Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Leçons : 159

[X-ENS Al1], exercices 7.8, 7.9 et 7.11

Théorème

L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \mapsto & f_A : X \mapsto \mathrm{tr}(AX) \end{array} \right.$ est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Démonstration :

On note $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La linéarité de la trace et la bilinéarité du produit matriciel impliquent la linéarité de f ; par ailleurs, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ sont de même dimension n^2. Il suffit donc de montrer que f est injectif.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f_A = 0$.

Alors, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$0 = \mathrm{tr}\left(AE_{i,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(AE_{i,j}\right)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}\delta_{i,l}\delta_{j,k} = a_{j,i}$$

Finalement, $A = 0$, f est injectif : c'est un isomorphisme. ∎

Corollaire (*Caractérisation de la trace*)

Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifiant $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, g(XY) = g(YX)$.

Alors g est proportionnel à la trace : $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), g(X) = \lambda \mathrm{tr}(X)$.

Démonstration :

D'après le théorème précédent, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), g(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

L'hypothèse sur g nous fournit donc : $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{tr}(AXY) = \mathrm{tr}(AYX) = \mathrm{tr}(XAY)$.

On en déduit alors : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}((AX - XA)Y) = 0$.

L'isomorphisme précédent nous donne alors : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX - XA = 0$, c'est-à-dire : $A \in \mathrm{Z}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)$.

En conséquence, A est une homothétie. [1]

∎

Corollaire

Si $n \geqslant 2$,

Alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration :

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit φ une forme linéaire de noyau H.

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)$.

On cherche donc une matrice $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, telle que $\mathrm{tr}(AX) = 0$.

Pour simplifier, on note r le rang de A et A est équivalente à la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire : $\exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), A = PJ_rQ$.

On a donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}\left(PJ_rQX\right) = \mathrm{tr}\left(J_rQXP\right)$.

Si on trouve $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}\left(J_rY\right) = 0$, on a gagné : on posera $X = Q^{-1}YP^{-1}$ qui sera à la fois dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans H.

Par exemple, on peut poser $Y = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En effet, Y est inversible, car de déterminant $(-1)^{n+1}$ et J_rY est de trace nulle (car de diagonale nulle). ∎

1. Pour le montrer remplacer X par une matrice $E_{i,j}$; la réciproque est une trivialité.

Corollaire

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors s'équivalent :

1. $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX + XA = B$
2. $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AC + CA = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(BC) = 0$

Démonstration :

Soit $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX + XA \end{array} \right.$.

Alors 1. $\Leftrightarrow B \in \mathrm{Im}\, h$ et 2. $\Leftrightarrow \forall C \in \mathrm{Ker}\, h, f_C(B) = 0 \Leftrightarrow B \in f(\mathrm{Ker}\, h)^\circ$.
Mais $\dim f(\mathrm{Ker}\, h)^\circ = n^2 - \dim f(\mathrm{Ker}\, h) = n^2 - \dim \mathrm{Ker}\, h = \dim \mathrm{Im}\, h$.
Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Im}\, h \subset f(\mathrm{Ker}\, h)^\circ$.
Soit $D \in \mathrm{Im}\, h$, disons $D = AY + YA$, avec $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors $\forall C \in \mathrm{Ker}\, h$,

$$f_C(D) = \mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(C(AY + YA)) = \mathrm{tr}(CAY) + \mathrm{tr}(CYA) = \mathrm{tr}(CAY) + \mathrm{tr}(ACY) = \mathrm{tr}((CA + AC)Y) = 0.$$

Donc $D \in f(\mathrm{Ker}\, h)^\circ$.
D'où $f(\mathrm{Ker}\, h)^\circ = \mathrm{Im}\, h$ et 1. $\Leftrightarrow$ 2.. ■

Références

[X-ENS Al1] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 1*, 2e éd., Cassini, 2007.