Harmonicité et propriété de la moyenne

Leçons : 222, *215, 228*

[X-ENS An4], exercices 1.23 et 1.24

Théorème

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifiant la propriété de la moyenne, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x_0, y_0) \in U, \exists r_0 > 0, \forall r \in]0, r_0[\,, f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$$

Alors $\Delta f \equiv 0$ sur U (on dit que f est harmonique sur U).

2. Réciproquement, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifie $\Delta f \equiv 0$,
Alors f vérifie la propriété de la moyenne sur U.

Démonstration :

1. Soient $(x_0, y_0) \in U$ et r_0 donné par l'hypothèse.
On pose $m : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta$ pour $r \in [0, r_0[$.
Par hypothèse, m est constante, égale à $2\pi f(x_0, y_0)$.
Pour simplifier, on note $g : (r, \theta) \mapsto f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$; g est continue sur $[0, r_0[\times [0, 2\pi]$ et admet des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ sont continues sur $[0, 2\pi]$ à r fixé dans $[0, r_0[$.
Par théorème de dérivation, on obtient les dérivées de m sur $[0, r_0[$:

$$\forall r \in [0, r_0[\,, 0 = m'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) \right) d\theta$$

Puis en redérivant, en utilisant le théorème de Schwarz (les dérivées partielles sont toutes prises en $(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$ pour plus de simplicité) :

$$\forall r \in [0, r_0[\,, 0 = m''(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\theta$$

En particulier, quand on prend $r = 0$ dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta}_{=\pi} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 2\theta\, d\theta}_{=0} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta}_{=\pi} \\ &= \pi \Delta f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Et f est donc harmonique sur U.

2. Par translation, on se ramène au cas où $(0, 0) \in U$ et il suffit de ne montrer la propriété de la moyenne qu'en ce point.
Comme U est ouvert, il existe $R > 0$ telle que $\mathcal{B}(0, R) \subset U$.
La fonction $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est continue sur $[0, R[\times [0, 2\pi]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ à r fixé dans $[0, R[$.
On en déduit que $F : r \mapsto \int_0^{2\pi} g(r, \theta)\, d\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R[$.
De plus, $\forall r \in [0, R[, F'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) d\theta$.
On considère la forme différentielle $\omega = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$ et soit $\Gamma = \mathcal{C}(0, r)$, paramétré par $\theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, où $r \in [0, R[$.

Ainsi, $\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) \mathrm{d}\theta = rF'(r)$.
Mais f est harmonique, donc $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et ω est une forme différentielle fermée... et comme $\mathcal{D}(0,R)$ est étoilé, par le théorème de Poincaré [1], ω est exacte.
Ainsi, comme Γ est un arc fermé, on en déduit que $\forall r \in [0,R[, rF'(r) = \int_\Gamma \omega = 0$.
Donc $\forall r \in]0,R[, F'(r) = 0$, et par continuité en 0, F est donc constante sur $[0,R[$ et demeure égale à $F(0) = 2\pi f(0,0)$.
Donc, finalement : $\exists R > 0, \forall r \in [0,R[, f(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. ■

Références

[X-ENS An4] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 4*, 1re éd., Cassini, 2012.

1. Comme on l'utilise rarement, un petit rappel sur le théorème de Poincaré. Dans $\mathbb{R}^n$, on écrit $\omega = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k^*$ (où $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) et on souhaiterait réussir à montrer que ω possède pour "primitive" la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 \omega((1-t)a+tx)(x-a)\,\mathrm{d}t$, où a est au cœur de l'ouvert étoilé U ; en pratique, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on va montrer l'égalité $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha_i(x)$. Pour cela, on utilise le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.