes est gaussienne.
- ↪ Dans *Rouvière* : tout intervalle de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union dénombrable croissante d'intervalles compacts ; si X est compact, alors $\left(\mathcal{C}\left(X, \mathbb{R}^d\right), \|.\|_\infty\right)$ est complet ; $\boxed{\text{le théorème de Cauchy-Lipschitz}}$.
- ↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'un espace relativement compact, le théorème d'extraction diagonale ; le théorème de Tychonov, l'homéomorphisme entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et l'ensemble triadique de Cantor.

II - Fonctions continues sur un compact

1) Problèmes d'extrémums

- ↪ Dans *Gourdon* : l'image continue d'un compact est compacte, ajouter le contre-exemple $\sin^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$; la condition pour être un homéomorphisme ; une application continue atteint ses bornes ; toutes les normes sont équivalentes en dimension finie et la liste de ses corollaires ; le théorème de Rolle et les accroissements finis.
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : le point de Fermat.
- ↪ Dans *X-ENS Algèbre 3* : l'ellipsoïde de John-Loewner.
- ↪ Dans *Pommellet* : une fonction continue et coercive est minorée et atteint son minimum ; en application $\mathrm{d}(x, F)$ est atteinte en un point de F, les polynômes de meilleure approximation, le théorème de d'Alembert-Gauss.

2) Théorème de Heine

- ↪ Dans *Pommellet* : le théorème de Heine ; l'exemple des fonctions périodiques, des fonctions ayant des limites finies en l'infini ; toute fonction $\mathcal{C}^0([a,b], E)$ est limite uniforme de fonctions affines par morceaux (où E evn).
- ↪ Dans *Nourdin* : le second théorème de Dini et son application au théorème de Glivenko-Cantelli.

3) Théorèmes de point fixe

- ↪ Dans *Gourdon* : le théorème de point fixe qui utilise la compacité, le contre-exemple.
- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème de point fixe qui suit ce même résultat.
- ↪ Dans *Alessandri* : $\boxed{\text{le théorème de point fixe collectif et son application aux sous-groupes compacts de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.

4) Théorème de Stone-Weierstrass

- ↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'une partie séparante, le théorème de Stone-Weierstrass réel, son corollaire Weierstrass.
- ↪ Dans *Pommellet* : $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t) t^n \,\mathrm{d}t = 0\right) \Leftrightarrow f \equiv 0$.
- ↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'une partie auto-conjuguée, Stone-Weierstrass complexe, son corollaire sur les fonctions lipschitziennes.

III - Compacité en dimension infinie

- ↪ Dans *Gourdon* : en dimension infinie, les fermés bornés ne sont pas tous compacts, le théorème de Riesz.
- ↪ Dans *Hirsch, Lacombe* : le théorème d'Ascoli.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de Cauchy-Peano, un exemple de perte d'unicité.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Queffélec (Topologie)
- Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Hirsch, Lacombe (Analyse fonctionnelle)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Alessandri (Thèmes de géomérie pour l'agrégation)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)

204 - Connexité. Exemples et applications.

Cadre : (E, d) est un espace topologique, $A \subset E$ est muni de la topologie induite par celle de E.

I - Généralités

1) Définitions

↪ Dans *Gourdon* : la propriété qui dit qu'il existe une partition de fermés ⇔ il existe une partition d'ouverts ⇔ il existe des ouverts-fermés autres que $\varnothing$ et E ; la définition d'un espace connexe ; ajouter que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le sont, mais pas $\mathbb{Z}$.

↪ Dans *Queffélec* : la définition d'une partie connexe, le lemme de passage des douanes ; $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$; E est connexe ⇔ toute fonction continue de $E \to \mathbb{Z}$ (ou $\{0,1\}$) est continue constante, l'application du livre.

2) Stabilité de la notion de connexité

↪ Dans *Gourdon* : une union de connexes n'est en général pas connexe, on peut ajouter des conditions.

↪ Dans *Queffélec* : les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ; l'intersection de connexes n'est pas connexe en général, la proposition sur l'image continue et l'adhérence d'un fermé.

↪ Dans *Hauchecorne* : un contre-exemple pour l'image réciproque.

↪ Dans *Queffélec* : le produit d'espaces topologiques connexes.

3) Composantes connexes

↪ Dans *Queffélec* : la définition de la relation $\sim$ ("être dans un même connexe de E"), elle est d'équivalence ; la définition d'une composante connexe, ajouter qu'elles forment une partition de E et que E est connexe ⇔ E n'a qu'une composante connexe ; $C(x)$ est l'union des connexes contenant x et est fermé ; si on a une partition de E en ouverts connexes non-vides, alors ce sont les composantes connexes de E ; $]-\infty, 3] \cup]4, 6[$ possède deux composantes connexes.

II - Connexité par arcs et par lignes brisées

1) Définition et propriétés de la connexité par arcs

↪ Dans *Queffélec* : la définition de la connexité par arcs, elle implique la connexité, réciproque pour les ouverts dans les evn ; ajouter les exemples de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$; l'exemple de l'épigraphe d'une fonction continue ; le contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ $\overline{\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| 0 < x \leq 1\right\}}$ est connexe, mais pas connexe par arcs.

2) Application aux groupes matriciels

↪ *Dans cette section, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

↪ Dans *Mneimné, Testard* : pour un ouvert de $\mathcal{M}_n(K)$, la connexité équivaut à la connexité par arcs ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe (par arcs), mais $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'est ; $\forall k \in [\![0, n]\!]$, l'ensemble des projecteurs de rang k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

↪ Dans *Zavidovique* : $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}[A]^\times \text{ est connexe (par arcs) ; on en profite pour montrer la surjectivité de l'exponentielle}}$.

3) Connexité par lignes brisées (dans un $\mathbb{R}$-evn)

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une ligne brisée, de la connexité par lignes brisées ; on a convexe ⇒ connexe par lignes brisées ⇒ connexe par arcs ⇒ connexe ; pour Ω un ouvert de E, la connexité par lignes brisées équivaut à la connexité ; ajouter le contre-exemple du cercle en dimension 2.

↪ Dans *Queffélec* : l'exemple d'une partie étoilée.

III - Applications de la connexité

1) Analyse réelle

↪ Dans *Queffélec* : le théorème des valeurs intermédiaires, Brouwer en dimension 1.

↪ Dans *X-ENS Analyse 1* : le théorème de Darboux, appliqué à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$.

↪ Dans *Rouvière* : si $\mathrm{D}f \equiv 0$ sur U connexe, alors f est constante sur U ; un contre-exemple sans connexité.

↪ Dans *Queffélec* : les homéomorphismes échangent les composantes connexes, ajouter une application à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$.

2) Analyse complexe

↪ Dans *Tauvel AC* : la proposition qui permet de définir l'indice, le principe de prolongement analytique, le théorème des zéros isolés.

↪ Dans *Amar, Matheron* : le principe de l'argument, le théorème de Rouché ; ajouter un exemple.

3) Théorie des groupes

↪ Dans *Mneimné, Testard* : la définition de groupe topologique ; G est connexe ⇒ G est engendré par e, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est engendré par un voisinage de I_n ; H et ${}^{G}/_{H}$ sont connexes ⇒ G est connexe ; la composante connexe de e est fermée et distinguée dans G ; $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ est ouvert connexe homéomorphe à $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

↪ Dans *H2G2* : $\boxed{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \text{ est simple}}$.

↪ Dans *Mneimné, Testard* : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est connexe, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$; $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Références :

– Gourdon (Analyse)
– Queffélec (Topologie)
– Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
– Mneimné, Testard (Groupes de Lie classiques)
– Zavidovique (Max de maths)
– Oraux X-ENS (Analyse 1)
– Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
– Tauvel (Cours et exercices d'analyse complexe)
– Amar, Matheron (Analyse complexe)
– Caldero, Germoni (Histoires hédonistes de groupes et de géométries)

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

Cadre : (M, d) est un espace métrique, d' une autre distance sur M, $d_0(x, y) = |x - y|$; $L \subset M$; $(E, \|.\|)$ est un Banach, $(H, \langle ., . \rangle)$ est un Hilbert.

I - Généralités sur les espaces complets

1) Suites de Cauchy

- ↪ Dans *Albert* : la définition d'une suite de Cauchy, les suites convergentes sont de Cauchy ; ajouter l'exemple de $\frac{1}{n}$ et le contre-exemple d'une suite de rationnels qui tendent vers $\sqrt{2}$; la définition d'un espace complet, d'un Banach, d'un Hilbert ; l'exemple de $(\mathbb{R}, d_0)$, le contre-exemple de $\mathbb{Q}$; l'image d'une suite de Cauchy puis une fonction uc est une suite de Cauchy ; la définition de distances équivalentes ; si d et d' sont équivalentes au sens uniforme, alors (M, d) complet $\Leftrightarrow$ (M, d') complet.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : la complétude n'est pas une notion topologique avec l'exemple de deux distances topologiquement équivalentes dont une seule définit un espace métrique complet.
- ↪ Dans *Albert* : une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge ; les espaces métriques compacts sont complets, $\mathbb{Q}$ montre que la réciproque est fausse.

2) Propriétés des espaces complets

- ↪ Dans *Albert* : la propriété sur L fermé dans M complet ; le produit fini de complets est complet ; un evn de dimension finie est un Banach.
- ↪ Dans *Queffélec* : la propriété des fermés emboîtés.
- ↪ Dans *Gourdon* : sous de bonnes hypothèses, $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(E_n)$; un evn est complet $\Leftrightarrow$ toute suite absolument convergente converge ; ajouter la définition de l'exponentielle complexe.

II - Exemples d'espaces complets

1) Espaces de fonctions, applications linéaires continues

- ↪ Dans *Albert* : $(\mathcal{B}(M, E), \|.\|_\infty)$ est un Banach, $(\mathcal{C}_b(M, E), \|.\|_\infty)$ aussi, donc si K métrique compact $(\mathcal{C}(K, E), \|.\|_\infty)$ aussi ; si F est un evn complet, $\mathcal{L}(E, F)$ est complet ; ainsi, le dual topologique d'un evn est toujours complet.
- ↪ Dans *Gourdon* : si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\|u\| < 1$, alors $(\mathrm{Id} - u) \in \mathrm{GL}(E)$ et donc $\mathrm{GL}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

2) Espaces L^p

- ↪ Dans *Briane, Pagès* : définir les espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$, les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_\infty$; les inégalités de Hölder et Minkowski ; $\mathcal{L}^p$ n'est pas un evn, on définit donc les espaces L^p et L^∞.
- ↪ Dans *Brézis* et *Rudin* : $\boxed{\text{le théorème de Riesz-Fischer}}$; énoncer en termes d'espaces complets, de Banach.

3) Espaces de Hilbert

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : des exemples comme $l^2(\mathbb{N})$ et $\mathrm{L}^2(X)$; la projection sur un convexe fermé, sur un sev fermé ; la définition de l'espérance conditionnelle ; le théorème de Riesz.
- ↪ Dans *Brézis* : les théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram.

III - Théorèmes fondamentaux basés sur la complétude

1) Prolongements d'applications

- ↪ Dans *Albert* : le théorème des applications uniformément continues ; le corollaire sur le prolongement des applications linéaires continues ; la construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.
- ↪ Dans *Rudin* et *Faraut* : le théorème de Fourier-Plancherel.

2) Théorème du point fixe

- ↪ Dans *Rouvière* : l'énoncé du théorème, des contre-exemples, le théorème de Cauchy-Lipschitz, le théorème d'inversion locale, le théorème des fonctions implicites.

3) Lemme de Baire et conséquences

- ↪ Dans *Gourdon* : le lemme de Baire (versions ouverte et fermée) ; les evn à base dénombrable ne sont pas complets, l'exemple de $\mathbb{R}[X]$.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : $\boxed{\text{les fonctions continues nulle part dérivables}}$.
- ↪ Dans *Gourdon* : le théorème de Banach-Steinhaus ; la limite simple d'applications linéaires continues est linéaire continue ; l'existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

Références :

- Albert (Topologie)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Queffélec (Topologie)
- Gourdon (Analyse)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Objectif Agrégation
- Faraut (Calcul intégral)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

I - Points fixes et complétude

1) Théorème de Picard

- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème de point fixe de Picard ; des contre-exemples comme $F(x) = \frac{x}{2}$ sur $]0,1[$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $[0,1]$, l'identité ; remarquer qu'une application non-strictement contractante peut avoir un point fixe comme avec $\sin(x)$; application aux fonctions différentiables.
- ↪ Dans *Demailly* : le théorème reste vrai si une itérée est strictement contractante.
- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème de point fixe à paramètre, l'exemple de $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y)+t-1 \\ y = \frac{1}{2}\cos(x+y)-t-\frac{1}{2} \end{cases}$.

2) Application aux équations différentielles

- ↪ Dans *Rouvière* : $\boxed{\text{le théorème de Cauchy-Lipschitz}}$, application à l'équation du pendule, le contre-exemple à l'unicité avec $\begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

3) Application au calcul différentiel

- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème d'inversion locale, le lien avec le point fixe.
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : application à la racine k^{e} d'une matrice.
- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème des fonctions implicites, l'exemple de $f(x,y) = x^2+y^2-1$.
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : application à la régularité d'une racine simple d'un polynôme, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ↪ Dans *Brézis* : les théorèmes de Stampacchia, de Lax-Milgram et application.

II - Points fixes et compacité

- ↪ Dans *Gourdon* : le théorème de point fixe pour les espaces métriques compacts, le contre-exemple de $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$; le théorème de point fixe pour les fonctions 1-lipschitziennes sur un compact convexe.
- ↪ Dans *Rouvière* : la remarque sur la perte d'unicité, le contre-exemple à l'existence quand f est une rotation de $\mathcal{S}^1$.
- ↪ Dans *Alessandri* : $\boxed{\text{les sous-groupes compacts de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$.
- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème de Brouwer en dimension 1.
- ↪ Dans *Rombaldi* : $f : x \mapsto 1-x^2$ admet un point fixe sur $[0,1]$ mais $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ n'y converge pas.
- ↪ Dans *X-ENS Analyse 1* : sous les hypothèses du théorème de Brouwer en dimension 1, (u_n) converge $\Leftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n \to 0$; si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, avec $[a,b] \subset f([a,b])$, alors f admet un point fixe.
- ↪ Dans *Rouvière* : le théorème de Brouwer en dimension finie (ADMIS).
- ↪ Dans *Queffélec* : l'exercice sur les chemins qui se croisent dans un carré.

III - Points fixes et monotonie

- ↪ Dans *Rombaldi* : si f est croissante de $[a,b]$ dans $[a,b]$, alors f possède un point fixe, $\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$ montre que c'est faux pour les fonctions décroissantes ; l'étude de $x_{n+1} = f(x_n)$ quand f est croissante continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$, contre-exemple sans continuité avec $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{1}{4} & \text{sur } \left[0,\frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{sur } \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$; si f est décroissante continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$, étude des suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}), exemple avec $f \circ f$ ayant plusieurs points fixes.

IV - Résolution approchée de $f(x) = 0$

1) Introduction

- ↪ Dans *Rouvière* : l'explication de la méthode pour se ramener à un problème de point fixe ; cas attractif, super-attractif, répulsif ; dans le cas répulsif, regarder f^{-1} ; exemple d'une convergence d'ordre 1 pour le nombre d'or.
- ↪ Dans *Demailly* : si $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien conclure, avec $\sin(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ et $1-x$.

2) Méthode de Newton

- ↪ Dans *Rouvière* : la méthode de Newton, application à l'estimation de $\sqrt{y}$, convergence quadratique vers le nombre d'or.

Références :

- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Objectif Agrégation
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Gourdon (Analyse)
- Alessandri (Thèmes de géomérie pour l'agrégation)
- Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
- Oraux X-ENS (Analyse 1)
- Queffélec (Topologie)

207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

↪ Donner la définition d'un prolongement.

I - Aspects topologiques

1) Prolongement ponctuel

↪ Dans *Gourdon* : la définition du prolongement par continuité ; ajouter des exemples comme $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{\sin x}{x}$ et $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

2) Prolongement par densité

↪ Dans *Pommellet* : le principe de prolongement des identités, le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense. En application : la construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

↪ Dans *Rudin* et *Faraut* : $\boxed{\text{la transformée de Fourier-Plancherel}}$.

3) Prolongement global

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de prolongement de Tietze et l'exercice qui fournit des critères de compacité.

↪ Dans *Tisseron* : la séparation des fermés par des fonctions continues.

4) Prolongement des formes linéaires

↪ Dans *Brézis* : le théorème de Hahn-Banach analytique et deux de ses corollaires.

↪ Dans *Pommellet* : l'application qui suit le théorème de Hahn-Banach et qui donne un critère de densité.

II - Aspects différentiels

1) Prolongement et régularité

↪ Dans *Pommellet* : le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ et le contre-exemple justifiant l'hypothèse de continuité. L'exemple de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ qui est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En application : l'existence de fonctions bosses et de fonctions plateaux.

↪ Dans *Rouvière* : le lemme de Borel et le corollaire de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment $[a, b]$.

2) Prolongement et équations différentielles

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : les définitions de solution, solution globale, solution maximale. Le théorème de sortie de tout compact puis le critère de prolongement, qu'on applique à un exemple.

III - Aspects analytiques

1) Séries entières

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition des points réguliers et singuliers au bord du disque de convergence. L'exemple de $\sum z_n$. Le théorème qui dit qu'il y a toujours au moins un point singulier.

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{les théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible}}$.

2) Fonctions holomorphes

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème des zéros isolés, le principe du prolongement analytique et le prolongement de la fonction Γ.

Références :
- Gourdon (Analyse)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Faraut (Calcul intégral)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Tisseron (Notions de topologie et introduction aux espaces fonctionnels)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Objectif Agrégation

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I - Généralités

1) Espaces vectoriels normés

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une norme, présenter des exemples : $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0([0,1])$, $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Remarque : un evn est un espace métrique. Continuité de la norme, définition de normes équivalentes (remarque : elles définissent la même topologie).
- ↪ Dans *Pommellet* : l'exemple qui dit que sur $\mathcal{C}^0([0,1])$ $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

2) Applications linéaires continues

- ↪ Dans *Gourdon* : les conditions équivalentes pour qu'une application linéaire soit continue.
- ↪ Dans *Pommellet* : les exemples et une application linéaire est continue ⇔ elle transforme les suites de limite nulle en suites bornées.
- ↪ Dans *Gourdon* : $\mathcal{L}_C(E,F)$ est un evn, $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$. La définition du dual topologique et la proposition f continue ⇔ Ker f est fermé.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : un exemple de forme linéaire discontinue.
- ↪ Dans *Brézis* : le théorème d'Hahn-Banach analytique et son corollaire sur le prolongement.

3) Cas particulier de la dimension finie

- ↪ Dans *Gourdon* : toutes les normes sont équivalentes et ses corollaires, le théorème de Riesz.

II - Espaces de Banach

1) Définition et premières propriétés

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'un espace de Banach. L'exemple des evn de dimension finie.
- ↪ Dans *Brézis* : le théorème de $\boxed{\text{Riesz-Fischer}}$.
- ↪ Dans *Gourdon* : si F est un Banach, $\mathcal{L}_C(E,F)$ est un Banach donc E' est un Banach. Toute série dans un Banach absolument convergente converge, en application si $\|u\| < 1$, alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible.
- ↪ Dans *Pommellet* : le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense. Ajouter le fait que ça permet de définir la transformée de Fourier dans L^2.

2) Lemme de Baire et conséquences

- ↪ Dans *Brézis* : le lemme de Baire.
- ↪ Dans *Gourdon* : deux applications : $\boxed{\text{les fonctions continues nulles part dérivables sont denses}}$ et evn à base dénombrable implique pas complet.
- ↪ Dans *Brézis* : le théorème de Banach-Steinhaus et son corollaire.
- ↪ Dans *Gourdon* : l'application des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.
- ↪ Dans *Brézis* : le théorème de l'application ouverte et son corollaire sur la continuité de l'inverse ; le théorème du graphe fermé.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : $\frac{1}{x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x)$ est discontinue à graphe fermé.

III - Espaces de Hilbert

1) Généralités

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'un espace préhilbertien, d'un espace de Hilbert, des exemples : $\mathrm{l}^2(\mathbb{N})$ et $\mathrm{L}^2(X, \mathcal{T}, \mu)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'identité du parallélogramme et la définition de l'orthogonal.

2) Applications linéaires sur un espace de Hilbert

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de projection sur un convexe fermé, son corollaire pour les sev fermés. Le théorème de représentation de Riesz et son application à la définition de l'adjoint.

3) Bases hilbertiennes

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une base hilbertienne ; le théorème qui dit Hilbert séparable ⇒ existence d'une base hilbertienne dénombrable. La caractérisation des bases hilbertiennes dans le cas des Hilbert séparables et l'exemple des séries de Fourier.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Objectif Agrégation

209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

I - Approximation des fonctions régulières

1) Approximation locale

↪ Dans *Gourdon* : les formules de Taylor-Reste intégral, Taylor-Lagrange et Taylor-Young ; ajouter le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp.

↪ Dans *Rouvière* : l'application au lemme de Morse, qui sert à étudier des surfaces localement via le plan tangent.

2) Interpolation polynomiale

↪ Dans *Demailly* : l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur de Lagrange, la formule d'erreur et sa majoration ; la remarque sur l'erreur ; l'exemple pour les points équidistants, les points de Tchebychev ; le dessin pour $\frac{1}{x^2+8}$ (si on a le temps).

3) Approximation uniforme

↪ Dans *Demailly* : la définition d'une partie séparante, le théorème de Stone-Weierstrass réel, l'exemple des polynômes.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : $\boxed{\text{le théorème de Weierstrass via les polynômes de Bernstein}}$.

↪ Dans *Gourdon* : $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0\right) \Rightarrow f \equiv 0$ sur $[0,1]$; le contre-exemple de Weierstrass qui dit que sur $\mathbb{R}$, la limite uniforme d'une suite de polynômes est un polynôme.

II - Polynôme de meilleure approximation

1) Cadre général

↪ *Sans référence* : la définition d'une norme strictement convexe ($\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x$ et y sont positivement liés – attention à l'erreur dans *Objectif Agrégation*).

↪ Dans *Objectif Agrégation* : l'existence d'un projeté sur les sev de dimension finie d'un evn, l'unicité quand la norme est strictement convexe ; $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathrm{L}^p([0,1])$ et $\|.\|_p$ est strictement convexe pour $1 < p < \infty$ donne l'unicité du polynôme de meilleure approximation pour $\|.\|_p$; sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, il existe un unique polynôme de meilleure approximation pour $\|.\|_1$ et $f - f^*$ s'annule au moins $(n+1)$ fois.

↪ Dans *Demailly* : la définition de l'équioscillation, le polynôme de meilleure approximation uniforme et caractéristion.

2) Cadre hilbertien

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une fonction poids, de $\mathrm{L}^2(I,\rho)$; la définition des polynômes orthogonaux (par Gram-Schmidt) ; les exemples des polynômes de Hermite, Legendre ; la proposition de meilleure approximation ; le théorème de $\boxed{\text{densité des polynômes orthogonaux}}$, un contre-exemple, et l'application à l'obtention d'une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

III - Approximation des fonctions périodiques

1) Polynômes trigonométriques et séries de Fourier

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'un polynôme trigonométrique, de $c_n(f)$, d'une série de Fourier.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, la notation $e_n : x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$ et $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$, (e_n) orthonormée ; la définition de $S_N(f)$, de l'ensemble $\mathcal{P}_N$; la propriété de projection orthogonale ; Riemann-Lebesgue.

↪ Dans *Gourdon* : l'inégalité de Bessel.

2) Convergence en moyenne quadratique

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition de $\sigma_N(f)$, des noyaux de Dirichlet et Fejér ; $S_N(f) = f \star D_N$ et $\sigma_N(f) = f \star K_N$; le théorème de Fejér, on en déduit que (e_n) est une famille totale (et donc une base hilbertienne) ; en conséquence l'égalité $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n$, la signification de l'égalité, l'égalité de Parseval.

↪ Dans *Gourdon* : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

3) Convergence uniforme et ponctuelle

↪ Dans *Gourdon* : les convergences simple/normale de la série de Fourier ; $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : la résolution de l'équation de la chaleur.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Analyse 4)

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-ev, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Généralités sur les espaces de Hilbert

1) Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien ; les exemples de $\mathbb{K}^n$ avec son produit scalaire usuel, de $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{K}), \langle .,. \rangle_2\right)$ et de $\mathrm{l}^2(\mathbb{N})$; l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité ; $\|.\|^2 = \langle .,. \rangle$ est une norme, les préhilbertiens sont des evn ; l'identité du parallélogramme, un evn qui la vérifie est préhilbertien ; la définition d'un espace de Hilbert, les exemples de la dimension finie, de $\mathrm{L}^2(\Omega, m)$ et de $l^2(\mathbb{N})$; ajouter que $(\mathbb{R}[X], N)$ est préhilbertien non Hilbert pour $N : P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

$\hookrightarrow$ Dans *Brézis* : les exemples de $\mathrm{H}^1(I)$ et de $\mathrm{H}^1_0(I)$.

2) Orthogonalité

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition d'éléments orthogonaux, de parties orthogonales, de l'orthogonal d'une partie.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : $A^\perp$ est un sev fermé de E, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\ A)^\perp = \overline{A}^\perp$, $A \subset A^{\perp\perp}$; ajouter que $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ et que $\overline{\mathrm{Vect}\ A} \cap A^\perp = \{0\}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : le théorème de Pythagore ; la réciproque si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mais pas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3) Projection sur un convexe fermé

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de projection sur un convexe fermé, c'est une application 1-lipschitzienne ; le théorème de Hahn-Banach géométrique ; la projection sur un sev fermé, $E = F \oplus F^\perp$, $F^{\perp\perp} = F$, F dense $\Rightarrow F^\perp = \{0\}$; la définition de l'espérance conditionnelle.

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, l'expression du projeté sur un sev de dimension finie.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Algèbre 3* : $\inf_{a\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{+*}} \mathrm{e}^{-x} \left(1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ (la distance à un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$).

4) Dualité

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : le théorème de représentation de Riesz.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de Hahn-Banach analytique.

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition de l'adjoint ; E et $\mathcal{L}(E)$ sont isométriques ; des exemples d'adjoint en dimension infinie et pour les opérateurs à noyau.

$\hookrightarrow$ Dans *Brézis* : $\boxed{\text{le théorème de Stampacchia}}$, le théorème de Lax-Milgram ; application à l'existence et l'unicité d'une solution faible à $\left\{\begin{array}{l} -u'' + u = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right.$.

II - Bases hilbertiennes

1) Généralités

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une base hilbertienne, la remarque sur la différence avec les bases algébriques.

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : l'exemple d'une base hilbertienne sur $\mathrm{l}^2(\mathbb{N})$.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème d'existence d'une base hilbertienne dénombrable pour les Hilbert séparables ; la caractérisation des bases hilbertiennes ; les Hilbert séparables sont isométriques à $\mathrm{l}^2(\mathbb{N})$.

2) Polynômes orthogonaux

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une fonction poids, d'un polynôme orthogonal ; les polynômes de Hermite, de Lagrange ; $\boxed{\text{la densité des polynômes orthogonaux}}$, un contre-exemple ; l'application au polynôme de meilleure approximation ; les bases hilbertiennes de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

3) Séries de Fourier

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition du tore $\mathbb{T} = {}^{\mathbb{R}}\!/_{2\pi\mathbb{Z}}$ et de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, de la famille (e_n), des coefficients de Fourier $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$, du projeté $S_N(f) = p_{\mathrm{Vect}\ \{e_n | |n| \leq N\}}(f)$; la famille (e_n) est orthonormée ; le théorème de Fejér pour les fonctions $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, $\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_2} f$ (admis) ; en conséquence, (e_n) est une base hilbertienne, et donc $S_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_2} f$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ et l'isométrie $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}) \simeq l^2(\mathbb{Z})$; en application, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Références :

- Hirsch, Lacombe (Éléments d'analyse fonctionnelle)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Cadre : $n, p \in \mathbb{N}^*$; U, V ouverts de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$; $a \in U$; $f : U \to \mathbb{R}^p$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

I - Théorème d'inversion locale

1) Énoncés

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le théorème d'inversion locale, avec son dessin, l'exemple de $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ qui est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, le contre-exemple de $f : x \mapsto x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$; le théorème d'inversion globale (dans sa version $\mathcal{C}^k$), retour au 1er exemple où le TIG ne s'applique pas ; le passage en coordonnées cartésiennes ; la version holomorphe du TIG.

2) Applications en algèbre linéaire

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la racine ke d'une matrice.

$\hookrightarrow$ Dans *Mneimné, Testard* : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{D}(\exp)(0) = \mathrm{Id}$ donc exp est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans un voisinage de Id dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$\hookrightarrow$ Dans *Zavidovique* : la surjectivité de l'exponentielle.

$\hookrightarrow$ Dans *Mneimné, Testard* : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le lemme de réduction des formes quadratiques.

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, l'ensemble des matrices symétriques de signature $(p, n-p)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3) Applications en géométrie différentielle

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* et *Lafontaine* : la définition d'une submersion/immersion, avec les diagrammes commutatifs, des dessins.

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le lemme de Morse, l'application dans $\mathbb{R}^2$ aux équations de tangentes en un point double, et l'étude locale d'une surface par rapport à son plan tangent.

II - Théorème des fonctions implicites

1) Énoncé

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le théorème des fonctions implicites (dans ses versions $\mathcal{C}^k$ et holomorphe), avec un dessin, l'exemple du cercle ; la différentielle de la fonction implicite et retour au cercle ; faire remarquer que le TFI et le TIL s'équivalent.

2) Applications

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la racine simple dépend localement de façon $\mathcal{C}^\infty$ du polynôme ; l'ensemble des polynômes scindés à racines simples de $\mathbb{R}_n[X]$ est ouvert.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème des extréma liés, qu'on applique à l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : l'application à la diagonalisation des endomorphismes symétriques.

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : l'inégalité de Hadamard.

III - Application aux sous-variétés

$\hookrightarrow$ *Désormais, on se place dans $\mathbb{R}^n$, et $V \subset \mathbb{R}^n$.*

1) Définition et caractérisations

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la définition d'une variété, l'exemple du cône épointé, le contre-exemple de l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $x^2 = y^2$; le théorème des sous-variétés, insister sur les implications offertes par le TIL et le TFI ; l'exemple de la sphère de $\mathbb{R}^3$.

2) Espaces tangents

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la définition du vecteur tangent, de l'espace tangent ; la caractérisation de l'espace tangent selon la définition choisie.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : l'interprétation géométrique du théorème des extréma liés.

3) Exemples de sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, ses espaces tangents ; pareil pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Références :

- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Objectif Agrégation
- Mneimné, Testard (Groupes de Lie classiques)
- Zavidovique (Max de maths)
- Lafontaine (Introduction aux variétés différentielles)
- Gourdon (Analyse)

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Cadre : U et V sont des ouverts de E et F qui sont des $\mathbb{R}$-evn de dimension finie.

I - Généralités sur la différentiabilité (ordre 1)

1) Applications différentiables

↪ Dans *Rouvière* : la définition d'une application différentiable, l'unicité de la différentielle, notée $\mathrm{D}f(a)$; l'exemple d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d'une fonction constante, linéaire, quadratique ; une application différentiable est continue ; la différentielle est linéaire, la différentielle de la composée ; la définition de la classe $\mathcal{C}^1$, d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ; la différentielle de l'inverse ; des exemples de calculs de différentielles avec l'inversion et le déterminant.

2) Dérivées directionnelles, dérivées partielles

↪ Dans *Gourdon* : la définition de la dérivabilité directionnelle ; une application différentiable est dérivable selon tout vecteur, le contre-exemple de la réciproque ; la définition de la dérivée partielle, ajouter que $\mathrm{D}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$; quand les dérivées partielles existent et sont continues l'application est différentiable, mais la réciproque est fausse avec $x^2 \sin \frac{1}{x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$; la définition de la jacobienne, la dérivation en chaîne et le laplacien en polaires.

↪ Dans *Rouvière* : les dérivées de $u : x \mapsto f(x, -x)$ et de $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$.

3) Plan tangent à une surface

↪ Dans *Rouvière* : le plan tangent à une surface définie implicitement et un dessin.

4) Accroissements finis

↪ Dans *Gourdon* : le théorème des accroissements finis ; rappeler que l'égalité, vraie en dimension 1, est fausse en dimension supérieure (regarder $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ qui fournit un contre-exemple).

↪ Dans *Rouvière* : l'inégalité de la moyenne et son corollaire une application à l'unicité des solutions d'une équation ; la différentielle d'une limite et l'application à la différentielle de l'exponentielle.

II - Théorèmes d'inversion et fonctions implicites

↪ Dans *Rouvière* : le théorème d'inversion locale, le contre-exemple $x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ qui montre que le caractère $\mathcal{C}^1$ est obligatoire et $\boxed{\text{le lemme qui sert au théorème de Morse}}$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la racine $k^{\text{ème}}$ d'une matrice.

↪ Dans *Rouvière* : le théorème d'inversion globale, un exemple de difféomorphisme local qui ne soit pas global ; le théorème des fonctions implicites et l'exemple du cercle.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la régularité des racines simples d'un polynôme et les polynômes scindés à racines simples sont un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

III - Ordre supérieur

1) Applications plusieurs fois différentiables

↪ Dans *Cartan* : la définition d'une application 2 fois différentiable, l'identification $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \simeq \mathcal{L}_2(E \times E, F)$, la définition de la classe $\mathcal{C}^2$.

↪ Dans *Rouvière* : le théorème de Schwarz et son contre-exemple, la définition de la matrice hessienne.

↪ Dans *Cartan* : la définition d'une fonction k fois différentiable, l'identification $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}_{k-1}(E, F)) \simeq \mathcal{L}_k(E, F)$ et la notation $\mathrm{D}^k f(a)$; la définition de la classe $\mathcal{C}^k$; $\mathrm{D}^k f(a)$ est k-linéaire symétrique ; les différentielles successives des applications bilinéaires.

2) Formules de Taylor

↪ Dans *Cartan* : les formules de Taylor-Reste intégral, Taylor-Lagrange, Taylor-Young.

↪ Dans *Gourdon* : le lemme d'Hadamard.

↪ Dans *Rouvière* : l'exemple de Taylor-Young pour une fonction de 3 variables à l'ordre 2 ; $\boxed{\text{le lemme de Morse}}$.

IV - Problèmes d'extrema

↪ Dans *Rouvière* : le gros théorème sur les extrema et différentielles, leurs contre-exemples ; la recherche des extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème des extrema liés}}$ et son application à l'inégalité arithmético-géométrique.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la diagonalisation des endomorphismes symétriques.

Références :

– Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
– Gourdon (Analyse)
– Objectif Agrégation
– Cartan (Cours de calcul différentiel)

218 - Applications des formules de Taylor.

Cadre : E et F des $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, U ouvert de E, I intervalle d'intérieur non-vide.

I - Formules de Taylor

- $\hookrightarrow$ Dans *Cartan* : pour $f : U \to F$ définir le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Taylor et le reste. La caractérisation des fonctions polynomiales par la suite des restes qui stationne en 0. La formule de Taylor avec reste intégral.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème de Rolle, les accroissements finis, et en aboutissement : l'égalite de Taylor-Lagrange.
- $\hookrightarrow$ Dans *Cartan* : l'inégalité de Taylor-Lagrange et la formule de Taylor-Young.

II - Applications en analyse

1) Développements limités

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un développement limité, le lien avec Taylor-Young, des exemples. La proposition qui dit que si f admet un DL_1, alors f est dérivable. Le contre-exemple qui montre que si f admet un DL_2, f n'est pas forcément deux fois dérivable.

2) Séries entières

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le développement en série entière (série de Taylor) des fonctions développables en séries entières.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : être $\mathcal{C}^\infty$ n'implique pas qu'on soit développable en série entière.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème de Bernstein sur les séries entières (on peut même dire que f est analytique sur $]-a,a[$). Les exemples qui y sont associés.
- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de Borel et son application qui dit que toute série entière de rayon de convergence non-nul est le développement de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

3) Suites récurrentes

- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : l'exercice sur les points fixes (attractifs, super-attractifs, répulsifs). Ajouter qu'on ne peut rien dire quand la valeur absolue de la dérivée au point fixe est 1 avec sin et sh. Mettre l'exemple de l'approximation du nombre d'or, puis la méthode de Newton et l'application de la méthode pour obtenir une meilleure convergence vers le nombre d'or.

4) D'autres conséquences en analyse

- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 1* : le théorème de Darboux et les inégalités de Kolmogorov.

III - Applications en géométrie

1) Convexité et extréma

- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la définition des fonctions convexes, la caractérisation dans le cas des fonctions différentiables, deux fois différentiables. Le théorème sur la différentielle, la différentielle seconde et les minimums locaux ; expliquer qu'on n'a pas la réciproque, et donner des exemples de recherche d'extremum.

2) Étude affine locale d'une courbe plane

- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le théorème qui donne l'aspect local d'une courbe (point de rebroussement, etc...). Faire un dessin en annexe.

3) Lemme de Morse

- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le $\boxed{\text{lemme de Morse}}$.

IV - Applications en probabilités

- $\hookrightarrow$ Dans *Ouvrard 2* : le théorème des événements rares de Poisson, le $\boxed{\text{théorème central limite}}$; une CNS d'analyticité de φ_X autour de 0.

Références :
- Cartan (Calcul différentiel)
- Gourdon (Analyse)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Oraux X-ENS (Analyse 1)
- Ouvrard (Probabilités 2)

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cadre : E est un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, $C \subset E$, $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in C$.

↪ Dans *Rouvière* : la définition de minimum/maximum local/global/strict.

I - Existence et unicité

1) Compacité

↪ Dans *Gourdon* : une fonction continue sur un compact atteint ses bornes ; application au théorème de point fixe, l'exercice sur la distance entre 2 parties.

↪ Dans *Pommellet* : le polynôme de meilleure approximation et le théorème de d'Alembert-Gauss.

2) Convexité

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une fonction (strictement) convexe ; les ensembles de niveau de f convexe sont convexes ; le théorème d'unicité du minimum d'une fonction strictement convexe.

3) Exemples d'utilisation conjointe de compacité et convexité

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le point de Fermat.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 3* : la stricte convexité du logarithme sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et l'ellipsoïde de John-Loewner.

4) Espaces hilbertiens

↪ Dans *Brézis* : le théorème de projection sur un convexe fermé, sur un sev fermé ; les théorèmes de $\boxed{\text{Stampacchia}}$ et Lax-Milgram.

↪ Dans *Rouvière* : les moindres carrés.

5) Fonctions holomorphes

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la propriété de la moyenne, le principe du maximum local et global ; en application l'exercice sur annulation et principe du maximum ; le contre-exemple du minimum.

↪ Dans *Rouvière* : si $|f|$ admet un minimum local sur U, alors il est nul.

II - Localisation et calcul différentiel

1) Conditions du premier ordre

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la condition nécessaire de minimalité locale et son contre-exemple.

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de Rolle.

↪ Dans *Rouvière* : la suite du point de Fermat.

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de Darboux.

2) Conditions du second ordre

↪ Dans *Pommellet* : le théorème, la notation de Monge et les CN/CS pour les extremums locaux.

↪ Dans *Gourdon* : l'exemple qui suit le théorème similaire et un exemple d'utilisation dans les exercices.

3) Optimisation sous contrainte

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème des extrémas liés}}$; $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ minimise la norme $\|.\|_2$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

III - Optimisation numérique

1) Méthode de Newton

↪ Dans *Rouvière* : la méthode de Newton, un dessin et une application.

2) Méthodes de descente

↪ Dans *Objectif Agrégation* : les explications sur les méthodes de descente.

↪ Dans *Hiriart-Urruty* : l'algorithme du gradient à pas optimal.

Références :
- Gourdon (Analyse)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Hiriart-Urruty (Optimisation et analyse convexe)

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

I - Théorie des équations différentielles

1) Existence et unicité des solutions

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une ED, on peut se ramener à un problème d'ordre 1.
- ↪ Dans *Demailly* : désormais on résout $(E) : y' = f(t, y)$ où $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue et U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$; la définition d'un problème de Cauchy, d'un prolongement, d'une solution maximale ; toute solution se prolonge en une solution maximale ; la définition d'une solution globale, l'exemple de $y' = y^2$; l'équivalence entre équation intégrale et problème de Cauchy.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de Cauchy-Lipschitz local.
- ↪ Dans *Demailly* : l'absence d'unicité pour $\begin{cases} y' = 3|y|^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
- ↪ Dans *Rouvière* : $\boxed{\text{le théorème de Cauchy-Lipschitz global}}$.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de Cauchy-Peano.

2) Outils pour l'étude des solutions

- ↪ Dans *Rouvière* : le lemme de Gronwall et l'application qui suit.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de majoration a priori, l'application aux fonctions bornées.
- ↪ Dans *Gourdon* : pour les équations linéaires, on définit le wronskien, son expression exponentielle, on remarque qu'il est soit nul, soit de signe constant.

II - Stabilité des systèmes différentiels autonomes

1) Définitions

- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition de système autonome, de point d'équilibre stable/instable/asymptotiquement stable.
- ↪ Dans *Demailly* : des dessins.

2) Cas linéaire

- ↪ Dans *Demailly* : le théorème de stabilité, le cas d'un champ linéaire de vecteurs (détailler et faire les portraits de phase).

3) Cas général

- ↪ Dans *Rouvière* : la définition du système linéarisé, le théorème de Liapounov.
- ↪ Dans *Demailly* : le contre-exemple dans le cas où $\mathrm{D}f(0) = 0$.
- ↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : l'équation de Van der Pol pour $\varepsilon < 0$.

III - Exemples d'études

1) Équations particulières

- ↪ Dans *Demailly* : détailler les méthodes pour les équations de Bernoulli, Ricatti et les équations homogènes.

2) Équations de type $y'' + qy = 0$

- ↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{-*}$ continue, alors y^2 convexe et si $y \not\equiv 0$, alors y est non-bornée et s'annule au plus une fois.
- ↪ Dans *X-ENS Analyse 4* et *Gourdon* : si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ est $\mathcal{C}^1$ croissante, alors y est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule une infinité de fois (pour la dernière propriété $\mathcal{C}^0$ croissante suffit).
- ↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : le théorème d'entrelacement de Sturm.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* : $\boxed{\text{les zéros des solutions d'une équation différentielle}}$.

3) Système Lotka-Volterra

- ↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : présenter le système, l'unicité de la solution maximale, elle est en fait globale, les solutions sont périodiques.

4) Pendule simple

- ↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : présenter le système, les différents cas selon la valeur du paramètre α, les portraits de phase.

Références :
- Gourdon (Analyse)
- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Oraux X-ENS (Analyse 4)

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle.

I - Généralités

1) Existence et unicité

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une EDL d'ordre p, l'écriture matricielle permet de se ramener systématiquement à l'ordre 1.
- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : l'équation intégrale associée, $\boxed{\text{le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire}}$, ajouter une remarque pour l'ordre p ; le contre-exemple à l'existence globale $y' = y^2, y(0) = 1$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Pommellet* : le contre-exemple à l'unicité $y' = \sqrt{|y|}$.

2) Structure de l'espace des solutions

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la dimension de l'espace des solutions d'une EDL homogène/inhomogène.
- $\hookrightarrow$ Dans *Pommellet* : le principe de superposition.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition du wronskien, l'exemple pour une EDL2 ; le rang de $(V_1(t), \ldots, V_n(t))$ est indépendant de t, $\exists t_0, W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow (V_1, \ldots, V_n)$ est une base de l'ensemble des solutions ; $W(t) = W(a) \exp\left(\int_a^t \mathrm{tr} A(u)\, \mathrm{d}u\right)$.

II - Résolution explicite

1) Cas des coefficients constants

- $\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : la solution générale de $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la résolution d'un système linéaire homogène.
- $\hookrightarrow$ Dans *Pommellet* : l'application à $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ quand A et B commutent.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la forme générale des solutions d'une EDLH comme somme d'exponentielles multipliées par des polynômes de degré majoré ; l'exemple de $y'' + 2y' + y = 0$; rappeler l'intérêt d'avoir un sea car solution générale = solution homogène + solution particulière ; l'exemple de $y'' + 2y' + y = t\mathrm{e}^t$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Méthodix* : le principe de la méthode de variation des constantes.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : les formules que ça donne en ordre 1 et 2 ; la résolution de $y'' + y = \tan^2 t$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Pommellet* : si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifie $f + f' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Cas des coefficients variables

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la variation des constantes reste vraie, résolution de $y' = \frac{t}{1+t^2} y + 1$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Pommellet* : la méthode de Liouville, résolution de $(t+1)y'' - y' - ty = 0$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Méthodix* : la recherche des solutions DSE d'une équation, l'exemple de $y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, noter qu'on n'obtient qu'une droite vectorielle.

III - Étude qualitative

1) Étude de la stabilité

- $\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : la définition d'une solution (asymptotiquement) stable, le théorème de Lyapunov.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le lemme de Gronwall, l'application au cas où $\|y'(t)\| \leq \beta + \alpha \|y(t)\|$.

2) Étude qualitative des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

- $\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : expliquer qu'on essaie de diagonaliser A, faire quelques dessins.

3) Quelques résultats sur les équations de type $y'' + qy = 0$

- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 4* : si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{-*}$ continue, alors y^2 convexe et si $y \not\equiv 0$, alors y est non-bornée et s'annule au plus une fois.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 4* et *Gourdon* : si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ est $\mathcal{C}^1$ croissante, alors y est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule une infinité de fois (pour la dernière propriété $\mathcal{C}^0$ croissante suffit).
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 4* : le théorème d'entrelacement de Sturm.
- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : $\boxed{\text{les zéros des solutions d'une équation différentielle}}$.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Méthodix (Analyse)
- Oraux X-ENS (Analyse 4)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)

222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

I - Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires

1) Définitions et exemples

↪ Dans *D&G* : la définition d'une EDPL, d'une équation homogène, de l'ordre, d'une solution ; l'exemple de l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ qui est d'ordre 2 ; la définition d'un problème aux frontières, l'exemple de l'équation de Poisson $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega \\ u \equiv 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$; la définition d'un problème de Cauchy, l'exemple de l'équation des ondes $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases}$; la définition de problème bien posé.

2) EDPL d'ordre 1

↪ Dans *ABF* : définir le cadre $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f$ avec $a_i \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega_T}, \mathbb{R}\right)$, où $\overline{\Omega_T} = [0,T] \times \mathbb{R}^n$, on pose $A(t,x) = (t, a_1(t,x), \ldots, a_n(t,x))$; la définition, l'existence et l'unicité de la courbe caractéristique, le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme associé ; l'existence, l'unicité et l'expression de la solution au problème homogène, un exemple ; l'existence, l'unicité et l'expression de la solution au problème non-homogène, retour à l'exemple précédent.

3) EDPL d'ordre 2

↪ Dans *D&G* : définir le cadre $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g$; la définition d'une équation hyperbolique/parabolique/elliptique ; ondes hyperbolique, chaleur parabolique, Poisson elliptique ; ajouter que le caractère hyperbolique/parabolique/elliptique est invariant par changement de variables ; le lien avec les coniques dans le cas des coefficients constants.

4) Résolutions par changement de variables

↪ Dans *Méthodix* : les trois types d'EDP de référence.

↪ Dans *Debeaumarché 3* : les résolutions de $a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ à coefficients constants.

↪ Dans *Méthodix* : un changement de variables pour une EDP à coefficients non-constants.

II - EDPL hyperboliques

1) Équation de transport

↪ Dans *D&G* : le cas de la vitesse constante, courbe caractéristique, solution ; le cas de la vitesse variable.

2) Équation des ondes

↪ Dans *D&G* : le théorème de d'Alembert, la remarque sur les deux types de solutions.

III - Exemple d'EDPL elliptique

↪ Dans *Amar, Matheron* : on veut résoudre $\Delta u \equiv 0$, la définition d'une fonction harmonique ; ajouter que $(x,y) \mapsto \ln\sqrt{x^2+y^2}$ est harmonique ; sur un convexe, les fonctions harmoniques sont les parties réelles de fonctions holomorphes ; l'exemple de $e^x \cos y = \mathrm{Re}\ (e^z)$.

↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : la définition de la propriété de la moyenne, $\boxed{f \text{ vérifie la propriété de la moyenne} \Leftrightarrow f \text{ est harmonique}}$.

IV - Exemples d'EDPL paraboliques

1) Équation de la chaleur

↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : $\boxed{\text{l'équation de la chaleur sur un anneau}}$.

↪ Dans *D&G* : l'équation de la chaleur en dimension d avec la transformation de Fourier ; remarques sur l'effet régularisant et sur la température imposée au début.

2) Équation de Schrödinger

↪ Dans *X-ENS Analyse 4* : l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation de Schrödinger via les séries de Fourier.

Références :

– David, Gosselet (Équations aux dérivées partielles)
– Ababou-Boumaaz, Francheteau (Problèmes classiques en théorie des équations aux dérivées partielles)
– Méthodix (Analyse)
– Debeaumarché (Manuel de mathématiques, Tome 3)
– Amar, Matheron (Analyse complexe)
– Oraux X-ENS (Analyse 4)

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Cadre : On désigne par suite numérique toute suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ici, toutes les suites considérées seront "numériques".

I - Généralités sur la convergence

1) Limites

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une suite convergente, l'unicité de la limite ; quand il n'y a pas convergence on parle de divergence ; ajouter quelques exemples débiles comme $\frac{1}{n}$ ou n ; définition de suite majorée/minorée/bornée ; une suite convergente est bornée et le contre-exemple de la réciproque $(-1)^n$; l'application à la continuité séquentielle et $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2) Théorèmes de convergence

↪ Dans *Gourdon* : la convergence des suites croissantes majorées ; le théorème des gendarmes, appliqué à $\frac{\sin n}{n}$; la définition des suites adjacentes, leur théorème de convergence, l'exemple de $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, l'application au théorème de convergence des séries alternées ; le théorème sur la moyenne de Cesàro (attention à l'orthographe, souvent des erreurs dans les livres), ajouter le contre-exemple de sa réciproque avec $(-1)^n$.

3) Valeurs d'adhérence

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une suite extraite ; convergence des suites extraites de suites convergentes ; la définition d'une valeur d'adhérence et le lien avec les sous-suites ; l'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé ; ajouter qu'une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence, qu'admettre plus d'une valeur d'adhérence implique qu'on diverge, que $n^{(-1)^n}$ diverge en n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence réelle ; l'exemple de $\sin n$, et le théorème de Bolzano-Weierstrass.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition de la liminf et de la limsup pour des suites réelles ; liminf $\leq$ limsup et liminf $=$ limsup $\Leftrightarrow$ convergence ; faire une remarque pour expliquer qu'on peut étendre la notion de valeur d'adhérence à $\overline{\mathbb{R}}$ en considérant l'ensemble des limites des sous-suites convergentes, et que dans $\overline{\mathbb{R}}$, la liminf et la limsup sont les plus petite et grande valeurs d'adhérence ; l'application aux suites sous-additives et au rayon spectral.

↪ Dans *Pommellet* : la règle d'Hadamard et un exemple.

4) Suites de Cauchy

↪ Dans *El Amrani* : la définition d'une suite de Cauchy ; convergente $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow$ bornée ; une suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente converge ; enfin Cauchy $\Rightarrow$ convergente ; ajouter la divergence de la série harmonique.

↪ Dans *Gourdon* : la convergence absolue d'une série implique sa convergence simple.

↪ Dans *Pommellet* : la construction de $\mathbb{R}$.

II - Comportement asymptotique

1) Relations de comparaison de suites

↪ Dans *El Amrani* : la définition de suites négligeables, équivalentes ; des exemples débiles ; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$.

↪ Dans *Gourdon* : l'exercice sur $u_n = \sqrt{n + u_{n+1}}$ et $u_1 = 1$.

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : les partitions d'un entier en parts fixées.

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{les théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible}}$; la formule de Stirling.

2) Sommation et relations de comparaison

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de sommation des équivalents (qui restent vrais avec les suites négligeables) et son application à la série harmonique.

III - Étude de quelques familles de suites

1) Suites arithmétiques, géométriques

↪ *Sans référence* : les définitions et les résultats de convergence.

2) Suites homographiques

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une suite homographique, sa valeur en n avec la remarque sur l'existence, un exemple.

3) Suites récurrentes

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une suite récurrente d'ordre h, le lien entre limite et point fixe ; les résultats de monotonie pour l'ordre 1 (faire des dessins) ; ajouter la suite de Fibonacci ; l'exercice avec $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$.

↪ Dans *Rouvière* : l'exercice sur les points fixes (attractifs, super-attractifs, répulsifs) ; ajouter qu'on ne peut rien dire quand la valeur absolue de la dérivée au point fixe est 1 avec sin et sh ; mettre l'exemple de l'approximation du nombre d'or, puis la méthode de Newton et l'application de la méthode pour obtenir une meilleure convergence vers le nombre d'or.

↪ *Sans référence* : $\boxed{\text{le processus de Galton-Watson}}$.

4) Suites équiréparties

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : la définition, le critère de Weyl, l'application aux sommes de Riemann.

↪ Dans *Gourdon* : un exemple de somme de Riemann.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- El Amrani (Suites et séries numériques et de fonctions)
- Oraux X-ENS (Analyse 2)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cadre : (X,d) est un espace métrique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; sauf mention contraire, les fonctions prolongeables de façon $\mathcal{C}^k$ seront prolongées de façon $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

I - Comparaison de suites et de fonctions

1) Relations de comparaison

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : pour $f : I \to \mathbb{K}$, où I intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ non-réduit à un singleton (au passage, *Rombaldi* métrise $\overline{\mathbb{R}}$), les définitions de domination/négligeabilité/équivalence ; $f = o(g) \Leftrightarrow f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ où $\varepsilon \to 0$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : si $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma x}\right)$; $f \underset{a}{=} o(1) \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow f$ bornée au voisinage de a ; l'additivité et la multiplicativité de o et $\mathcal{O}$; $f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g$ avec $\varphi \to 1$; la stabilité de $\sim$, et des contre-exemples ; remarquer qu'on a la même chose sur les suites en posant $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $x_0 = +\infty$.

2) Développement limité

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : I est un intervalle de $\mathbb{R}$; la définition d'un DL, les polynômes admettent des DL en tout point ; l'exemple de $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$; l'unicité du DL ; le lien avec la parité ; DL_0 en $a \Leftrightarrow$ continue en a, DL_1 en $a \Leftrightarrow$ dérivable en a, le contre-exemple de $x^3 \sin \frac{1}{x}$ qui a un DL_2 en 0 sans être 2 fois dérivable en 0 ; la formule de Taylor-Young ; des exemples comme e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$.

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : l'application au théorème central limite.

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : l'exemple de $\cos\sqrt{x}$; les opérations sur les DL ; des exemples comme $\mathrm{ch}\, x$, $\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$; la composition des DL, l'exemple de $\frac{1}{\cos x}$; la primitive d'un DL, l'exemple de $\ln(1+x)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : l'application aux formes indéterminées, comme $\frac{\tan x - x}{\sin x - x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -2$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : l'étude locale d'une courbe plane et des dessins.

3) Développement asymptotique

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une échelle de comparaison, des exemples en $+\infty$ comme $\{x^\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ou $\left\{x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x} (\ln x)^\gamma \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : l'exemple de $\left\{(x-a)^k \middle| k \in \mathbb{N}\right\}$ en a.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'un développement asymptotique, l'unicité ; l'exemple des DL.

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : $x^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$; ajouter la stabilité par addition, troncature, produit et composition.

II - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

1) Intégration des relations de comparaison

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème d'intégration des relations de comparaison, l'exercice où $\frac{g'(x)}{g(x)} \sim \frac{\mu}{x}$, l'exemple du DL de $\mathrm{Li}(x)$.

2) Méthode de Laplace

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* et *Rouvière* : la méthode de Laplace et application à la formule de Stirling.

3) D'autres exemples

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : le nombre de zéros des solutions d'une ED, son contre-exemple.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le développement de ζ en 1^+.

III - Exemples de développements asymptotiques de suites

1) Séries numériques

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la sommation des relations de comparaison, le contre-exemple sans positivité ; la comparaison série/intégrale, qui sert aux séries de Bertrand ; le DL de la série harmonique.

2) Suites récurrentes

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : la méthode des petits pas, l'exemple de $\sin x$, de $\ln(1+x)$.

3) Suites définies de façon implicite

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : des exemples à prendre dans les exercices.

4) Formule d'Euler-MacLaurin

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la formule, qu'on applique à la série harmonique, ou à $\ln n!$.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Cadre : E est un ensemble, $f : I \to E$ où $I \subset E$ est un sous-ensemble stable par f, c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$. Quand $u_0 \in I$, on définit ainsi correctement $u_{n+1} = f(u_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

I - Dépendance vis à vis de f

1) Cas des fonctions monotones ; $E = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème de monotonie des suites récurrentes d'ordre 1 ; ajouter l'exemple $I = \mathbb{R}^+$ et $f : x \mapsto x^2$.

2) Cas des fonctions continues ; E un evn

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la proposition qui dit que si (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f ; l'exemple de $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : si $f : [a,b] \to [a,b]$ est continue, alors (u_n) converge $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : le contre-exemple avec la série des $\frac{1}{n}$.

3) Suites arithmétiques et géométriques

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition et les propriétés associées aux suites arithmétiques et géométriques.

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : faire de même avec les suites arithmético-géométriques.

4) Suites homographiques ; $E = \mathbb{C}$

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition, la proposition avec les points fixes et la remarque sur la bonne définition.

5) Récurrence linéaires à coefficients constants ; $E = \mathbb{C}^h$

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : écrire $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice compagnon ; définir ce qu'est une suite récurrente linéaire d'ordre h ; le théorème sur l'équation caractéristique.

6) Cas des fonctions contractantes ; E un espace métrique complet

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème du point fixe de Picard, ajouter un exemple comme $u_{n+1} = \frac{1}{\operatorname{ch} u_n}$, et le corollaire qui dit qu'il suffit qu'une puissance de f sont contractante pour que f ait un point fixe. La généralisation dans le cas des espaces métriques compacts ; le contre-exemple où $k = 1$ dans E non compact.

$\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

II - Classification des points fixes

1) Cas réel ; $E = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : la définition d'un point fixe attractif, superattractif et répulsif, avec les résultats de limite, vitesse de convergence. Les deux exemples pour le cas critique.

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : mettre en annexe les dessins dans les 3 cas.

2) Cas vectoriel ; $E = \mathbb{R}^m$

$\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : le théorème qui donne un critère d'attractivité et le lemme qui le précède.

3) Orbites périodiques ; $E = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 1* : la définition d'une orbite périodique, l'exemple de $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$. Le théorème de Sarkowski ; ajouter le contre-exemple qui montre qu'il faut un intervalle stable : $f : \left| \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \to & [1,2] \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} \end{array} \right.$ dont tous les points sont de période 3.

III - Applications en analyse numérique et en probabilités

1) Méthode de Newton

$\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : le théorème qui valide la $\boxed{\text{méthode de Newton}}$ et l'application au nombre d'or.

2) Méthode de la sécante

$\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : l'explication de la méthode de la sécante et la présentation de son inconvénient.

3) Processus de Galton-Watson

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : la présentation du processus de $\boxed{\text{Galton-Watson}}$ et de ses résultats.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Oraux X-ENS (Analyse 1)

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

I - Notions de continuité et de dérivabilité

1) Continuité

↪ Dans *Rombaldi* : la définition de la continuité, des exemples et le contre-exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. La continuité séquentielle, et un exemple. La proposition sur le prolongement continu au bord d'un intervalle, exemple et contre-exemple. Les résultats de continuité avec les opérations ; l'exemple des fonctions polynomiales. La définition de l'uniforme continuité, un exemple, cela entraîne la continuité, la fonction carrée est continue non-uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Heine.

2) Dérivabilité

↪ Dans *Rombaldi* : la définition de la dérivabilité, le lien avec les développements limités à l'ordre 1, l'application à $x^2\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

↪ Dans *Gourdon* : une dérivée n'est pas forcément continue, l'exemple de $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$. Les résultats de dérivabilité avec les opérations ; la dérivée de l'inverse d'une bijection dérivable, en application, la dérivée d'arcsin. La définition de la classe $\mathcal{C}^n$.

↪ Dans *Hauchecorne* : être de classe $\mathcal{C}^n$ n'équivaut pas à admettre un DL_n ; un contre-exemple.

↪ Dans *Gourdon* : la formule de Leibniz.

3) Lien entre continuité et dérivabilité

↪ Dans *Rombaldi* : la dérivabilité implique la continuité et les fonctions de Van der Waerden et de Weierstrass.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la densité des fonctions continues nulle part dérivables, faire remarquer que ça utilise le théorème de Weierstrass et les accroissements finis.

II - Applications de la continuité et de la dérivabilité

1) Théorème des valeurs intermédiaires

↪ Dans *Rombaldi* : l'énoncé et le contre-exemple qui suit. La reformulation qui dit que f s'annule si $f(a)f(b) < 0$.

↪ Dans *Rouvière* : la méthode de Newton.

↪ Dans *Rombaldi* : il y a des fonctions discontinues qui vérifient cette propriété, théorème de Darboux, exemple de la dérivée de $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Si f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, alors f est continue $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$ est fermé.

2) Théorème de Rolle

↪ Dans *Gourdon* : la dérivée s'annule en les extremums, théorème de Rolle. Contre-exemple de l'exponentielle complexe.

↪ Dans *Rombaldi* : le polynôme dérivé d'un polynôme de de degré supérieur ou égal à 2 scindé est scindé.

3) Accroissements finis

↪ Dans *Gourdon* : le théorème des accroissements finis.

↪ Dans *Rombaldi* : le lien avec l'étude des variations et le contre-exemple qui montre la nécessité d'avoir un intervalle.

↪ *Sans référence* : le théorème de la limite de la dérivée (si f est continue sur I et dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $f'(x)$ admet une limite l quand $x \to a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$).

↪ Dans *Gourdon* : l'inégalité des accroissements finis et la règle de l'Hospital.

4) Formules de Taylor

↪ Dans *Gourdon* : la formule de Taylor-Lagrange, Taylor-Young, Taylor avec reste intégral.

↪ Dans *Rombaldi* : les inégalités de Kolmogorov.

III - Suites de fonctions

↪ Dans *Gourdon* : la limite uniforme de fonctions continues est continue, le contre-exemple d'une fonction qui converge simplement, et le théorème de Dini.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de Weierstrass.

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

IV - Études de classes de fonctions particulières

1) Fonctions convexes

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une fonction convexe, la croissance des pentes, l'exemple de la fonction exponentielle. Le théorème de continuité et de dérivabilité à gauche, à droite, à l'intérieur de l'intervalle.

↪ Dans *Hauchecorne* : une fonction convexe sur $\mathbb{R}^+$ et discontinue en 0.

↪ Dans *Gourdon* : les caractérisations des fonctions convexes quand elles sont dérivables, deux fois dérivables.

2) Fonctions lipschitziennes

↪ Dans *Rombaldi* : la définition des fonctions lipschitziennes, elles sont uniformément continues.

↪ Dans *Hauchecorne* : le contre-exemple de la réciproque.

↪ Dans *Rombaldi* : une fonction dérivable bornée est lipschitzienne, et le théorème de Rademacher.

3) Équicontinuité

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition de l'équicontinuité, le théorème d'Ascoli, un exemple et l'application au théorème d'Arzela-Peano.

Références :

– Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
– Gourdon (Analyse)
– Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
– Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
– Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I - Fonctions monotones

1) Définitions et premières propriétés

- ↪ Dans *RDO3* : la définition d'une fonction (strictement) (dé)croissante/monotone ; ajouter l'exemple de $\frac{1}{x}$, de la fonction de répartition ; la limite simple de fonctions monotones ; des résultats de stabilité, l'absence de structure de sev.
- ↪ Dans *Rombaldi* : le comportement de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ selon la monotonie de f.

2) Régularité des fonctions monotones

- ↪ Dans *RDO3* : théorème limite monotone, limite à gauche/droite finie sur $\overset{\circ}{I}$; points de discontinuité dénombrables.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : un exemple de fonction strictement croissante sur $[0,1]$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- ↪ Dans *RDO3* : la continuité d'une fonction monotone ; le théorème de la fonction réciproque, un homéomorphisme de I sur J est strictement monotone ; ajouter l'exemple de sin et arcsin ; le lien entre sens de variation et dérivée à droite ; la caractérisation des applications strictement monotones et le contre-exemple de $t \mapsto t^3$.
- ↪ Dans *Pommellet* : une fonction monotone est dérivable presque partout (ADMIS).
- ↪ Dans *Briane, Pagès* : l'exemple de l'escalier de Cantor.

3) Suites de fonctions monotones

- ↪ Dans *Nourdin* : le deuxième théorème de Dini, et son application au théorème de Glivenko-Cantelli.

II - Fonctions convexes

1) Définition et premières propriétés

- ↪ Dans *Rombaldi* : la définition d'une fonction (strictement) convexe/concave ; la norme est convexe mais pas strictement convexe ; le passage à la limite simple, la combinaison linéaire positive de fonctions convexes ; les fonctions affines sont les fonctions concaves et convexes ; le théorème avec l'épigraphe, la représentation graphique sous les cordes.
- ↪ Dans *OA* : le sup de fonctions convexes et une application.
- ↪ Dans *Rombaldi* : des contre-exemples pour le produit et la composée.

2) Caractérisation des fonctions convexes

- ↪ Dans *Rombaldi* : en dimension 1, il suffit d'avoir $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : le contre-exemple de la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$.
- ↪ Dans *Rombaldi* : le théorème des pentes croissantes ; les fonctions convexes majorées sont constantes, le contre-exemple de $\frac{1}{1+x}$ convexe majorée sur $\mathbb{R}^+$, la résolution de $y'' - qy = 0$ pour $q \geq 0$; la caractérisation des fonctions (strictement) convexes dérivables, les fonctions convexes dérivables sont $\mathcal{C}^1$; la caractérisation des fonctions convexes 2 fois dérivables, des exemples comme exp, ln, Γ, le contre-exemple de x^4 qui est strictement convexe (alors que $12x^2$ s'annule en 0).
- ↪ *Sans référence* : $\boxed{\text{le processus de Galton-Watson}}$.
- ↪ Dans *OA* : passage en dimension supérieure, les caractérisations de la convexité, application à $\langle Ax, x\rangle$.

3) Régularité (en dimension 1)

- ↪ Dans *Rombaldi* : le lien avec les dérivées à gauche/droite, convexe sur $I \Rightarrow$ dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, contre-exemple ; convexe sur $I \Leftrightarrow$ continue, dérivable à droite sur I et de dérivée à droite croissante ; contre-exemple avec $|x|$.

III - Applications

1) Comparaison série-intégrale

- ↪ Dans *Gourdon* : le théorème et l'application à la série harmonique.

2) Inégalités de convexité

- ↪ Dans *Rombaldi* : $e^x \geq x+1$, $\ln x \leq x-1$, $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; les inégalités entre les moyennes ; les inégalités de Young, Hölder, Minkowski (ajouter que $(\mathrm{L}^p, \|.\|_p)$ est un evn et que $p \mapsto \|.\|_p$ est croissante) ; Jensen pour Σ et $\int$.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : Jensen pour $\mathbb{E}$, application à $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$, la positivité de la variance.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : l'inégalité de Hoeffding.
- ↪ Dans *Hiriart-Urruty* : l'inégalité de Kantorovitch.

3) Optimisation

- ↪ Dans *OA* : ensembles de niveau d'une fonction convexe, unicité du minimum ; ajouter qu'un minimum local est global.
- ↪ Dans *Rouvière* : le déterminant est strictement log-convexe ; l'ellipsoïde de John-Loewner ; $\boxed{\text{la méthode de Newton}}$.
- ↪ Dans *Hiriart-Urruty* : l'algorithme du gradient à pas optimal.

Références :

- Ramis, Deschamps, Odoux (Cours de mathématiques, Tome 3)
- Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)
- Objectif Agrégation
- Gourdon (Analyse)
- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Ouvrard (Probabilités 2)
- Hiriart-Urruty (Optimisation et analyse convexe)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Généralités sur les séries

1) Séries, Sommes partielles, Restes

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une série, d'une somme partielle, d'un reste ; les restes des séries convergentes tendent vers 0.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : le lemme de Borel-Cantelli gentil.
- ↪ Dans *Gourdon* : l'exemple des séries arithmétiques, géométriques.
- ↪ Dans *X-ENS Analyse 1* : $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

2) Critère de Cauchy et convergence absolue

- ↪ Dans *Gourdon* : le critère de Cauchy pour les séries ; $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$ et le contre-exemple de la série harmonique ; la définition de convergence absolue, elle implique la convergence car $\mathbb{K}$ est un Banach (ce qui motive la partie suivante) ; ajouter le contre-exemple de la réciproque $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et la définition de la semi-convergence.

II - Séries à termes positifs

1) Théorèmes de comparaison

- ↪ Dans *Gourdon* : $\sum u_n$ à termes positifs converge $\Leftrightarrow$ ses sommes partielles sont majorées ; la comparaison de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ quand $0 \leq u_n \leq v_n$; $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leq 1$; les théorèmes de comparaison pour $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
- ↪ Dans *Pommellet* : $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ diverge.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : le contre-exemple avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = v_n$.
- ↪ Dans *Gourdon* : l'exercice qui dit que $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ diverge ; le théorème de sommation des équivalents avec les restes et les sommes partielles, le développement de la série harmonique ; la règle de comparaison série/intégrale, le critère de Bertrand (qui implique le critère de Riemann au passage), l'application à $\sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

2) Critères de convergence

- ↪ Dans *Gourdon* : le critère de comparaison logarithmique (à partir d'un certain rang) et son corollaire quand $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$.
- ↪ Dans *El Amrani* : les règles de Cauchy et de d'Alembert (les adapter aux séries à termes positifs), et les exemples de $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ et de $\sum \frac{a^n}{n}$.

III - Séries à termes de signe non-nécessairement constant

1) Séries alternées

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une série alternée, le critère spécial ; ajouter les exemples de $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$.

2) Transformation d'Abel

- ↪ Dans *Gourdon* : expliquer en quoi elle consiste ; la règle d'Abel, la remarque sur le critère spécial des séries alternées ; les exercices sur $\sum \alpha_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ et $\sum \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\sqrt{n}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}$.

3) Produit de Cauchy

- ↪ Dans *El Amrani* : la définition du produit de Cauchy, le théorème sur le produit de Cauchy, un contre-exemple ; l'application à $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.

4) Groupement et permutation des termes

- ↪ Dans *El Amrani* : la définition du regroupement de termes, l'exemple de $\sum (-1)^n$; la proposition de sommation par paquets.
- ↪ Dans *Hauchecorne* : la modification de l'ordre des termes qui change la somme.
- ↪ Dans *El Amrani* : la définition de commutativement convergente ; cela équivaut à la convergence absolue.
- ↪ Dans *X-ENS Analyse 1* : $\boxed{\text{le théorème de Riemann}}$.

IV - Utilisation de fonctions

1) Séries entières

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une série entière, le lemme d'Abel qui permet ensuite de bien définir le rayon de convergence ; $\boxed{\text{le théorème d'Abel angulaire et le théorème taubérien faible}}$ avec exemples et contre-exemples.

2) Séries de Fourier

- ↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une série de Fourier et ses coefficients, l'égalité de Parseval, la convergence de la série de Fourier sous de bonnes hypothèses ; l'application au calcul des sommes des séries $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Ouvrard (Probabilités 2)
- Oraux X-ENS (Analyse 1)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- El Amrani (Suites et séries numériques et de fonctions)

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

I - Principe des méthodes itératives

1) Théorème de point fixe

- ↪ Dans *Demailly* : la définition d'une application contractante, le théorème de point fixe avec une estimation de la vitesse.
- ↪ Dans *Rouvière* : des contre-exemples.
- ↪ Dans *Demailly* : la généralisation quand il existe une itérée qui soit contractante et l'application à la résolution de $f(x) = 0$.

2) Attraction et répulsion

- ↪ Dans *Rouvière* : l'exercice sur l'attraction, la répulsion et la super-attraction (faire des dessins) ; expliquer la bidouille avec f^{-1} quand il y a répulsion.
- ↪ Dans *Rouvière* et *Demailly* : les cas litigieux avec $\sin x$, $\operatorname{sh} x$ et $1 - x$.
- ↪ Dans *Rouvière* : l'application au nombre d'or.
- ↪ Dans *Demailly* : la résolution de $x^3 - 4x + 1 = 0$ et le théorème d'attractivité dans le cas de $\mathbb{R}^n$ avec le rayon spectral.

II - Cas où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) Méthode de dichotomie

- ↪ Dans *Pommellet* : le théorème des valeurs intermédiaires, l'explication de la méthode, la vitesse ; remarquer que ça ne s'adapte pas à la dimension supérieure.

2) Méthode de Newton

- ↪ Dans *Rouvière* : $\boxed{\text{la méthode de Newton}}$, le dessin, le calcul de $\sqrt{y}$, l'application au nombre d'or, l'heuristique.
- ↪ Dans *Pommellet* : l'application aux polynômes scindés aux racines simples.

3) Méthode de la sécante

- ↪ Dans *Demailly* : expliquer pourquoi la méthode de Newton n'est pas toujours indiquée ; énoncer le théorème et son explication ; faire un dessin ; inconvénient quand les points sont trop proches.

III - Cas où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

1) Quand F est affine

- ↪ Dans *Ciarlet* : l'explication de la résolution de $Au = b$, la transformation en un problème de point fixe ; la définition d'une méthode convergente ; rappeler que méthode convergente $\Leftrightarrow \rho(B) < 1 \Leftrightarrow \exists N, N(B) < 1$; présenter les différentes méthodes pour décomposer A (Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation) ; les résultats de convergence de ces méthodes.

2) Méthodes de descente

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : quelques généralités sur les méthodes de descente, sur la méthode du gradient.
- ↪ Dans *Hiriart-Urruty* : $\boxed{\text{l'algorithme du gradient à pas optimal}}$.

3) Méthode de Newton-Raphson

- ↪ Dans *Demailly* : l'explication de la méthode, le théorème de convergence et un exemple de résolution de système.

Références :

- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Ciarlet (Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation)
- Objectif Agrégation
- Hiriart-Urruty (Optimisation et analyse convexe)

234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, λ est la mesure de Lebesgue.

I - Définitions et premières propriétés

1) Espaces $\mathcal{L}^p$

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la définition de $\mathcal{L}^p(\mu)$, de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$; ajouter l'exemple de la mesure de comptage. Les inégalités de Hölder, Cauchy-Schwarz et Minkowski.

2) Espaces L^p

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : expliquer pourquoi et comment on quotiente.

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la définition de $\mathrm{L}^p(\mu)$, c'est un evn.

$\hookrightarrow$ Dans *Brézis* : le théorème de $\boxed{\text{Riesz-Fischer}}$.

3) Convergence dans les espaces L^p

$\hookrightarrow$ Dans *Brézis* : la convergence dans L^p implique la convergence presque partout d'une sous-suite.

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : le contre-exemple qui montre que c'est bien une sous-suite qui converge ; la convergence L^p-dominée. Ajouter le contre-exemple de $n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ qui n'est pas dominée.

4) Densité dans les espaces L^p

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : les fonctions étagées (attention, il faut bien distinguer le cas $p = \infty$), les fonctions en escalier à support compact.

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Ajouter le lemme de Riemann-Lebesgue.

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la densité de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ dans L^2.

$\hookrightarrow$ Dans *Brézis* : L^p est séparable pour $p < \infty$, L^∞ n'est pas séparable.

II - Relations entre les espaces L^p

1) Inclusions des espaces L^p

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : pour une mesure finie, $0 < p \leq q \leq \infty \Rightarrow \mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^p$. L'inclusion est renversée pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. L'exemple qui montre que $\mathrm{L}^1(\lambda)$ et $\mathrm{L}^2(\lambda)$ ne sont pas comparables. La proposition qui fournit les résultats sur le passage à la limite $p \to +\infty$: $\|f\|_\infty \leq \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p$ et $f \in \bigcup_{p\geq 1} \mathrm{L}^p(\mu) \Rightarrow \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

2) Dualité

$\hookrightarrow$ Dans *Brézis* : le théorème de représentation de Riesz, le dual et la réflexivité des L^p, $1 < p < \infty$. Riesz pour L^1, le contre-exemple qui montre que ça foire pour L^∞, le problème sur la dualité de L^1, de L^∞.

III - Exemples d'utilisation des espaces L^p

1) Convolution

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : la définition du produit de convolution, l'inégalité de Young, la propriété de régularisation.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la convolée d'une fonction L^1 avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\hookrightarrow$ Dans *Hirsch, Lacombe* : on rappelle que $(\mathrm{L}^1, +, \star)$ n'est pas unitaire, on introduit les approximation de l'unité et les résultats associés à la convolution. On indique que ça permet de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans L^p.

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : application à l'inégalité de Hardy.

2) En probabilités

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la convergence L^p implique la convergence en probabilité, le contre-exemple de la réciproque. L'uniforme intégrabilité fournit la réciproque. Donner la loi forte des grands nombres et le théorème central limite.

IV - Le cas particulier de L^2

1) Conséquences de la structure hilbertienne

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : donner le produit scalaire L^2 ; du coup, on a le théorème de projection sur un convexe fermé. L^2 est son propre dual, rappeler la représentation de Riesz dans ce cas.

2) $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ et les séries de Fourier

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : rappeler quelques notations, (e_n) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ et en déduire des résultats de convergence. Donner l'égalité de Parseval et quelques applications au calcul de séries.

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : l'inégalité de Bernstein.

3) Transformation de Fourier

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition de la transformée de Fourier.

$\hookrightarrow$ Dans *Rudin* : propriétés de la transformée de Fourier, transformée de Fourier du produit de convolution, inversion de Fourier et injectivité.

$\hookrightarrow$ Dans *Faraut* et *Rudin* : la transformée de $\boxed{\text{Fourier-Plancherel}}$.

Références :

- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Hirsch, Lacombe (Éléments d'analyse fonctionnelle)
- Objectif Agrégation
- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Faraut (Calcul intégral)

235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

I - Limites et intégration

1) Suites et séries de fonctions

↪ Dans *Briane, Pagès* : le théorème de Beppo-Levi, et l'exemple qui traite de la convergence de $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\, dx$; le lemme de Fatou et son application : $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty \Rightarrow f \in L^1(\mu)$. Si f est croissante sur $[0,1]$, λ-pp dérivable et continue en 0 et 1 : $\int_0^1 f'(x)\, dx \leq f(1) - f(0)$ et un exemple pour lequel l'inégalité est stricte. Le théorème de convergence dominée ; si f partout dérivable sur $[0,1]$ et f' bornée, alors l'inégalité précédente est une égalité. La convergence dominée pour les séries. En application : le lemme de Borel-Cantelli et la continuité de l'intégrale par rapport à la mesure.

2) Régularité des intégrales à paramètres

↪ Dans *Briane, Pagès* : le théorème de continuité sous le signe intégrale.

↪ Dans *Hauchecorne* : un contre-exemple pour justifier l'hypothèse de domination.

↪ Dans *Briane, Pagès* : le théorème de dérivation sous le signe intégrale ; ajouter $I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} e^{-t}\, dt = \arctan x$.

↪ Dans *Gourdon* : la fonction Γ est $\mathcal{C}^\infty$ et donner ses dérivées.

II - Les théorèmes de Fubini

↪ Dans *Briane, Pagès* : les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue et le contre-exemple $\int_{\mathbb{R}^+\times[0,1]} \left(2e^{-2xy} - e^{-xy}\right)\, dxdy$.

↪ Dans *Ouvrard 2* : En application, l'inversion de la transformée de Fourier.

↪ Dans *Briane, Pagès* : l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$.

III - Interversions de limites

1) Continuité et dérivabilité

↪ Dans *Gourdon* : continuité de la fonction limite et dérivabilité/caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction limite. Remarquer que ces résultats s'adaptent aux séries de fonctions.

↪ Dans *Hauchecorne* : le contre-exemple $\sum_{n\geq 0} (1-x)x^n$.

2) Séries entières

↪ Dans *Gourdon* : le lemme d'Abel, la définition du rayon de convergence et du disque de convergence.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : l'holomorphie et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la série entière sur le disque de convergence. Remarquer qu'on ne peut rien dire au bord.

↪ Dans *Gourdon* : les $\boxed{\text{théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible}}$; ajouter l'application $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3) Séries doubles

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de permutation des sommations.

↪ Dans *Hauchecorne* : un contre-exemple.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : les nombres de Bell en application.

IV - Application à l'analyse de Fourier

↪ Dans *Gourdon* : la définition des coefficients de Fourier, le théorème de Riemann-Lebesgue, l'application à la formule sommatoire de Poisson.

↪ Dans *Briane, Pagès* : la définition de la transformée de Fourier, le théorème de Riemann-Lebesgue, l'exemple de la transformée de Fourier de la gaussienne.

↪ Dans *Rudin* et *Faraut* : la transformée de $\boxed{\text{Fourier-Plancherel}}$.

Références :

- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Gourdon (Analyse)
- Ouvrard (Probabilités 2)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 1)
- Rudin (Analyse réelle et complexe)
- Faraut (Calcul intégral)

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

I - Méthodes directes

1) Primitives

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : une primitive usuelle, une fraction rationnelle et la méthode pour les polynômes en sinus/cosinus.

2) Intégration par parties

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la formule et des exemples : Wallis et fonction Gamma d'Euler aux points entiers.

3) Changement de variable

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la formule de changement de variable pour une variable, application règle de Bioche et un exemple ; la formule de changement de variable multidimensionnel, application coordonnées polaires/cartésiennes.

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : l'exemple du volume de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

4) Théorème de Fubini

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la définition de l'intégrabilité, le théorème de Fubini (pour les fonctions intégrables et les fonctions positives).

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : l'exemple de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

II - Utilisation de convergences

1) Sommes de Riemann

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : définition, théorème de convergence et exemple de $I(\rho) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2\right)\, \mathrm{d}\theta$.

2) Suites et séries de fonctions

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : le théorème de convergence dominée, une application à la continuité de la transformée de Fourier.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{l'intégrale de Fresnel}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : le théorème de convergence monotone, la version séries du théorème de convergence dominée. Ajouter l'exemple de $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-nx}x^2$ qui fournit $\zeta(3)$ en fonction d'une intégrale.

3) Régularité des intégrales à paramètres

$\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégrale.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ et la transformée de Fourier de la gaussienne.

III - Analyse complexe

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition de l'indice d'un point par rapport à un lacet (faire un dessin) et le théorème des résidus.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : le calcul de $\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ et la $\boxed{\text{formule des compléments}}$ (faire un dessin).

IV - Calcul approché d'intégrales

1) Méthode des rectangles

$\hookrightarrow$ Dans *Demailly* : l'utilisation de la formule de Chasles, le lien avec les sommes de Riemann. Définir les méthodes des rectangles à gauche, droite, du point milieu (faire des dessins). Donner une idée des résultats pour des subdivisions grossières de [0,1] pour la fonction $x \mapsto x^2$ à gauche, à droite, et au milieu.

2) Méthode de quadrature de Gauss

$\hookrightarrow$ Dans *Rombaldi* : la définition d'une fonction poids, du produit scalaire L^2 associé, la définition des polynômes orthonormaux, la proposition qui donne les coefficients d'interpolation et la majoration de l'erreur. Application avec les polynômes de Tchebychev qui donnent une formule de quadrature.

3) Méthode de Monte-Carlo

$\hookrightarrow$ Dans *Toulouse* : l'introduction de la méthode, la loi des grands nombres, le théorème central limite. Construire des intervalles de confiance : distinguer le cas où la variance est connue de celui où elle est inconnue (donner Slutsky).

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Objectif Agrégation
- Amar, Matheron (Analyse complexe)
- Demailly (Analyse numérique et équations différentielles)
- Rombaldi (Interpolation et approximation)
- Toulouse (Thèmes de probabilités et statistiques)

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Cadre : $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, E un espace métrique ; on considère $f : E \times X \to \mathbb{C}$, et on étudie $F(t) = \int_X f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

I - Étude de la régularité

1) Continuité

- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de continuité ; ajouter l'exemple de la primitive, application au théorème sur les séries avec $\mu = \delta_{\mathbb{N}}$; remarquer qu'on peut affaiblir l'hypothèse de domination en domination sur tout compact ; l'exemple de la fonction Γ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : le contre-exemple de $F(t) = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ non-continue en 0.

2) Dérivabilité

- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de dérivation classique, des résultats similaires pour la classe $\mathcal{C}^k$, la généralisation à $\mathbb{R}^d$, application au théorème sur les séries avec $\mu = \delta_{\mathbb{N}}$; la fonction Γ est $\mathcal{C}^\infty$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : un contre-exemple.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : des exemples comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \arctan x$, $I(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}\,\mathrm{d}x$; la formule sommatoire de Poisson et son corollaire.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 4* : l'équation de Bessel.

3) Holomorphie

- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale ; Γ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\, s > 0\}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le prolongement de la fonction Γ à $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$.

II - Convolution

1) Convolution et régularisation

- $\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la définition du produit de convolution, des résultats d'existence (si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ et $f \in \mathrm{L}^p$, $g \in \mathrm{L}^q$ alors $f \star g \in \mathrm{L}^r$ et si $r = \infty$, $f \star g$ est uniformément continue et tend vers 0 en $\pm\infty$).
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de convolution et régularisation, pour $g \in \mathcal{C}^\infty$, $g \in \mathcal{C}_c^\infty$, des exemples.

2) Identités approchées

- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une identité approchée, un exemple de méthode de construction, un exemple ; le théorème d'approximation ; l'exemple de la troncature, densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p ; le noyau de Fejér est une identité approchée sur $\mathbb{T}$, $\sigma_N(f) = f \star K_N$, le théorème de Fejér et en application (e_n) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

III - Transformation de Fourier et de Laplace

1) Transformation de Fourier

- $\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la transformation de Fourier L^1, $\mathcal{F} : \mathrm{L}^1 \to \mathcal{C}^0$; le lemme de Riemann-Lebesgue, $xf(x) \in \mathrm{L}^1 \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{C}^1$; si $f \in \mathrm{L}^1$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathrm{L}^1$ et si f tend vers en l'infini, alors $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\mathrm{i}\xi\widehat{f}$; l'injectivité et la formule d'inversion.
- $\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : $\boxed{\text{les polynômes orthogonaux}}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Ouvrard 2* : la définition de la fonction caractéristique, le lien avec la transformée de Fourier dans le cas d'une va à densité ; l'injectivité donne la caractérisation de la loi ; des exemples comme $\mathcal{E}(1)$, $\mathcal{P}(\lambda)$ ou $\mathcal{N}(0,1)$; lien entre les moments de X et la régularité de φ_X.

2) Transformation de Laplace

- $\hookrightarrow$ Dans *Pommellet* et *Madère* : des choses sur la transformation de Laplace hors probabilités.
- $\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la transformation de Laplace, des exemples, caractérisation de la loi, l'analyticité ; ajouter l'inégalité de Hoeffding.

IV - Étude asymptotique

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : Cesàro (pour les fonctions localement intégrable) et $\boxed{\text{Fresnel}}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Rouvière* : la méthode de Laplace et la formule de Stirling.
- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : la méthode de la phase stationnaire et la fonction d'Airy.

Références :

- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Gourdon (Analyse)
- Oraux X-ENS (Analyse 4)
- Objectif Agrégation
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Ouvrard (Probabilités 2)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Madère (Leçons d'analyse)
- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

240 - Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

↪ Les théorèmes s'énoncent pour des fonctions au départ de $\mathbb{R}$ mais pourront se généraliser sans peine à des fonctions au départ de $\mathbb{R}^d$.

↪ Attention aux conventions concernant la transformation de Fourier (on peut faire au brouillon un tableau des conventions utilisées selon les livres pour s'y retrouver).

I - Convolution

1) Définitions et exemples

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition du produit de convolution quand il est bien défini ; l'idée de la moyenne pondérée, l'exemple de $f \star \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}$; la remarque pour définir le produit de convolution des fonctions 2π-périodiques ; la commutativité de $\star$.

↪ Dans *Briane, Pagès* : $\star$ n'est pas associative.

2) Conditions d'existence et support

↪ Dans *Briane, Pagès* : si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$, $f \in \mathrm{L}^p$, $g \in \mathrm{L}^q$, alors $f \star g$ est bien définie, $f \star g \in \mathrm{L}^r$ et $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$; ajouter en remarque que la convolution par une fonction L^1 n'apporte pas de régularité.

↪ Dans *Laamri* : la définition de supp f, ajouter que supp $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \varnothing$; la proposition sur supp $f \star g$, en application supp $\mathbb{1}_A \star \mathbb{1}_B \subset \overline{A+B}$.

3) Régularisation

↪ Dans *Objectif Agrégation* : si $f \in \mathrm{L}^p$, $g \in \mathrm{L}^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $f \star g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$; la propriété sur convolution et dérivation, et les applications pour $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ ou $g \in \mathcal{C}^\infty$.

↪ Dans *Laamri* : la convolution entre $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ et $\mathcal{C}_c^k$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une identité approchée, l'exemple des gaussiennes ; le théorème d'approximation et des applications ($\mathcal{C}_c^\infty$ dense dans L^p, le noyau de Fejér, son utilité en séries de Fourier, $\left(e^{in\cdot}\right)_n$ base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$).

II - Transformation de Fourier

1) Dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$

↪ Dans *Rudin* : la définition de $\widehat{f}$ (et on la garde !).

↪ Dans *Laamri* : l'exemple de $\widehat{\mathbb{1}_{\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]}}$.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le lemme de Riemann-Lebesgue.

↪ Dans *Rudin* : tout un catalogue de propriétés.

↪ Dans *Zuily* : la transformée de Fourier de la gaussienne.

↪ Dans *Laamri* : la transformée de Fourier d'une dérivée ; $(\mathrm{L}^1, +, ., \star)$ est une algèbre non-unitaire ; $f \star f = f \Rightarrow f = 0$ pp.

↪ Dans *Rudin* : le théorème d'inversion, le corollaire d'injectivité.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la densité des polynômes orthogonaux.

2) Dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

↪ Dans *Rudin* : $\boxed{\text{le théorème de Fourier-Plancherel}}$; $\overline{\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2} = \mathrm{L}^2$ assure l'unicité de la correspondance $f \leftrightarrow \widehat{f}$; théorème d'inversion.

↪ Dans *Laamri* : la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

3) Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

↪ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, des exemples ; $\mathcal{S} \subset \mathrm{L}^1$ donc la transformée de Fourier y est bien définie ; la stabilité par produit et par convolution ; la transformée de Fourier est une bijection bicontinue de $\mathcal{S}$; $\widehat{uv} = \frac{1}{2\pi}\widehat{u} \star \widehat{v}$.

4) Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

↪ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, des exemples ; la définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$, elle est bijective bicontinue ; les exemple de $\widehat{\delta_0}$ et $\widehat{1}$.

III - Applications

1) Formule sommatoire de Poisson

↪ Dans *Gourdon* et *Willem* : $\boxed{\text{la formule sommatoire de Poisson et } \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \delta_{\mathbb{Z}} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R})}$.

2) Équations au dérivées partielles

↪ Dans *Laamri* : les équations de la chaleur, des ondes.

3) En probabilités

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de φ_X, elle caractérise la loi, la fonction caractéristique de $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$, de $\mathcal{E}(1)$; la loi de $X+Y$ quand $X \perp\!\!\!\perp Y$; l'exemple de $\mathcal{N}\left(0,\sigma_1^2\right) \star \mathcal{N}\left(0,\sigma_2^2\right) = \mathcal{N}\left(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

Références :

– Objectif Agrégation
– Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
– Laamri (Mesures, intégration, convolution, transformée de Fourier)
– Rudin (Analyse réelle et complexe)
– Zuily (Distributions et équations aux dérivées partielles)
– Gourdon (Analyse)
– Willem (Analyse harmonique réelle)
– Barbe, Ledoux (Probabilité)

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Cadre : Les fonctions vont de X dans E, où X est un ensemble et E est un espace vectoriel normé de dimension finie.

I - Convergence

1) Différents modes de convergence

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition des convergences simple et uniforme pour les suites ; la cvu implique la cvs.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : un exemple pour illustrer que la cvs n'implique pas la cvu.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le critère de Cauchy uniforme, en application : la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est un polynôme. Norme uniforme (définition et caractérisation de la cvu). Remarque pour définir la cvs et la cvu des séries ; on garde cvu $\Rightarrow$ cvs.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : une série qui cvs mais qui ne cvu pas.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition de la convergence normale ; cvn implique cvu.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : une série qui cvu mais qui ne cvn pas.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- $\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 2* : le théorème de sélection de Helly.

2) Régularité de la limite

- $\hookrightarrow$ Remarquer que les résultats vrais pour les suites s'adaptent aux séries en considérant la suite des sommes partielles.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème de continuité de la limite.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : une suite de fonctions continues qui cvs vers une fonction discontinue.
- $\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : $\boxed{\text{le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein}}$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : les théorèmes de Dini ; le théorème de dérivabilité/classe $\mathcal{C}^1$ de la limite ; faire une remarque sur la limite de classe $\mathcal{C}^k$, donner l'exemple de l'exponentielle qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : une suite (f_n) qui converge vers f dérivable et telle que (f_n') converge vers autre chose que f'.

II - Intégrabilité

1) Convergences dans les espaces L^p, $p \in [1, +\infty[$

- $\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : la définition de la convergence μ-pp, et de la convergence en norme $\|.\|_p$. Le corollaire de Riesz-Fischer qui donne une sous-suite qui converge μ-pp. Un exemple de convergence en norme $\|.\|_p$ qui n'est pas une convergence μ-pp.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : un exemple de convergence μ-pp qui n'est pas une convergence en norme $\|.\|_1$. Cela motive le paragraphe suivant.

2) Théorèmes de permutations

- $\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : le théorème de Beppo-Levi, le lemme de Fatou, la convergence L^p-dominée ; ajouter l'exemple en fin de chapitre.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème qui dit que la primitive d'une limite uniforme est la limite uniforme des primitives ; ajouter le contre-exemple qui est fourni dans les exercices.
- $\hookrightarrow$ Dans *Briane, Pagès* : le théorème sur la permutation de $\int$ et $\sum$; ajouter en exemple une égalité entre une intégrale et une série (c'est dans les exos).

III - Séries entières

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition d'une série entière, le lemme d'Abel et la définition du rayon de convergence.
- $\hookrightarrow$ Dans *Hauchecorne* : les 3 exemples qui montrent qu'au bord du disque de convergence, on ne peut rien dire.
- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : les théorèmes d'$\boxed{\text{Abel angulaire et taubérien faible}}$.

IV - Séries de Fourier

- $\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : la définition des coefficients de Fourier, de la série de Fourier ; le lemme de Riemann-Lebesgue et l'égalité de Parseval ; les résultats qui donnent la convergence simple ou normale de la série de Fourier. Finir avec les trois exemples d'applications : $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$.

Références :

- Gourdon (Analyse)
- Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
- Oraux X-ENS (Analyse 2)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I - Généralités

1) Définitions et premières propriétés

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une série entière, le lemme d'Abel, la définition du rayon de convergence et du disque de convergence. Ajouter le fait que $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$ et $a_n = \mathcal{O}(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$.

↪ Dans *Pommellet* : l'exemple $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ où a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de $\sqrt{2}$.

2) Calcul pratique du rayon de convergence

↪ Dans *Gourdon* : la règle de d'Alembert et l'exemple de l'exponentielle, la règle de Cauchy et l'exemple $\sum_{n\geq 1} 2^n z^n$, la règle d'Hadamard et l'exemple de $\sum_{n\geq 1} z^{2n}$.

3) Opérations sur les séries entières

↪ Dans *Gourdon* : la définition de la somme, la relation sur les rayons de convergence, l'exemple qui montre que c'est optimal. Faire pareil sur le produit de Cauchy (prendre l'exemple dans *Hauchecorne*).

II - Propriétés de la somme sur le disque de convergence

1) Régularité

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de continuité.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition de l'holomorphie, le théorème de dérivabilité/holomorphie. Ajouter l'exemple de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

↪ Dans *Gourdon* : le corollaire sur la classe $\mathcal{C}^\infty$ qui donne également les coefficients de la série entière. Ajouter le résultat sur l'intégrabilité et l'exemple de arctan.

↪ *Sans référence* : $\boxed{\text{le processus de Galton-Watson}}$.

2) Analyticité

↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une fonction développable en série entière, d'une fonction analytique.

↪ Dans *Pommellet* : le théorème d'analyticité des sommes de séries entières.

↪ Dans *Gourdon* : le contre-exemple de $e^{-\frac{1}{x}}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ mais pas développable en série entière, la formule de Cauchy et le théorème de Liouville en application (citer sinus comme contre-exemple quand on souhaite remplacer $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$) et l'égalité de Parseval.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème des zéros isolés, le principe du prolongement analytique et l'application au développement méromorphe de la fonction Γ.

III - Comportement au bord du disque de convergence

↪ Dans *Hauchecorne* : donner les 3 contre-exemples qui montrent qu'on ne peut rien dire a priori.

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{le théorème d'Abel angulaire et le théorème taubérien faible}}$.

IV - Développements en série entière

1) Développements en série entière des fractions rationnelles

↪ Dans *Gourdon* : le paragraphe explicatif éponyme.

↪ Dans *X-ENS Analyse 2* : le nombre de partitions d'un entier en parts fixées.

2) Résolution d'équations différentielles

↪ Dans *Méthodix* : l'explication de la méthode de résolution, agrémentée d'un exemple.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : l'application aux nombres de Bell.

Références :

– Gourdon (Analyse)
– Pommellet (Cours d'analyse)
– Objectif Agrégation
– Hauchecorne (Contre-exemples en mathématiques)
– Oraux X-ENS (Analyse 2 et Algèbre 1)
– Méthodix (Analyse)

244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

I - Fonctions réel-analytiques

1) Développements en série entière

↪ Dans *Gourdon* : la définition d'une fonction développable en série entière, sinus est DSE, DSE $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage, et donc $x \mapsto |x|$ ne saurait être DSE en 0. La propriété de stabilité par la somme, le produit, la dérivation, la primitivation et la composition. Le lien avec le reste du développement de Taylor ; des exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas DSE.

2) Analyticité

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition des fonctions réel-analytiques, des exemples, et la stabilité par addition, multiplication, inverse, composition, dérivation, primitivation. Faire le lien avec les développements en série entière.

↪ Dans *Gourdon* : le théorème de $\boxed{\text{Bernstein sur les séries entières}}$. En application, tangente est analytique sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le passage sur le principe du prolongement analytique et le théorème des zéros isolés ; la remarque sur les fonctions analytiques à support compact. Ajouter une remarque sur $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, analytique sur $\mathbb{R}^{+*}$ sans remettre en cause le principe de prolongement analytique et le contre-exemple de $(x, y) \mapsto x - y$ qui montre la nécessité de la dimension 1.

II - Fonctions holomorphes : l'analyticité sur $\mathbb{C}$

1) Définitions et premières propriétés

↪ Dans *Pommellet* : Les définitions de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, de l'holomorphie et de l'analycité complexe. Le théorème qui dit que analytique $\Rightarrow$ holomorphe ; la remarque analytique $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$. La formule de Cauchy et en application : holomorphe $\Rightarrow$ analytique.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : Quand f est holomorphe, alors $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ est réel-analytique ; on peut en déduire que Re n'est pas holomorphe.

2) Principe du prolongement analytique dans $\mathbb{C}$

↪ Dans *Pommellet* : le principe des zéros isolés et en corollaire le principe du prolongement analytique.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : l'exemple du prolongement holomorphe de la fonction Γ.

↪ Dans *Pommellet* : la définition d'une singularité effaçable, d'un pôle d'ordre N, exemple. La définition de la série de Laurent au voisinage d'un pôle d'ordre N, la définition du résidu, exemple.

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème des résidus, exemples de calcul d'intégrale.

3) Liens avec la réel-analyticité

↪ Dans *Objectif Agrégation* : le prolongement holomorphe des fonctions analytiques sur un intervalle réel (faire un dessin). L'exemple de $\ln(1 + x)$ qui admet un prolongement holomorphe sur un ouvert contenant $]-1, 1[$.

III - Problèmes de prolongement

↪ Dans *Pommellet* : $\ln(1 + z)$ se définit par une série entière sur $\mathcal{D}(1, 1)$, elle est prolongeable en 1 mais pas en -1. Définition d'une singularité essentielle ; le théorème qui dit qu'il y a toujours au moins une singularité essentielle au bord du disque de convergence d'une série entière.

↪ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{les théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible}}$; exemple et contre-exemple.

IV - Application aux équations différentielles

↪ Dans *Pommellet* : le paragraphe sur les séries entières solutions d'équations différentielles et en exemple, l'équation de Bessel.

↪ Dans *X-ENS Algèbre 1* : l'application sur les nombres de Bell.

Références :
- Gourdon (Analyse)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Pommellet (Cours d'analyse)
- Objectif Agrégation
- Oraux X-ENS (Algèbre 1)

245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Cadre : Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$; on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ quand on parle de différentiabilité.

I - Introduction aux fonctions holomorphes

1) Définitions et propriétés élémentaires

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, l'exemple de $z \mapsto z$, la stabilité avec les opérations ; la définition d'une fonction holomorphe, la notation $\mathcal{H}(\Omega)$, l'exemple des polynômes, des séries entières ; la définition de la $\mathbb{C}$-analyticité, elle implique l'holomorphie, ajouter l'exemple de exp.

2) Holomorphie et différentiabilité

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : lien entre $\mathbb{C}$-dérivabilité et différentielle, $\mathrm{D}f(a)(h) = f'(a)h$; $\mathbb{C}$-dérivable $\Rightarrow$ différentiable, pas de réciproque avec $z \mapsto \overline{z}$; équations de Cauchy-Riemann, équivalent à $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le contre-exemple qui vérifie Cauchy-Riemann sans différentiabilité.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : pour $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ et f c$^{\text{te}}$ $\Leftrightarrow f' \equiv 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} f$ c$^{\text{te}}$ $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f$ c$^{\text{te}}$ $\Leftrightarrow |f|$ c$^{\text{te}}$ $\Leftrightarrow \overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

II - Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes

1) Formules de Cauchy

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : définition chemin, lacet, intégrale curviligne, $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}(\theta_1 - \theta_0)$ sur $\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [\theta_0, \theta_1] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array} \right.$.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition de l'indice de γ par rapport à un point.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : l'illustration de l'indice.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : le théorème de Cauchy pour un convexe, la formule de Cauchy pour un convexe.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : une fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable, donc ses dérivées sont holomorphes.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la formule de Cauchy pour la dérivée n^{e}.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : la formule de la moyenne.

2) Analyticité des fonctions holomorphes

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : holomorphe sur disque ouvert $\Rightarrow$ dse avec cvn sur les compacts $\Rightarrow$ analytique.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : le rayon de convergence de la série en z_0 vaut au moins $\mathrm{d}(z_0, \mathbb{C}\backslash\Omega)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : inégalités de Cauchy, cas d'égalité ; théorème de convergence de Weierstrass, définition de ζ.

3) Conséquences de la représentation en série entière

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : le principe des zéros isolés, ajouter l'application au prolongement analytique.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : si $0 \in \Omega$, il n'existe pas de fonction holomorphe sur Ω telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : si $|f(z)| = \mathcal{O}(|z|^\alpha)$, alors $f \in \mathbb{R}_{\lfloor\alpha\rfloor}[X]$; le théorème de Liouville, de d'Alembert-Gauss ; application aux matrice complexes qui ont toutes un spectre non-vide.

4) Principe du maximum

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow f$ possède la propriété de la moyenne $\Rightarrow f$ vérifie le principe du maximum ; conséquences.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : l'absence de principe du minimum et l'exercice pour montrer que f s'annule.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : le lemme de Schwarz.

5) Intégrales de fonctions holomorphes

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

$\hookrightarrow$ Dans *Nourdin* : la fonction caractéristique d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : $\boxed{\text{la densité des polynômes orthogonaux}}$.

III - Fonctions méromorphes

1) Singularités

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une série de Laurent, des coefficients de Laurent ; la définition d'une singularité articielle, d'un pôle, d'une singularité essentielle ; l'exemple de $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : l'exemple de $\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : la définition d'une fonction méromorphe, l'exemple de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}$, de ζ sur $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 0\}$ qui possède un pôle simple en 1.

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps, si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\Omega)$; la remarque sur la réciproque.

2) Théorème des résidus

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème des résidus.

$\hookrightarrow$ Dans *Amar, Matheron* : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$; $\boxed{\text{la formule des compléments}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : le théorème de Rouché et applications.

3) Séries

$\hookrightarrow$ Dans *Tauvel* : la définition d'une série de fonctions méromorphes qui converge uniformément ; le théorème de dérivation ; l'exemple de $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

Références :

- Amar, Matheron (Analyse complexe)
- Objectif Agrégation
- Tauvel (Analyse complexe)
- Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

Cadre : on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, qu'on identifiera aux fonctions de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$,où $\mathbb{T} = {}^{\mathbb{R}}/_{2\pi\mathbb{Z}}$.

I - Définitions et premières propriétés

1) Coefficients de Fourier réels et complexes

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : la définition de $c_n(f)$, d'un polynôme trigonométrique ; exemple des coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques ; la définition d'une série de Fourier, de $S_N(f)$, la notation e_n.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : pour $f \in \mathrm{L}^1$, la définition de $a_n(f)$, de $b_n(f)$; les relations avec $c_n(f)$; la définition de la série réelle, le cas des fonctions paires/impaires ; l'exemple des coefficients de $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$.

2) Propriétés des coefficients de Fourier

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : les formules avec $c_n\left(\check{f}\right)$, $c_n\left(\overline{f}\right)$, $c_n\left(\tau_a f\right)$ et $c_n\left(e_k f\right)$; si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux $c_n(f') = inc_n(f)$, le lemme de Riemann-Lebesgue ; en déduire que si f est $\mathcal{C}^{k-1}$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux, $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$, $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$; la définition de $f \star g$; $f \star e_n = c_n(f)e_n$ et $c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$; si $\sum a_n e_n$ converge uniformément vers f, alors f est continue et $a_n = c_n(f)$.

II - Convergences

1) Convergence au sens de Cesàro

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : une fonction 2π-périodique donc la série de Fourier diverge en 0.

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : la définition de $\sigma_N(f)$, des noyaux de Dirichlet et Fejér ; la remarque sur l'identité approchée ; $S_N(f) = f \star D_N$ et $\sigma_N(f) = f \star K_N$; le théorème de Fejér et la densité des polynômes trigonométriques ; l'injectivité de $\mathcal{F}$.

2) Aspect hilbertien

$\hookrightarrow$ Dans *Objectif Agrégation* : dans L^2, définition du produit scalaire, $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$; (e_n) est une famille orthonormée, $S_N(f) = p_{\mathcal{P}_N}(f)$ où $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}\{e_n \| n| \leq N\}$; (e_n) est une base hilbertienne (comme corollaire de Fejér), donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n = f$, sa signification, l'égalité de Parseval.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : l'égalité de Parseval pour les coefficients réels, application à $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$.

$\hookrightarrow$ Dans *El Amrani* : $\int_0^{2\pi} |f|^2 + \int_0^{2\pi} |f''|^2 \geq 2\int_0^{2\pi} |f'|^2$.

3) Convergence ponctuelle et uniforme

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : la conséquence du théorème de Fejér, pour $f \in \mathcal{C}^0$, $S_N(f)(x_0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} l \Rightarrow l = f(x_0)$; si $(S_N(f))$ converge uniformément, alors c'est vers f ; en plus, si $c_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|n|^{k+2}}\right)$, alors f est $\mathcal{C}^k$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : le théorème de Jordan-Dirichlet, son corollaire quand f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; le théorème de convergence normale, qu'on applique à $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ et à $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

$\hookrightarrow$ Dans *X-ENS Analyse 4* : $\boxed{\text{l'équation de la chaleur sur un anneau}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$, $\sin t = t\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$, $\boxed{\text{la formule sommatoire de Poisson et application}}$.

Références :
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Gourdon (Analyse)
- Objectif Agrégation
- El Amrani (Suites et séries numériques et de fonctions)
- Oraux X-ENS (Analyse 4)

249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes.

↪ *Sans référence* : définition de la loi de Bernoulli $b(p)$, exemple du pile ou face, de l'indicatrice, expériences à deux états. Donner espérance, variance, fonction génératrice et fonction caractéristique.

I - Suites de variables aléatoires indépendantes

1) Indépendance

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : définition de l'indépendance mutuelle d'événements, un exemple avec deux dés et le contre-exemple avec trois dés. Remarque : l'indépendance 2 à 2 n'implique pas l'indépendance mutuelle. Encore un exemple de famille d'événements mutuellement indépendante. Indépendance mutuelle de variables aléatoires.

2) Construction de suites de variables aléatoires indépendantes

↪ Dans *Ouvrard 2* : la définition du développement dyadique d'un réel entre 0 et 1, le fait que x soit égal à son développement dyadique. La remarque sur le problème de non-unicité pour les nombres dyadiques. $X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{2^n}$ suit une loi uniforme et $Y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{j_k}}{2^k}$ aussi, pour tout j suite croissante d'entiers naturels. Le théorème qui explique qu'on vient de construire une suite (X_j) de variables aléatoires indépendantes et de lois μ_j données, à l'aide des pseudo-inverses des fonctions de répartition.

II - Lois associées aux variables aléatoires de Bernoulli

1) Loi de Rademacher

↪ *Sans référence* : la définition de la loi, espérance, variance. Si $X \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$, alors $2X - 1$ suit la loi de Rademacher.

2) Loi binomiale

↪ *Sans référence* : la définition de la loi, espérance, variance. Si $X_1, \dots, X_n \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} b(p)$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$. Exemple du nombre de pile avec une pièce équilibrée lancée n fois.

3) Loi géométrique

↪ *Sans référence* : la définition de la loi, espérance, variance. Si (X_n) est une suite de vaiid $b(p)$, alors $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* | X_n = 1\}$ suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Exemple de la probabilité de démarrer une vieille voiture à la $k^{\text{ème}}$ tentative.

4) Loi de Poisson

↪ *Sans référence* : la définition de la loi, espérance, variance.

↪ Dans *Ouvrard 1* : le théorème de Poisson.

↪ Dans *Ouvrard 2* : le théorème des événements rares.

↪ *Sans référence* : Application du théorème des événements rares de Poisson au nombre de clients venant chez leur banque un jour donné. En approximant, ce nombre suit presque une loi de Poisson.

III - Applications

1) À l'aide des théorèmes de convergence

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : loi forte des grands nombres et $\boxed{\text{théorème central limite}}$. Application aux $\boxed{\text{intervalles de confiance}}$ (estimer la probabilité qu'une pièce truquée fasse pile).

2) Théorème de Weierstrass

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de $\boxed{\text{Weierstrass}}$ sur l'approximation des fonctions continues sur un segment par des polynômes.

3) Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : définition d'une marche aléatoire (symétrique) sur $\mathbb{Z}$ et la probabilité que le temps de retour en 0 soit fini.

4) Ruine du joueur

↪ Dans *Ouvrard 2* : l'explication sur l'expérience (avec le joueur contre la banque) et l'introduction sur ce qu'on veut. Le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini, la probabilité de victoire et le temps moyen d'arrêt du jeu.

Références :

- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Ouvrard (Probabilités 1 et 2)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

I - Parties convexes, fonctions convexes

1) Définitions et exemples

- ↪ Dans *Tauvel* : la définition d'une combinaison convexe, d'une partie convexe ; quelques exemples et résultats.
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : la définition d'une fonction convexe, le lien avec l'épigraphe, la définition d'une fonction strictement convexe ; ajouter la définition d'une fonction concave.
- ↪ Dans *Gourdon* : la propriété des fonctions convexes avec une combinaison convexe de n points au lieu de 2.

2) Enveloppe convexe

- ↪ Dans *Tauvel* : la définition d'une enveloppe convexe, le théorème de Lucas, le résultat qui précède Carathéodory (sans majoration sur le nombre de points k), le théorème de Carathéodory et son corollaire.

3) Séparation des convexes

- ↪ Dans *Brézis* : la définition de la séparation au sens large/strict, les deux formes du théorème de Hahn-Banach.

4) Fonctions convexes et régularité

- ↪ Dans *Gourdon* : la remarque sur les cordes qui sont au-dessus de la courbe ; le théorème des pentes croissantes (faire un dessin).
- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : une fonction convexe est continue à l'intérieur de C ; les résultats sur les fonctions convexes différentiables ou 2 fois différentiables.
- ↪ Dans *Gourdon* et *Objectif Agrégation* : des exemples et des contre-exemples.
- ↪ Dans *Gourdon* : le résultat sur les fonctions convexes majorées, un contre-exemple ; pour une fonction continue, être convexe équivaut à $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

II - Inégalités de convexité

1) Quelques inégalités classiques

- ↪ Dans *Rombaldi* : quelques inégalités sur l'exponentielle, le logarithme, le sinus ; l'inégalité de Jensen sous ses formes $\sum$ et $\int$; les inégalités entre les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique ; l'inégalité de Young.

2) Inégalités dans les espaces L^p

- ↪ Dans *Briane, Pagès* : l'inégalité de Hölder ; les inclusions des espaces L^p en mesure finie ; sur un ensemble de masse 1, $r \mapsto \|f\|_r$ est croissante ; l'inégalité de Minkowski, qui montre que les espaces L^p sont des evn.

3) Inégalités en probabilités

- ↪ *Sans référence* : quelques conséquences de Jensen en probabilités $\mathbb{E}[|X|] \geq |\mathbb{E}[X]|$ et $\mathbb{E}\left[X^2\right] \geq \mathbb{E}[X]^2$.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : $\boxed{\text{l'inégalité de Hoeffding et une application à une convergence presque sûre}}$.
- ↪ Dans *Cadre, Vial* : l'obtention d'un intervalle de confiance par excès.

III - Résultats d'optimisation

1) Fonctions convexes et extrémums

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : les ensembles de niveau d'une fonction convexe sont convexes ; l'unicité du minimum d'une fonction strictement convexe ; le point de Fermat.
- ↪ Dans *X-ENS Algèbre 3* : la stricte convexité logarithmique du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et l'ellipsoïde de John-Loewner.
- ↪ Dans *Rouvière* : pour les fonctions convexes différentiables, $\mathrm{D}f(a) = 0 \Rightarrow a$ est minimum global.

2) Points fixes

- ↪ Dans *Rouvière* : $\boxed{\text{la méthode de Newton}}$ avec dessin et exemples ; le théorème de point fixe sur les convexes compacts.

3) Théorèmes de projection

- ↪ Dans *Objectif Agrégation* : la projection sur un convexe fermé, sur un sev fermé.
- ↪ Dans *Brézis* : les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram.

Références :

- Tauvel (Géométrie)
- Objectif Agrégation
- Gourdon (Analyse)
- Brézis (Analyse fonctionnelle)
- Rombaldi (Éléments d'analyse réelle)
- Briane, Pagès (Théorie de l'intégration)
- Ouvrard (Probabilités 2)
- Cadre, Vial (Statistique mathématique)
- Oraux X-ENS (Algèbre 3)
- Rouvière (Petit guide de calcul différentiel)

254 - Espaces de Schwartz $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$.

I - Espaces de Schwartz et distributions tempérées

1) Espace de Schwartz $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, exemples d'éléments de $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathrm{e}^{x^2} \notin \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$; la définition des semi-normes sur $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$; $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est métrisable complet, la stabilité par produit, par convolution ; la continuité de $u \mapsto x^\alpha u$ et de $u \mapsto \partial^\alpha u$; $\mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ est dense dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathrm{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ pour $p \in [1, \infty]$.

2) Distributions tempérées

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right)$;pour $p \in [1, \infty]$, $\mathrm{L}^p\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$; par exemple, les fonctions majorées par un polynôme sont dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathrm{e}^{\varepsilon|x|} \notin \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\delta_0 \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\boxed{\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)}$; la convergence des suites dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, la définition de l'ordre, $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 ; la définition du support, les exemples de $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$ et $\operatorname{supp} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$; $\mathcal{E}'\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$.

3) Opérations sur les distributions tempérées

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : la définition d'une fonction à croissance lente ; pour f à croissance lente, $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$; $\boxed{x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$ et $xT = 0 \Leftrightarrow T = c\delta_0$; la définition de la dérivation des distributions, $T \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \Rightarrow \partial T \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily exos* : $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x} \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, $H' = \delta_0$, $T' = 0 \Leftrightarrow T = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$; $T_j \to T \Rightarrow \partial^\alpha T_j \to \partial^\alpha T$; la formule de Leibniz ; la définition du produit tensoriel de distributions, de la convolution ; les propriétés de la convolution des distributions : commutativité, élément neutre, dérivation, contre-exemple à l'associativité ; la définition de $T \star \varphi$, $\operatorname{supp} T \star \varphi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi$.

II - Transformation de Fourier

1) Dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$, l'exemple de la gaussienne, $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est linéaire bijective bicontinue ; la valeur de $\mathcal{F}\mathcal{F}u$, les propriétés de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Gourdon* : $\boxed{\text{la formule sommatoire de Poisson}}$ et son application calculatoire.

2) Dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'$, c'est une application linéaire bijective bicontinue, les propriétés de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'$; $\boxed{\mathcal{F}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)}$, $\mathcal{F}0$ et $\mathcal{F}1$.

$\hookrightarrow$ Dans *Willem* : $\boxed{\text{le corollaire à la formule sommatoire de Poisson}}$.

III - Applications

1) Transformation de Fourier dans L^1 et L^2

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : les propriétés de $\mathcal{F}$ quand on la restreint à L^1 ou L^2.

2) Équations aux dérivées partielles

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily* : la définition d'un opérateur différentiel, d'une solution élémentaire, le théorème d'existence quand il existe une solution élémentaire ; une petite explication sur la transformée de Fourier partielle ; l'application à la recherche de solution élémentaire pour $(\partial_t - \Delta_x) E = \delta_0$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Références :

- Zuily (Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles)
- Zuily (Distributions et équations aux dérivées partielles, Exercices corrigés)
- Gourdon (Analyse)
- Willem (Analyse harmonique réelle)

255 - Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

Cadre : Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty_C(\Omega)$. Pour K compact $\subset \Omega$, $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) | \text{supp } \varphi \subset K\}$. On munit $\mathcal{D}_K(\Omega)$ de la famille de semi-normes $p_{K,m}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$. Si $(K_n)_{n\geq 1}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω, alors on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie limite induite par les $\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)$.

I - Introduction aux distributions

1) Définitions et premières propriétés

- ↪ Dans *Zuily* : la définition d'une distribution, de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Fournir 3 exemples : T_f (où $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$), δ_{x_0}, $\boxed{\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)}$. La définition de l'ordre d'une distribution, donner l'ordre des exemples précités dont $\boxed{\text{l'ordre de vp}\left(\frac{1}{x}\right)}$, ajouter un exemple de distribution d'ordre infini. La définition du support d'une distribution (remarque : c'est un fermé) ; donner le support de T_f, de δ_{x_0}. La proposition qui dit : supp $T \cap$ supp $\varphi = \varnothing \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle = 0$.

2) Multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$

- ↪ Dans *Zuily* : la définition de aT, supp $aT \subset$ supp $a \cap$ supp T. Des exemples : $a\delta_{x_0} = a(x_0)\,\delta_{x_0}$, en particulier $x\delta_{x_0} = 0$; $\boxed{x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$. La proposition qui dit que : $xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$.

3) Convolution de distributions

- ↪ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{E}'$, du produit tensoriel de distributions, de la convolution de distributions. La propriété de commutativité, δ_0 est l'élément neutre.

II - Dérivation au sens des distributions

1) Définition et exemples

- ↪ Dans *Zuily* : la définition de $\frac{\partial T}{\partial x_j}$; les remarques sur l'ordre de $\frac{\partial T}{\partial x_j}$, la généralisation à $\partial^\alpha T$, le support de $\partial^\alpha T$. Des exemples : Heaviside $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ et $H' = \delta_0$, $\boxed{(\log|x|)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

2) Quelques propriétés

- ↪ Dans *Zuily* : la dérivée de aT, l'exemple de $(xH)'$.
- ↪ Dans *Bony* : la formule de Leibniz.
- ↪ Dans *Zuily* : le théorème sur les distributions à support ponctuel, la proposition qui dit $T' = 0 \Leftrightarrow T$ est une fonction constante.
- ↪ Dans *Bony* : sur un intervalle de $\mathbb{R}$, toute distribution admet une primitive ; les primitives ne diffèrent que d'une constante.
- ↪ Dans *Zuily* : la résolution de $T' + at = f$ où $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^(\mathbb{R})$. La convolution n'est pas associative, la dérivation de $T \star S$. La formule des sauts unidimensionnelle, dire que cela redonne $H' = \delta_0$.

III - Espace de Schwartz et distributions tempérées

1) L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

- ↪ Dans *Zuily* : la définition, les semi-normes en font un espace métrique complet. $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$, aussi $x \mapsto \mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ est stable par multiplication polynomiale, par dérivation, par produit. $\forall p \in [, +\infty], \mathcal{S} \subset \mathrm{L}^p$. Définir la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$, donner l'exemple qui suit. $\mathcal{F}$ est bijective bicontinue sur $\mathcal{S}$ et les propriétés de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}$.

2) L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

- ↪ Dans *Zuily* : la définition de $\mathcal{S}'$, l'injection dans $\mathcal{D}'$, la stabilité par dérivation, par multiplication par une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Les fonctions majorées par un polynôme sont dans $\mathcal{S}'$. $\mathrm{L}^p \subset \mathcal{S}'$. Mais aussi $x \mapsto \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x} \in \mathcal{S}'$. Définir la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ et ses propriétés. Des exemples : $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ et $\mathcal{F}1 = (2\pi)^n\delta_0$.
- ↪ Dans *Gourdon* et *Willem* : $\boxed{\text{la formule sommatoire de Poisson}}$.

IV - Application aux équations aux derivées partielles

- ↪ Dans *Zuily* : la définition d'un opérateur différentiel, d'une solution élémentaire. Le théorème d'existence d'une solution connaissant l'existence d'une solution élémentaire.
- ↪ Dans *Choquet-Bruhat* : la résolution de $\Delta T = \delta_0$ puis $\Delta T = \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Références :

- Zuily (Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles)
- Bony (Théorie des distributions et analyse de Fourier)
- Gourdon (Analyse)
- Willem (Analyse harmonique réelle)
- Choquet-Bruhat (Distributions, théorie et problèmes)

260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

I - Définitions et premières propriétés

1) Espérance d'une variable aléatoire

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de $\mathbb{E}[X]$, d'une va centrée, la remarque sur la valeur moyenne ; l'exemple d'une va constante presque sûrement ; le lemme de transfert, en remarque $\mathbb{E}$ est linéaire ; $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\in A}] = \mathbb{P}(X \in A)$; les inégalités de Jensen, de Markov ; la définition de l'espérance d'un vecteur ; la caractérisation de l'indépendance d'une famille de va par $\mathbb{E}[\prod \varphi_i(X_i)] = \prod \mathbb{E}[\varphi_i(X_i)]$, en particulier, quand $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, $\mathbb{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \ldots \mathbb{E}[X_n]$.

2) Espérances des lois usuelles

$\hookrightarrow$ Dans *Ouvrard 1* : la formule de l'espérance dans le cas discret ; des exemples avec Bernoulli, Binomiale, Poisson, Géométrique sur $\mathbb{N}^*$, Uniforme ; la formule de l'espérance dans le cas à densité ; des exemple avec Uniforme, Normale, Exponentielle ; le contre-exemple de Cauchy.

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la propriété du changement de variables.

3) Espérance conditionnelle

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$, elle est linéaire positive ; si $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \sigma(X)$, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X]$; si Y est $\mathcal{B}$-mesurable, alors $\mathbb{E}[XY|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]Y$.

$\hookrightarrow$ Dans *Cottrell* : $\mathbb{E}[X_1|X_1+X_2]$ quand $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$ ou $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$.

II - Moments d'une variable aléatoire

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition d'un moment d'ordre p.

1) Moment d'ordre 2 : variance et covariance

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la variance, de l'écart-type ; $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$; l'expression en terme de distance ; $\mathrm{Var}(X) = 0 \Rightarrow X = \mathbb{E}[X]$ ps ; la variance d'une Bernoulli, d'une Normale centrée réduite ; $\mathrm{Var}(X+\alpha) = \mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X)$; les inégalités de Tchebychev, de Cauchy-Schwarz.

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la covariance, l'exemple de $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$.

2) Lien avec l'indépendance

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la non-corrélation ; indépendance $\Rightarrow$ non-corrélation ; le contre-exemple de la réciproque ; le cas des vecteurs gaussiens (pour lequel on a la réciproque) ; l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la variance d'une Binomiale.

$\hookrightarrow$ Dans *Zuily, Queffélec* : le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.

3) Moments d'ordre p

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : l'inégalité de Hölder, la croissance de $r \mapsto \mathbb{E}[|X|^r]^{\frac{1}{r}}$.

$\hookrightarrow$ Dans *Cottrell* : si $p \leq q$, $\mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^p$ et la convergence L^q implique la convergence L^p.

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : l'expression de $\mathbb{E}[X^p]$ en fonction de la fonction de survie, cela redonne un critère d'intégrabilité.

III - Utilisation des moments

1) Fonction génératrice

$\hookrightarrow$ Dans *Ouvrard 1* : ici, X est à valeurs dans $\mathbb{N}$; la définition de la fonction génératrice G_X ; $|G_X| \leq 1$, $G_X(1) = 1$, la régularité, la caractérisation de la loi ; les exemples de la Binomiale, de Poisson ; la valeurs de G_{X+Y} quand $X \perp\!\!\!\perp Y$; le lien avec les moments.

$\hookrightarrow$ *Sans référence* : le processus de Galton-Watson.

2) Fonction caractéristique et transformée de Laplace

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la fonction caractéristique, elle caractérise la loi ; les exemples de la Normale centrée réduite, de Poisson ; lien entre la régularité et l'existence de moments.

$\hookrightarrow$ Dans *Ouvrard 2* : une condition suffisante d'analyticité de φ_X.

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : quand φ_X est analytique, les moments caractérisent la loi ; un contre-exemple où il n'y a pas analyticité ; la définition de la transformée de Laplace.

$\hookrightarrow$ Dans *Ouvrard 2* : l'inégalité de Hoeffding et une application à une convergence presque sûre.

$\hookrightarrow$ Dans *Cadre, Vial* : l'obtention d'un intervalle de confiance par excès à partir de l'inégalité de Hoeffding.

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la transformée de Laplace caractérise la loi, analyticité.

3) Convergence

$\hookrightarrow$ Dans *Barbe, Ledoux* : la loi faible des grands nombres (énoncer la loi forte et l'admettre) ; ajouter que cela signifie que la moyenne empirique est un estimateur fortement consistant de l'espérance ; le théorème central limite, application à l'obtention d'un intervalle de confiance asymptotique pour une loi de Bernoulli.

Références :
- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Ouvrard (Probabilités 1 et 2)
- Cottrell (Exercices de probabilités)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Cadre, Vial (Statistique mathématique)

261 - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Cadre : X est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de son produit scalaire usuel.

I - Définitions et premières propriétés

1) Fonction caractéristique

- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la fonction caractéristique. Ajouter plein d'exemples, et le cas général pour X à densité ou X discrète.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : les propriétés de la fonction caractéristique.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : cela caractérise la loi. Application à la loi Gamma, somme d'exponentielles iid.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : la formule d'inversion de Fourier.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : application à la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$, via la loi de Laplace.

2) Transformée de Laplace

- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition.
- ↪ Dans *Cottrell* : des exemples.
- ↪ Dans *Foata, Fuchs* : les propriétés de la transformée de Laplace, l'exemple de $\mathcal{C}(1)$ dont la transformée n'est définie qu'en 0. Les propriétés des transformées de Laplace réelles (bornée sur $\mathbb{R}^-$, convexe).
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : $\boxed{\text{l'inégalité de Hoeffding}}$.
- ↪ Dans *Foata, Fuchs* : cela caractérise la loi.

II - Moments et régularité

- ↪ Dans *Ouvrard 2* : le théorème sur la classe de φ_X et les moments de X, et le contre-exemple qui suit. Ajouter la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$. La proposition sur le développement de Taylor de φ_X et son analyticité.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : si φ_X est analytique autour de 0, $\mathbb{P}_X$ est caractérisée par les moments de X, le contre-exemple. Le résultat analogue au lien entre X et la régularité de φ_X mais pour L_X, l'exemple de la transformée de Laplace de $\mathcal{N}(0,1)$.

III - Indépendance

- ↪ Dans *Ouvrard 2* : les CNS entre indépendance de deux va et fonction caractéristique du couple ; le contre-exemple qui suit. La fonction caractéristique de la somme de deux va indépendantes. Des exemples.
- ↪ Dans *Foata, Fuchs* : un contre-exemple.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : la CNS d'indépendance sur les moments pour deux va réelles bornées indépendantes.
- ↪ Dans *Foata, Fuchs* : les résultats de stabilité de l'ensemble des fonctions caractéristiques. Les CN, CNS d'indépendance avec les transformées de Laplace, et le contre-exemple. L'exemple de la somme de va de Bernoulli indexée par une loi de Poisson.

IV - Convergence en loi

1) Définitions et caractérisations

- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la convergence en loi par les fonctions de répartition, la définition équivalente et le théorème de Lévy.
- ↪ Dans *Cottrell* : la définition équivalente par les transformées de Laplace. Ajouter la convergence des lois normales.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : le théorème des événements rares de Poisson. Ajouter son illustration avec les nombreux clients d'une banque qui viennent rarement : le nombre de clients allant à leur banque chaque jour suit presque une loi de Poisson.
- ↪ Dans *Cottrell* : le théorème de Bochner.

2) Théorèmes limite

- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la loi faible des grands nombres, le $\boxed{\text{théorème central limite}}$ et l'application à l'obtention d'intervalles de confiance asymptotiques.

Références :

- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Ouvrard (Probabilités 2)
- Cottrell (Exercices de probabilités)
- Foata, Fuchs (Calcul des probabilités)

262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Cadre : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ; $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X désignent une suite de va et une va définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, muni de la norme $\|.\|$.

I - Convergence presque sûre et convergence en probabilité

1) Autour de la convergence presque sûre

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la convergence ps, les définitions équivalentes $\forall\varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{\|X_n - X\|\}\right) = 0$ ou bien $\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq n}\{\|X_k - X\|\}\right) = 0$; le critère de Cauchy pour la convergence ps.

↪ Dans *Ouvrard 2* : l'unicité ps de la limite ps.

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} X$ et f continue, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} f(X)$; si $(X_n) \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} b(p)$, alors $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i}$ converge ps ; le lemme de Borel-Cantelli et son corollaire qui donne un critère de convergence ps.

↪ Dans *Ouvrard 2* : un contre-exemple.

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : si $(X_n) \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} \mathcal{E}(1)$, alors $\frac{\max_{1\leq i\leq n} X_i}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ps}} 1$.

↪ Dans *Ouvrard 2* : $\boxed{\text{un critère de convergence ps reposant sur l'inégalité de Hoeffding}}$.

2) Convergence en probabilité

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la convergence $\mathbb{P}$, ps $\Rightarrow \mathbb{P}$.

↪ Dans *Ouvrard 2* : le contre-exemple de la réciproque ; l'unicité ps de la convergence $\mathbb{P}$.

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : une métrique associée à la convergence $\mathbb{P}$; de toute sous-suite d'une suite convergeant $\mathbb{P}$ on peut extraire une sous-sous-suite qui converge ps ; on en déduit que la convergence ps n'est pas métrisable ; si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$ et f continue, alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} f(X)$; le critère de Cauchy pour la convergence $\mathbb{P}$.

3) Loi des grands nombres et applications

↪ Dans *Ouvrard 2* : loi faible des grands nombres, (admettre les suivantes) lgnf de Khintchine, les deux LGNF (bref, la totale), l'exemple $X_n \sim \frac{1}{2n\ln n}(\delta_n + \delta_{-n}) + \left(1 - \frac{1}{2n\ln n}\right)\delta_0$; l'application à Monte-Carlo.

↪ Dans *Nourdin* : le théorème de Glivenko-Cantelli.

↪ Dans *Rivoirard, Stoltz* : la forte consistance des estimateurs obtenus par la méthode des moments.

II - Convergence en norme L^p, $p \geq 1$

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de $\|.\|_p$, complétude ; si $q \geq p \geq 1$, $\xrightarrow{\mathrm{L}^q} \Rightarrow \xrightarrow{\mathrm{L}^p} \Rightarrow \xrightarrow{\mathbb{P}}$.

↪ Dans *Barbe, Ledoux* et *Briane, Pagès* : la convergence ps et la convergence L^p n'ont rien à voir entre elles.

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : de toute suite qui converge en L^p on peut extraire une sous-suite qui converge ps ; la définition de l'uniforme intégrabilité, l'exemple des familles finies, dominées par $Y \in \mathrm{L}^1$, la caractérisation d'être UI.

↪ Dans *Ouvrard 2* : le théorème de Vitali.

III - Convergence en loi

1) Définitions et propriétés

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de la convergence $\mathcal{L}$ par les fonctions de répartition ; ajouter l'exemple des lois normales de paramètres convergents ; impliquée par la convergence $\mathbb{P}$, le contre-exemple de la réciproque ; quand on converge $\mathcal{L}$ vers une constante, on converge $\mathbb{P}$; $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_b^0, \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$; le théorème de Lévy ; application à une nouvelle lgnf et au $\boxed{\text{TCL}}$.

↪ Dans *Ouvrard 1 et 2* : le théorème des événements rares de Poisson et son illustration bancaire.

↪ Dans *Ouvrard 2* : le continuous mapping theorem et son application, le théorème de Slutsky.

↪ Dans *Cadre, Vial* : la δ-méthode.

2) Applications en statistiques

↪ Dans *Cadre, Vial* : l'intervalle de confiance asymptotique pour un jeu de pile ou face.

↪ Dans *Rivoirard, Stoltz* : le test du χ^2 d'adéquation.

Références :

– Barbe, Ledoux (Probabilité)
– Ouvrard (Probabilités 1 et 2)
– Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)
– Rivoirard, Stoltz (Statistique mathématique en action)
– Cadre, Vial (Statistique mathématique)

263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Cadre : Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

I - Variables aléatoires à densité

1) Définitions et premières propriétés

- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition de $\nu = f\mu$, de l'absolue continuité ; le théorème de Radon-Nikodym.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : X admet f_X pour densité $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}_X$ admet f_X pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d, l'expression $\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$; dire que la densité est définie modulo égalité presque partout ; la définition de la fonction de répartition (en dimension 1).
- ↪ Dans *Ouvrard 1* : les propriétés de F_X (attention, dire qu'elle est dérivable en x, s'il existe une densité de X continue en x).
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : X est à densité $\Leftrightarrow \exists f_X \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), F_X(x) = \int_{]-\infty,x]} f_X(u)\,\mathrm{d}\lambda(u)$.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : le théorème de transfert avec la notation $\mathbb{E}$, le cas particuliers des moments, la définition de la variance.

2) Lois usuelles

- ↪ Dans *Ouvrard 2* : loi uniforme, densité, $\mathbb{E}$, Var, simulation de lois par pseudo-inverse ; loi normale, densité, $\mathbb{E}$, Var, loi asymptotique de beaucoup de phénomènes, centrage-réduction ; loi exponentielle, densité, $\mathbb{E}$, Var, durée de vie sans vieillissement ; loi du χ^2, densité, $\mathbb{E}$, Var, somme de carrés de $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes ; loi Gamma, densité, $\mathbb{E}$, Var, lien avec l'exponentielle et le χ^2 ; toutes les lois usuelles n'ont pas de moments, comme la loi de Cauchy, densité.

3) Opérations sur les densités

- ↪ Dans *Ouvrard 2* : les densités marginales d'un couple aléatoire.
- ↪ Dans *Ouvrard 1* : un exemple avec des lois normales.
- ↪ Dans *Ouvrard 2* : la densité de $T(X)$ où T est un difféomorphisme ; la CNS d'indépendance avec les densités, en application $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \sim S \perp\!\!\!\perp \Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi]) \Rightarrow \sqrt{S}\cos\Theta$ et $\sqrt{S}\sin\Theta$ iid $\mathcal{N}(0,1)$; si $X \perp\!\!\!\perp Y$ sont à densité, alors $f_{X+Y} = f_X \star f_Y$, l'exemple des lois Gamma, ajouter ce que ça signifie pour les sommes de variables exponentielles.

4) Fonction caractéristique

- ↪ Dans *Ouvrard 2* : la définition de φ_X ; si X à densité, $\varphi_X = \widehat{f_X}$; la caractérisation de la loi, quelques exemples de fonctions caractéristiques, la formule d'inversion de Fourier.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la fonction caractéristique de la loi de Laplace, de la loi de Cauchy.
- ↪ Dans *Zuily, Queffélec* et *Nourdin* : $\boxed{\text{le théorème central limite et son application à un intervalle de confiance}}$.

II - Vecteurs gaussiens

1) Généralités

- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la définition d'un vecteur gaussien, espérance et covariance, fonction caractéristique, centrage-réduction.
- ↪ Dans *Cadre, Vial* : l'expression de la densité quand elle existe.
- ↪ Dans *Barbe, Ledoux* : pour les vecteurs gaussiens, indépendance et non-corrélation s'équivalent ; de façon générale l'indépendance implique la non-corrélation mais on n'a pas la réciproque.

2) Projections de vecteurs gaussiens

- ↪ Dans *Cadre, Vial* : les théorèmes de Cochran et Fisher.
- ↪ Dans *Dress* : le test du χ^2 standard sans paramètres estimés (si place et envie).

III - Une utilisation en statistiques : le maximum de varasemblance

- ↪ Ici, $\left(\mathcal{H}^n, \{\mathbb{P}_\theta\}_{\theta\in\Theta}\right)$ est un modèle statistique dominé par une mesure σ-finie μ avec $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^k$ et $\Theta \subset \mathbb{R}^d$.
- ↪ Dans *Cadre, Vial* : la définition de la vraisemblance (écrire $\forall\theta \in \Theta, \mathrm{d}\mathbb{P}_\theta = L_n(\ldots;\theta)\mathrm{d}\mu$) ; le lien entre vraisemblance et produit tensoriel de mesures ; le cas des variables à densité contre la mesure de Lebesgue, l'exemple de $\left(\mathbb{R}^n, \left\{\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)\right\}_{m\in\mathbb{R},\sigma>0}\right)$; la définition de l'estimateur du maximum de vraisemblance, la remarque sur son existence et unicité, l'heuristique (pourquoi prendre le maximum ?), l'utilisation de la log-vraisemblance et la positivité de L ; $\boxed{\text{un exemple d'étude d'un EMV pour des lois } \mathcal{U}([0,\theta])}$.

Références :

- Barbe, Ledoux (Probabilité)
- Ouvrard (Probabilités 1 et 2)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Nourdin (Agrégation de mathématiques, Épreuve orale)
- Cadre, Vial (Statistique mathématique)
- Dress (Probabilités et statistiques de A à Z)

264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

I - Espaces probabilisés discrets

1) Espaces probabilisés, lois et variables discrètes

↪ Dans *Ouvrard 1* : la définition d'un espace probabilisé discret ; sur Ω discret, une probabilité est déterminée par les $\mathbb{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$; toute probabilité sur Ω s'obtient via un germe ; la définition de va discrète, de la loi de probabilité d'une va discrète, le germe associé.

2) Lois usuelles

↪ Dans *Ouvrard 1* : la loi uniforme sur un ensemble fini, exemple du lancer de dés ; la loi de Bernoulli/binomiale, nombre de succès de n Bernoulli indépendantes, exemple du lancer de pièces ; la loi géométrique, rang du 1$^{\text{er}}$ succès, exemple de la vieille voiture ; la loi de Poisson ; la loi hypergéométrique, exemple des poissons.

3) Espérance, variance

↪ Dans *Ouvrard 1* : la définition de l'espérance d'une va discrète, l'espérance d'une constante ; bornée $\Rightarrow$ espérance finie, ajouter le contre-exemple de $X \sim \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k^2}$; les espérances des lois classiques ; le théorème de transfert ; la définition de la variance, expression grâce au théorème de transfert, les variances des lois usuelles.

II - Variables aléatoires discrètes indépendantes

1) Indépendance

↪ Dans *Ouvrard 1* : la définition de l'indépendance (mutuelle) d'événements, plus forte que l'indépendance 2 à 2, contre-exemple ; la définition de va indépendantes ; indépendance $\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap\right) = \prod \mathbb{P}(\ )$; cas des va discrètes.

2) Construction de variables de Bernoulli indépendantes

↪ Dans *Ouvrard 2* : détailler tout le paragraphe sur la construction d'une suite de variables de Bernoulli indépendantes (avec le développement dyadique...).

3) Somme de variables discrètes indépendantes

↪ Dans *Ouvrard 1* : la loi de la somme de 2 va indépendantes discrètes ; l'exemple d'une somme de Poisson, de Bernoulli.

↪ Dans *Zuily, Queffélec* : l'inégalité de Khintchine, le théorème de $\boxed{\text{Weierstrass par les polynômes de Bernstein}}$.

III - Séries génératrices (pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$)

↪ Dans *Ouvrard 1* : la définition d'une fonction génératrice ; domaine de définition, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, caractérisation de la loi ; un exemple classique, la fonction génératrice d'une somme de va ; le lien entre série génératrice et moments.

↪ Dans *Cottrell* : on ne peut pas truquer deux dés indépendants de sorte que la somme de leurs chiffres suive une loi uniforme.

↪ *Sans référence* : $\boxed{\text{le processus de Galton-Watson}}$.

IV - Théorèmes limite

1) Approximation de loi de Poisson

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : la convergence en loi pour des variables discrètes sur $\mathbb{N}$.

↪ Dans *Ouvrard 1* : le théorème de Poisson, la loi du nombre de personnes nées le même jour.

↪ Dans *Ouvrard 2* : le théorème des événements rares de Poisson, l'illustration avec les clients d'une banque.

2) Loi des grands nombres et théorème central limite

↪ Dans *Ouvrard 2* : la LGN faible, application à des lois de Bernoulli ; la LGN forte, la moyenne empirique est un estimateur fortement consistant.

↪ Dans *Barbe, Ledoux* : le TCL, intervalle de confiance d'une Bernoulli.

↪ Dans *Ouvrard 1* : le théorème de Moivre-Laplace, une illustration.

Références :
- Ouvrard (Probabilités 1 et 2)
- Zuily, Queffélec (Analyse pour l'agrégation)
- Cottrell (Exercices de probabilités)
- Barbe, Ledoux (Probabilité)