Estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre d'une loi $\mathcal{U}([0,\theta])$

Leçons : 263, *260, 262*

Merci Caroline ! [1]

Théorème

Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([0,\theta])$, avec $\theta > 0$.
On note $\widehat{\theta_n}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.
Alors :

1. $\widehat{\theta_n} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$;
2. $\widehat{\theta_n}$ est biaisé car $\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}\right] = \dfrac{n}{n+1}\theta$;
3. $\widehat{\theta_n}$ est fortement consistant, ce qui signifie $\widehat{\theta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta\text{-ps}} \theta$;
4. $\widehat{\theta_n}$ est de vitesse $\dfrac{1}{n}$, car $n\left(\widehat{\theta_n}-\theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}_\theta\text{-}\mathcal{L}} -\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$;
5. Le risque quadratique de $\widehat{\theta_n}$ vaut $\mathbb{E}_\theta\left[\left(\widehat{\theta_n}-\theta\right)^2\right] = \dfrac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration :

1. Relativement à la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^+)^n$, le modèle statistique $\left((\mathbb{R}^+)^n, \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}\}_{\theta>0}\right)$ est dominé est donc admet une vraisemblance qui s'écrit :

$$\forall\theta>0, L_n(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \begin{cases} \theta^{-n} & \text{si } 0\leqslant x_1,\ldots,x_n\leqslant\theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc l'estimateur recherché vaut $\widehat{\theta_n} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. [2]

2. On va d'abord calculer la loi de $\widehat{\theta_n}$; soit $t\in\mathbb{R}^+$.

$$F_{\widehat{\theta_n}}(t) = \mathbb{P}_\theta\left(\widehat{\theta_n}\leqslant t\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\forall i\in[\![1,n]\!], X_i\leqslant t\right) = \mathbb{P}_\theta\left(X_1\leqslant t\right)^n = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{\theta}\right)^n & \text{si } t\leqslant\theta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit que $\widehat{\theta_n}$ est à densité et qu'elle vaut :

$$f_{\widehat{\theta_n}}(t) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(t).$$

On peut désormais calculer $\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}\right]$:

$$\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}\right] = \int_{\mathbb{R}^+} t f_{\widehat{\theta_n}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Donc $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur biaisé [3], mais asymptotiquement sans biais car $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}\right] = \theta$.

1. Un lien vers la page personnelle de Caroline ROBET. On trouvera néanmoins une partie de la démonstration dans le livre de B. CADRE et C. VIAL – *Statistique mathématique*, Ellipses, 2012.
2. Vous m'autorisez à ne pas tracer la courbe sur cette page ? Promis, je la ferai au tableau.
3. C'était prévisible car $\widehat{\theta_n}\leqslant\theta$ $\mathbb{P}_\theta$-ps.

Diffusion à titre gratuit uniquement.

3. Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}_\theta\left(\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}_\theta\left(\theta - \varepsilon < \widehat{\theta_n} < \theta + \varepsilon\right) \underset{4}{=} 1 - \left(F_{\widehat{\theta_n}}(\theta + \varepsilon) - F_{\widehat{\theta_n}}(\theta - \varepsilon)\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n\right)$$
$$= \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

Pour ε suffisamment petit, $\left|\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right| < 1$ donc $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}_\theta\left(\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right)$ converge.

On va utiliser le lemme de Borel-Cantelli, notons A_n l'événement $\left\{\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right\}$.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\theta(A_n) < \infty$, on a : $\mathbb{P}_\theta\left(\liminf_{n \to \infty} A_n^{\mathrm{c}}\right) = 1$.

En d'autres termes : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}_\theta$-ps, $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant n, \left|\widehat{\theta_k} - \theta\right| < \varepsilon$.

En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists N_p$ $\mathbb{P}_\theta$-négligeable, $\forall \omega \in N_p^{\mathrm{c}}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant n, \left|\widehat{\theta_k}(\omega) - \theta\right| < \frac{1}{p}$.

On pose alors $N = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} N_p$; N est un événement $\mathbb{P}_\theta$-négligeable et :

$$\forall \omega \in N^{\mathrm{c}}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geqslant n, \left|\widehat{\theta_k}(\omega) - \theta\right| < \frac{1}{p}.$$

Autrement dit, on a : $\widehat{\theta_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_\theta\text{-ps}} \theta$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ et $n \geqslant \frac{t}{\theta}$:

$$\mathbb{P}_\theta\left(n\left(\theta - \widehat{\theta_n}\right) \geqslant t\right) = \mathbb{P}_\theta\left(\theta - \frac{t}{n} \geqslant \widehat{\theta_n}\right) = F_{\widehat{\theta_n}}\left(\theta - \frac{t}{n}\right) = \left(\frac{\theta - \frac{t}{n}}{\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}.$$

Donc $\mathbb{P}_\theta\left(n\left(\theta - \widehat{\theta_n}\right) \leqslant t\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}$, d'où $n\left(\theta - \widehat{\theta_n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_\theta\text{-}\mathcal{L}} \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ et donc $n\left(\widehat{\theta_n} - \theta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}_\theta\text{-}\mathcal{L}} -\mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

5. Par le lemme de transfert, on a :

$$\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}^2\right] = \int_{\mathbb{R}^+} t^2 f_{\widehat{\theta_n}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\theta^n}\frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

Donc le risque quadratique vaut :

$$\mathbb{E}_\theta\left[\left(\widehat{\theta_n} - \theta\right)^2\right] = \mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}^2\right] - 2\theta\mathbb{E}_\theta\left[\widehat{\theta_n}\right] + \theta^2 = \left(\frac{n}{n+2} - 2\frac{n}{n+1} + 1\right)\theta^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2.$$ ■

4. On utilise ici que $\widehat{\theta_n}$ est sans atome, car $\widehat{\theta_n}$ possède une densité.

Diffusion à titre gratuit uniquement.