Ruine du joueur

Leçons : *223, 226, 249, 264*

[GS], partie 3.9

Théorème

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-1}$; on note $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i$, où $a \in \mathbb{N}$.
Soit $b \in \mathbb{N}^*$, on note $T = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n \in \{0, a+b\}\}$ et $\rho = \mathbb{P}(S_T = a+b)$.[1]
On a deux cas (on note $q = 1-p$) :

– Soit $p \neq \frac{1}{2}$, dans ce cas $\rho = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$ et $\mathbb{E}[T] = \dfrac{(a+b)\rho - a}{p-q}$;

– Soit $p = \frac{1}{2}$, dans ce cas $\rho = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{E}[T] = ab$.

Démonstration :

Étape 1 : On va commencer par obtenir une formule de récurrence.
On note $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(.|S_0 = k)$ et $A = \{S_T = a+b\}$. On calcule $\mathbb{P}_k(A)$.
Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}_k(A) = \mathbb{P}_k(A|Y_1 = 1)\,\mathbb{P}_k(Y_1 = 1) + \mathbb{P}_k(A|Y_1 = -1)\,\mathbb{P}_k(Y_1 = -1) = \mathbb{P}_{k+1}(A)p + \mathbb{P}_{k-1}(A)q.$$

On note p_k pour désigner $\mathbb{P}_k(A)$, et on obtient la récurrence linéaire :

$$\begin{cases} p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}, \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant a+b-1 \\ p_0 = 1 \text{ et } p_{a+b} = 0 \end{cases}.$$

Étape 2 : Déterminons la valeur de ρ.

– Dans le cas où $p \neq \frac{1}{2}$, alors l'équation caractéristique de cette récurrence linéaire est : $x = px^2 + q$, dont les solutions sont 1 et $\frac{q}{p}$.
On en déduit alors : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0, a+b]\!], p_k = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^k$.
Mais on dispose des valeurs de p_0 et de p_{a+b} ; cela nous fournit : $0 = \alpha + \beta$ et $1 = \alpha + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$.
Ainsi, $\alpha = -\beta$ et $\beta = \left(-1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right)^{-1}$.
Par conséquent, $\rho = p_a = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$.

– Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, alors l'équation caractéristique devient : $x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, dont 1 est l'unique solution.
On en déduit alors : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0, a+b]\!], p_k = \alpha + \beta k$.
Mais on dispose des valeurs de p_0 et de p_{a+b} ; cela nous fournit : $0 = \alpha$ et $1 = \alpha + \beta(a+b)$.

1. Un point sur l'interprétation de l'énoncé. Les variables Y_n désignent le résultat d'un jeu qui peut se solder par le gain ou la perte d'un euro pour le joueur ; la probabilité de gagner un euro valant p. La valeur S_n désigne la fortune du joueur après n répétitions du jeu ; ainsi $S_0 = a$ est l'argent que possède le joueur avant de commencer à jouer. La banque, quant à elle, possède b euros ; quand le joueur gagne, elle perd, et réciproquement. Ainsi, le jeu doit s'arrêter quand l'un ou l'autre des acteurs (le joueur ou la banque) fait faillite : cela se produit à l'instant T. La probabilité que le joueur gagne finalement contre la banque est donc ρ. On veut connaître cette probabilité, ainsi que le temps moyen de jeu, en fonction des valeurs de a, b et p.

Ainsi, $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{a+b}$.
Par conséquent, $\rho = p_a = \dfrac{a}{a+b}$.

Étape 3 : On va suivre la même tactique pour calculer l'espérance de T : d'abord obtenir une formule de récurrence, puis en profiter, en distinguant les cas selon la valeur de p.

– La formule des probabilités totales nous donne :

$$\mathbb{E}_k[T] = \mathbb{E}_k\left[T|Y_1 = 1\right]\mathbb{P}\left(Y_1 = 1\right) + \mathbb{E}_k\left[T|Y_1 = -1\right]\mathbb{P}\left(Y_1 = -1\right) = \left(1 + \mathbb{E}_{k+1}[T]\right)p + \left(1 + \mathbb{E}_{k-1}[T]\right)q.$$

On note e_k pour désigner $\mathbb{E}_k[T]$, et on obtient la récurrence linéaire :

$$\begin{cases} e_k = 1 + pe_{k+1} + qe_{k-1}, \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant a+b-1 \\ e_0 = 0 \text{ et } e_{a+b} = 0 \end{cases}.$$

On note, pour $k \geqslant 1$, $d_k = e_k - e_{k-1}$; la relation de récurrence devient : $0 = 1 + pd_{k+1} - qd_k$.

– Dans le cas où $p \neq \dfrac{1}{2}$, on pose l le réel vérifiant : $0 = 1 + pl - ql$, c'est-à-dire que $l = \dfrac{1}{q-p}$.
La relation de conséquence devient donc : $0 = p\left(d_{k+1} - l\right) - q\left(d_k - l\right)$.
Par conséquent, $d_{k+1} - l = \dfrac{q}{p}\left(d_k - l\right)$, et donc $d_k - l = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{k-1}\left(d_1 - l\right)$.
Donc, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$e_n = \sum_{k=1}^{n} d_k + e_0 = \sum_{k=1}^{n}\left(l + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\left(d_1 - l\right)\right) = nl + \left(d_1 - l\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k = nl + \left(d_1 - l\right)\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \frac{q}{p}}.$$

Or $e_{a+b} = 0 = (a+b)l + \left(d_1 - l\right)\dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}}$, ce qui nous donne : $\dfrac{d_1 - l}{1 - \frac{q}{p}} = -\dfrac{(a+b)l}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$.

Donc $\mathbb{E}[T] = e_a = al - \left(1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^a\right)\dfrac{(a+b)l}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \dfrac{1}{q-p}\left(a - (a+b)\dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}\right) = \dfrac{(a+b)\rho - a}{p-q}$.

– Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{1}{2}d_{k+1} = \dfrac{1}{2}d_k - 1$, donc $d_{k+1} = d_k - 2$, d'où $d_k = d_1 - 2(k-1)$.
Alors, pour $n \geqslant 1$, $e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k = nd_1 - 2\sum_{k=0}^{n-1} k = nd_1 - 2\frac{n(n-1)}{2} = n\left(d_1 - (n-1)\right)$.
Or $e_{a+b} = 0 = (a+b)\left(d_1 + (a+b-1)\right)$, d'où $d_1 = a+b-1$.
Donc $\mathbb{E}[T] = e_a = a(a+b-1-(a-1)) = ab$. ■

Références

[GS] G. R. GRIMMETT et D. R. STIRZAKER – *Probability and Random Processes*, 3e éd., Oxford University Press, 2001.