Automorphismes de $K(X)$

Leçons : 140, *141*

[X-ENS Al1], exercice 5.54

Théorème

Soit K un corps quelconque.

Les automorphismes de K-algèbres de $K(X)$ sont les applications de la forme $\left|\begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)\end{array}\right.$

où $a, b, c, d \in K^4$ vérifient $ad - bc \neq 0$.

Démonstration :

Étape 1 : Déterminons les endomorphismes de K-algèbres de $K(X)$.

Soit Φ un endomorphisme de K-algèbres de $K(X)$. Posons $F = \Phi(X)$.

Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k X^k \in K[X]$, on a : $\Phi(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k \Phi(X^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_k F^k = P \circ F$.

Ainsi, pour tous $P \in K[X]$, $Q \in K[X]\backslash\{0\}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$, où, on a : $\Phi(G) = \dfrac{\Phi(P)}{\Phi(Q)} = \dfrac{P \circ F}{Q \circ F} = G \circ F$.

Réciproquement, pour $F \in K(X)\backslash K$, $\Phi_F : \left|\begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G \circ F\end{array}\right.$ est bien un morphisme de K-algèbres. [1]

Remarquons que si $F = a \in K$, alors Φ_F n'est pas bien défini : en effet $\dfrac{1}{X-a}$ n'a pas d'image par Φ_F.

Ainsi, l'ensemble des endomorphismes de K-algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des Φ_F, où F parcourt $K(X)\backslash K$.

Étape 2 : Cherchons à quelle condition sur F, Φ_F est un automorphisme.

Supposons que Φ_F soit un automorphisme.

Alors Φ_F est surjectif et donc : $\exists G \in K(X), \Phi_F(G) = G \circ F = X$.

Soient $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$ des représentations irréductibles de ces fractions rationnelles.

On écrit $P = \sum_{j=0}^{d_P} p_j X^j$ et $Q = \sum_{k=0}^{d_Q} q_k X^k$ où d_P et d_Q sont les degrés respectifs de P et Q.

On a :
$$\begin{aligned} G \circ F = X &\Leftrightarrow P \circ F = X(Q \circ F) \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j F^j = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k F^k \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j \frac{A^j}{B^j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k \frac{A^k}{B^k} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d_P} p_j A^j B^{m-j} = X \sum_{k=0}^{d_Q} q_k A^k B^{m-k}, \text{ où on a noté } m = \max\left\{d_P, d_Q\right\}. \end{aligned}$$

– D'une part, $A | (p_0 - q_0 X)\, B^m$.
  Or A et B sont premiers entre eux, donc A et B^m sont également premiers entre eux, d'où $A | p_0 - q_0 X$.
  Aussi, comme P et Q sont premiers entre eux, on a $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$.
  Donc $p_0 - q_0 X$ est de degré 0 ou 1, donc A est de degré 0 ou 1.

1. Il s'agit de vérifier :
– $\Phi_F(1) = 1$.
– $\Phi_F(G)$ est bien défini pour tout $G \in K(X)$.
  Pour cela, on montre que $G \circ F = \dfrac{B^m \times (P \circ F)}{B^m \times (Q \circ F)}$, où $F = \dfrac{A}{B}$ est une écriture irréductible et $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ est une écriture de $G \circ F$ en fraction de polynômes et que le polynôme $B^m \times (Q \circ F)$ n'a qu'un nombre fini de racines.
– Φ_F est K-linéaire.
– $\Phi_F(G_1 G_2) = \Phi_F(G_1)\, \Phi_F(G_2)$ pour tous $G_1, G_2 \in K(X)$.

- D'autre part, $B \Big| p_{d_P} A^{d_P} B^{m-d_P} - q_{d_Q} X A^{d_Q} B^{m-d_Q}$.
  - Si $m = d_P = d_Q$, alors $B|(p_m - q_m X)\, A^m$ et donc $B|p_m - q_m X$ car B et A^m sont premiers entre eux. Or $q_m \neq 0$ car Q est de degré $m = d_Q$, donc $\deg B = 0$ ou 1.
  - Si $m = d_Q > d_P$, alors $B|q_m X A^m$ donc $B|q_m X$ donc $\deg B = 0$ ou 1.
  - Si $m = d_P > d_Q$, alors $B|p_m A^m$ donc $B|p_m$ donc $\deg B = 0$.

  Toujours est-il que $\deg B = 0$ ou 1.

Par conséquent, il existe $(a,b,c,d) \in K^4, F = \dfrac{aX+b}{cX+d}$.
Et F ne pouvant évidemment pas être constant, on doit imposer $ad - bc \neq 0$.

Étape 3 : Réciproquement, montrons que cette condition nécessaire est suffisante.
Pour $(a,b,c,d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$, on note $\Phi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ le morphisme de K-algèbres défini par :

$\Phi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(X) = \dfrac{aX+b}{cX+d}$.

Montrons que : $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(K) & \to & \mathrm{End}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \\ M & \mapsto & \Phi_{M^{-1}} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.
Cela découle de l'égalité :

$$\Phi_{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} \left(\Phi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(X) \right) = \frac{aX+b}{cX+d} \circ \frac{a'X+b'}{c'X+d'} = \frac{a\frac{a'X+b'}{c'X+d'} + b}{c\frac{a'X+b'}{c'X+d'} + d} = \Phi_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}}(X)$$

On reconnaît effectivement les coefficients du produit matriciel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$.
Donc $\forall M, N \in \mathrm{GL}_2(K), \Phi(MN) = \Phi_{(MN)^{-1}} = \Phi_{N^{-1}M^{-1}} = \Phi_{M^{-1}} \circ \Phi_{N^{-1}} = \Phi(M) \circ \Phi(N)$.
On en déduit alors que Φ_M est inversible, d'inverse $\Phi_{M^{-1}}$, pour tout $M \in \mathrm{GL}_2(K)$.

On en déduit finalement que l'ensemble des automorphismes de K-algèbres de $K(X)$ est l'ensemble des applications de la forme $\left| \begin{array}{ccc} K(X) & \to & K(X) \\ G & \mapsto & G\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \end{array} \right.$ avec $(a,b,c,d) \in K^4$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.[2] ■

Références

[X-ENS Al1] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 1*, 2e éd., Cassini, 2007.

2. Le 2nd théorème d'isomorphisme peut même nous donner un résultat supplémentaire.
On a montré au cours de la démonstration que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X))$.
De plus

$$\Phi_{a,b,c,d}(X) = X \Leftrightarrow aX + b = cX^2 + dX \Leftrightarrow b = c = 0 \text{ et } a = d$$

Donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\lambda I_2 | \lambda \in K^\times\}$.
Et on en déduit donc :

$$\mathrm{Aut}_{K\text{-alg.}}(K(X)) \simeq {}^{\mathrm{GL}_2(K)}/_{\mathrm{Ker}(\Phi)} = {}^{\mathrm{GL}_2(K)}/_{\{\lambda I_2 | \lambda \in K^\times\}} = \mathrm{PGL}_2(K)$$