Borne de Bézout [1]

Leçons : 143, 180 [2], *142, 144*

Merci Arnaud ! [3]

Théorème

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X,Y]$ de degrés totaux respectifs m et n ; on suppose que A et B sont premiers entre eux et que $\mathbb{K}$ est de cardinal infini [4].
On note $V(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \middle| A(x,y) = 0\right\}$ et $V(B) = \left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \middle| B(x,y) = 0\right\}$.
Alors on a : $\#(V(A) \cap V(B)) \leqslant mn$.

Démonstration :

Évidemment, on suppose $V(A) \cap V(B) \neq \varnothing$, car sinon, il n'y a rien à montrer.

Étape 1 : Soit $(x,y) \in V(A) \cap V(B)$; on note $R_Y := \mathrm{Res}_Y(A,B)$, et on a $R_Y(x) = 0$.
Comme $A \wedge B = 1$, on sait que $R_Y \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$ et donc R_Y admet au plus $\deg R_Y$ racines.
Ainsi, pour un point de $V(A) \cap V(B)$, il y a au plus $\deg R_Y$ abscisses possibles, et similairement, au plus $\deg R_X$ ordonnées possibles. [5]
Dès lors, $\#(V(A) \cap V(B)) \leqslant \deg R_X \deg R_Y < \infty$.

Étape 2 : Obtenons désormais une borne sur $\deg R_Y$.
On note $A(X,Y) = \sum_{k=0}^{p} a_k(X) Y^k$ et $B(X,Y) = \sum_{k=0}^{q} b_k(X) Y^k$, avec $\deg a_k \leqslant m-k$, $\deg b_k \leqslant n-k$, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.

$$\text{Par conséquent, } R_Y = \det\left(\mathrm{Syl}_Y(A,B)\right) = \begin{vmatrix} a_p & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots \\ 0 & & a_p & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_q & \cdots & \cdots & b_0 & & \\ & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & & & \ddots \\ & & & b_q & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} q \text{ lignes} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} p \text{ lignes} \end{array}.$$

Notons $\mathrm{Syl}_Y(A,B) = \left(c_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p+q}$.

Soit $i \in [\![1,q]\!]$, on a : $\deg c_{i,j} = \begin{cases} \deg a_{p-(j-i)} & \text{si } i \leqslant j \leqslant p+i \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \leqslant m - p + j - i.$

Soit $i \in [\![q+1, q+p]\!]$, on a : $\deg c_{i,j} = \begin{cases} \deg b_{q-(j-(i-q))} & \text{si } i-q \leqslant j \leqslant i \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \leqslant n - i + j.$ [6]

1. Je sais : vous vous posez très probablement la même question que moi. Et je vous propose de clore ici immédiatement le débat sur l'accent du 'e' du nom de famille d'Étienne machin (1730-1783). Si on se réfère à une thèse de Liliane ALFONSI, qui a écrit *Étienne Bézout, mathématicien des Lumières* en 2011, l'accent apparaît ou non selon les documents, mais il est mis systématiquement à partir d'une certaine date (1765 pour les manuscrits, 1770 pour les imprimés) par Bézout lui-même. En conséquence, respectons son choix de mettre un accent ; même si l'académie de Créteil le lui a retiré en donnant le nom d'Étienne Bezout à un lycée de Nemours, en Seine-et-Marne.
2. Dans la 180, je prends un des deux polynômes de degré total égal à 2. Okay, c'est moche, mais qui veut faire les coniques devant le jury ?
3. Un lien vers la page personnelle d'Arnaud STOCKER. On trouvera néanmoins une piste de démonstration au théorème 10.111 de A. SZPIRGLAS – *Algèbre pour la L3*, Pearson Éducation, 2009.
4. Cette hypothèse est dispensable : si $\mathbb{K}$ est de cardinal fini, alors $\mathbb{K}$ s'injecte dans sa clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$ qui est de cardinal infini. Alors les courbes algébriques définies par A et B sur $\overline{\mathbb{K}}^2$ s'intersectent en au plus mn points de $\overline{\mathbb{K}}^2$. En conséquence, les courbes algébriques définies par A et B sur $\mathbb{K}^2$ s'intersectent en au plus mn points de $\mathbb{K}^2$.
5. Vous l'aurez compris, $R_X = \mathrm{Res}_X(A,B) \in \mathbb{K}[Y] \backslash \{0\}$.
6. C'est LE passage difficile du développement, parce qu'il faut être capable d'expliquer ceci clairement au tableau. Quand $i \in [\![1,q]\!]$, on remarque que $c_{i,i} = a_p$, puis, quand $0 \leqslant j - i \leqslant p$, passer de $c_{i,i}$ à $c_{i,j}$ revient à faire $(j-i)$ pas vers la droite, donc à passer de a_p à $a_{p-(j-i)}$. Quand $i \in [\![q+1, q+p]\!]$, on opère similairement : $c_{i,i-q} = b_q$, puis, en décalant de $(j-(i-q))$ cases vers la droite, où $0 \leqslant j-(i-q) \leqslant q$, on obtient $c_{i,j} = b_{q-(j-(i-q))}$.

Par la formule du déterminant en fonction des coefficients de la matrice : $R_Y = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \underbrace{\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p+q} c_{i,\sigma(i)}}_{=:F_\sigma}$.

Et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$, on a :

$$\deg F_\sigma = \sum_{i=1}^{p+q} \deg c_{i,\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{q} m - p + \sigma(i) - i + \sum_{i=q+1}^{q+p} n - i + \sigma(i) \underset{7}{=} mq - pq + np = mn + \underbrace{(m-p)(q-n)}_{\leqslant 0}$$

$$\leqslant mn.$$

En conséquence, $\deg R_Y \leqslant mn$.
Similairement, $\deg R_X \leqslant mn$ et donc $\#(V(A) \cap V(B)) \leqslant (mn)^2$.

Étape 3 : On numérote alors les éléments de $V(A) \cap V(B)$: $V(A) \cap V(B) = \{(x_i, y_i) | i \in [\![1, r]\!]\}$.

Soit $\mathcal{E} := \left\{ \frac{x_i - x_j}{y_j - y_i} \middle| y_i \neq y_j, i, j \in [\![1, r]\!] \right\}$, alors $\#\mathcal{E} < \infty = \#\mathbb{K}^\times$.
Donc $\exists u \in \mathbb{K}^\times \backslash \mathcal{E}$ et ensuite $\forall i, j \in [\![1, r]\!], x_i - x_j \neq u\,(y_j - y_i) \Leftrightarrow x_i + uy_i \neq x_j + uy_j$.
On effectue alors le changement de variables : $\begin{cases} X' = X + uY \\ Y' = Y \end{cases}$ et on pose $\begin{cases} \widetilde{A}(X', Y') = A(X, Y) \\ \widetilde{B}(X', Y') = B(X, Y) \end{cases}$.

Soit alors $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} V(A) \cap V(B) & \to & \mathcal{R}ac\left(\mathrm{Res}_{Y'}\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)\right) \\ (x, y) & \mapsto & x + uy \end{array} \right.$.

– Φ est bien définie :

$$\begin{aligned}(x,y) \in V(A) \cap V(B) &\Rightarrow A(x,y) = B(x,y) = 0 \Rightarrow \widetilde{A}(x+uy, y) = \widetilde{B}(x+uy, y) = 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{Res}_{Y'}\left(\widetilde{A}(x+uy, Y'), \widetilde{B}(x+uy, Y')\right) = 0 \Rightarrow \left(\mathrm{Res}_{Y'}\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)\right)(x+uy) = 0\end{aligned}$$

– Φ est injective :
Si (x, y) et $(x', y') \in V(A) \cap V(B)$ sont distincts, alors $u \notin \mathcal{E}$ impose $x + uy \neq x' + uy'$.

D'où : $\#(V(A) \cap V(B)) \leqslant \#\mathcal{R}ac\left(\mathrm{Res}_{Y'}\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right)\right) \leqslant \deg R_{Y'}\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}\right) \underset{8}{\leqslant} mn$. ■

7. En effet, σ étant une bijection de $[\![1, p+q]\!]$, on a : $\sum_{i=1}^{p+q} \sigma(i) - i = 0$.

8. Car les degrés de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont inférieurs ou égaux à ceux de A et B.