# Décomposition de Dunford

**Leçons : 153, 154, 155, 157**

**[Gou Al], partie 4.4.2**

**Théorème**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$, tel que $d$ soit diagonalisable, $n$ nilpotent, $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, $(d, n) \in \mathbb{K}[u]^2$.

On commence par montrer le lemme qui suit.

**Lemme**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F(u) = 0$.
Soit $F = \beta \prod_{i=1}^{s} M_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $F$ dans $\mathbb{K}[X]$.
Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on note $N_i = \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(u)$.
On a alors :

- $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ ;
- $\forall i \in [\![1, s]\!]$, le projecteur sur $N_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en $u$.

**Démonstration du lemme :**

L'égalité $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$ découle directement du lemme des noyaux.
Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on note $Q_i = \prod_{j \neq i} M_j^{\alpha_j}$ ; alors les $Q_i$, où $i \in [\![1, s]\!]$, sont premiers entre eux dans leur ensemble.
D'après Bézout, on obtient donc :

$$\exists U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X], \sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1.$$

Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on note $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u) \in \mathbb{K}[u]$.
L'égalité de Bézout nous fournit :

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = \text{Id}_E \tag{1}$$

Par ailleurs, si $i \neq j$, alors $F | Q_i Q_j$, de sorte que

$$\forall j \neq i \in [\![1, s]\!], p_i \circ p_j = Q_i Q_j(u) \circ U_i U_j(u) = 0 \tag{2}$$

On en déduit, par $(1)$ : $\forall j \in [\![1, s]\!], p_j = \sum_{i=1}^{s} p_i \circ p_j$ ; puis, par $(2)$ : $\forall j \in [\![1, s]\!], p_j^2 = p_j$.
En conséquence, les applications $p_i$, où $i \in [\![1, s]\!]$, sont des projecteurs.
Reste à montrer que ce sont bien ceux dont traite l'énoncé du lemme !
Montrons que : $\forall i \in [\![1, s]\!], N_i = \text{Im } p_i$.

$\subset$ : Soit $y = p_i(x) \in \text{Im } p_i$.
On a : $\left(M_i^{\alpha_i}(u)\right)(y) = \left(M_i^{\alpha_i} P_i\right)(u)(x) = 0$, car $F | M_i^{\alpha_i} P_i$.
Et donc $x \in \text{Ker } M_i^{\alpha_i} = N_i$.

$\supset$ : Soit $x \in N_i$.
D'après $(1)$ : $x = \sum_{j=1}^{s} p_j(x)$. Or pour $j \neq i$, $p_j(x) = P_j(u)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i} | P_j$.
Et donc $x = p_i(x) \in \text{Im } p_i$.

Montrons que : $\forall i \in [\![1,s]\!], \mathrm{Ker}\ p_i = \bigoplus_{j\neq i} N_j$.

$\subset$ **:** Soit $x \in \mathrm{Ker}\ p_i$.

Par (1), on a donc : $x = \sum_{j=1}^{s} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} \mathrm{Im}\ p_j = \bigoplus_{j\neq i} N_j$, vu que $p_i(x) = 0$.

$\supset$ **:** Soit $j \neq i$ et $x \in N_j$ ; alors $x = p_j(t)$ avec $t \in E$.
Ainsi, d'après (2) : $p_i(x) = p_i \circ p_j(t) = 0$.
Donc $\forall j \neq i, N_j \subset \mathrm{Ker}\ p_i$ donc $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subset \mathrm{Ker}\ p_i$. ■

**Démonstration du théorème :**

**Existence :** On écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour $i \in [\![1,s]\!]$, on note $N_i = \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)$.

Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, on aurait pu rédiger le lemme précédent avec $\chi_u$ à la place de $F$ ; on reprend alors les notations introduites au cours de la démonstration du lemme.

On pose alors $d := \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ ; $d$ est diagonalisable [1] et $d \in \mathbb{K}[u]$.

Puis, $n := u - d = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)\, p_i \in \mathbb{K}[u]$. Reste à montrer que $n$ est nilpotent.

On a, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $n^q = \sum_{i=1}^{s} (u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^q\, p_i$. [2]

Or $(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\, p_i = \left((X-\lambda_i)^{\alpha_i} P_i\right)(u) = 0$ car $\chi_u | \,(X-\lambda_i)^{\alpha_i} P_i$.
Notant $q = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \alpha_i$, on a donc : $n^q = 0$.

**Unicité :** Soit $(d', n') \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $d'$ diagonalisable, $n'$ nilpotent, $u = d' + n'$ et $d' \circ n' = n' \circ d'$.
On a donc : $d - d' = n' - n$.
Or $d'$ et $n'$ commutent avec $u$ donc aussi avec $d$ et $n$ (vu qu'ils sont dans $\mathbb{K}[u]$).
Donc $d$ et $d'$ sont simultanément diagonalisables donc $d - d'$ est diagonalisable.
Mais aussi, $n' - n$ est nilpotent donc $d - d' = n' - n = 0$. ■

# Références

[Gou Al] X. GOURDON – *Les maths en tête : Algèbre*, 2e éd., Ellipses, 2009.

1. Deux façons de le voir :
– On prend des bases de $N_1, \ldots, N_s$, qu'on concatène pour obtenir une base de $E$ qu'on appelle $\mathcal{B}$. Alors dans la base $\mathcal{B}$, $d$ a pour matrice $\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{\dim N_1},\ldots,\underbrace{\lambda_s,\ldots,\lambda_s}_{\dim N_s})$.
– Chacun des $p_i$ est diagonalisable, vu que $X^2 - X$ en est un polynôme annulateur scindé à racines simples. Comme ce sont des polynômes en $u$, ils commutent tous. On utilise alors le théorème de diagonalisation simultanée et on en déduit que $d$ est diagonalisable.

2. Cela se montre aisément par récurrence, en utilisant que les $p_i$ commutent en tant que polynômes en $u$ (et donc on peut utiliser le binôme de Newton), que $p_i^2 = p_i$ et que $p_i \circ p_j = 0$.