$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple, mais pas seulement

Leçons : 161, 204, *101, 103, 106, 108, 160, 203*

[H2G2], partie VII.A
[Per], partie VI.2

Théorème

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple, connexe et compact.

Démonstration :

→ Montrons que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact. [1]

On a $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{\mathrm{I}_3\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^t MM \end{array} \right.$ est une application continue.
Aussi, $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ est borné car ses éléments sont des isométries ; donc $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est borné.
Ainsi, comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est compact.

→ Aussi, $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs) ; on va montrer qu'on peut relier continûment ses éléments à I_3.
Soit $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, on dispose du résultat de réduction :

$$\exists P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}), M = PU_\theta P^{-1}, \text{ où } U_\theta = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Soit alors $\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & PU_{t\theta}P^{-1} \end{array} \right.$; γ est un chemin continu reliant M à I_3, et restant dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Donc $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est connexe (par arcs).

→ On va maintenant montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est simple ; pour cela, soit $H \triangleleft \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, non-réduit à $\{\mathrm{I}_3\}$. Voilà ce qu'on va faire : on va montrer que les retournements de $\mathbb{R}^3$ sont tous conjugués dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, puis que H en contient un ; ainsi H les contiendra tous, et comme ils engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ [2], on aura $H = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, d'où la simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Commençons par le lemme suivant.

Lemme

$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration :
Soient D, D' deux droites de $\mathbb{R}^3$, engendrées par les vecteurs unitaires d et d'.

1. Notons que la connexité et la compacité de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ se montre exactement de la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on va d'abord montrer que les réflexions orthogonales engendrent $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Un rappel : une réflexion orthogonale, c'est une matrice diagonalisable de spectre $\{-1, 1\}$, avec -1 de multiplicité 1.

Soit $u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $F_u = \{x \in E | u(x) = x\}$ l'espace de ses points fixes. On pose $p_u = n - \dim F_u$ et on va en fait montrer que u est produit d'au plus p_u réflexions orthogonales.

On raisonne par récurrence sur $p_u \in \mathbb{N}$. Le cas $p_u = 0$ est trivial puisqu'il correspond à $u = \mathrm{I}_n$.

Supposons donc $p_u > 0$; soit $x \in F_u^\perp \backslash \{0\}$, et soit $y = u(x)$. Comme $x \notin F_u$, $y \neq x$; et comme F_u et $F_u^\perp$ sont u-stables, $y \in F_u^\perp$. De plus, $\langle x-y, x+y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ (car u est une isométrie), donc $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux. Soit alors τ la réflexion orthogonale associée au vecteur $x - y$ (ie telle que $E_{-1} = \mathrm{Vect}\{x - y\}$). On a donc : $\tau(x-y) = y - x$ et $\tau(x+y) = x + y$, d'où, par demi-différence : $\tau(u(x)) = \tau(y) = x$. Aussi, $x - y \in F_u^\perp$, ce qui implique sur $\tau_{|F_u} = \mathrm{Id}_{F_u}$. En conséquence, $F_u \subset F_{\tau u}$; mais $x \in F_{\tau u} \backslash F_u$, donc $p_u > p_{\tau u}$. On utilise donc notre hypothèse de récurrence sur τu : $\tau u = \tau_1 \dots \tau_r$, où les τ_i sont des réflexions orthogonales et $r \leqslant p_{\tau u}$. Mais alors on a $u = \tau\tau_1 \dots \tau_r$ et $r + 1 \leqslant p_u$, ce qui achève la récurrence.

Désormais, soit $u \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Pour $n = 3$, on conclut alors que les retournements engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$: si $u \neq I_3$, alors $u = \tau_1\tau_2 = (-\tau_1)(-\tau_2)$ et les opposés des réflexions orthogonales sont ici des retournements.

Quand $n \geqslant 3$, il y a encore un peu de travail ; on peut déjà écrire $u = \tau_1 \dots \tau_{2p}$ avec $2p \leqslant n$, les τ_i étant des réflexions orthogonales. Prenons une paire de réflexions orthogonales τ_1, τ_2 ; alors on peut trouver une paire de retournements σ_1, σ_2 telle que : $\tau_1\tau_2 = \sigma_1\sigma_2$. En effet : soient H_1 et H_2 les hyperplans laissés fixes par τ_1 et τ_2 et soit V un sev de $H_1 \cap H_2$ qui soit de dimension $n - 3$. Alors $\tau_1\tau_{2|V} = \mathrm{Id}$ et donc $\tau_1\tau_2\left(V^\perp\right) \subset V^\perp$. Mais d'après le cas $n = 3$, on peut écrire $\tau_1\tau_{2|V^\perp} = \sigma_1\sigma_2$, où les σ_i sont des retournements de $V^\perp$. Il ne reste qu'à les prolonger par l'identité sur V, et on a gagné.

Soient (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) des bases orthonormales de $D^\perp$ et de $D'^\perp$.
On a donc construit deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^3$; la matrice de passage P de l'une à l'autre est donc dans $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
Mais quitte à changer d' en $-d'$, on peut supposer que $P \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. ■

Soient R_D et $R_{D'}$ deux retournements de $\mathbb{R}^3$ d'axes respectifs D et D'.
Par le lemme, il existe $S \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ envoyant D sur D'.
Alors $SR_DS^{-1} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est semblable à R_D ; c'est donc un retournement de $\mathbb{R}^3$.
Soit $x \in D'$, on a : $SR_D \underbrace{S^{-1}x}_{\in D} = SS^{-1}x = x$; ainsi l'axe de SR_DS^{-1} est D', id est : $SR_DS^{-1} = R_{D'}$. On a ainsi montré que tous les retournements sont conjugués dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Reste à trouver un retournement dans H.
Soit $h \in H$ avec $h \neq \mathrm{I}_3$. On pose : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) \end{array} \right.$.
φ est une application continue, donc $\varphi\left(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\right)$ est un compact connexe de $\mathbb{R}$, un segment.
$\forall g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), ghg^{-1}h^{-1} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ donc $\varphi(g)$ est de la forme $1 + 2\cos\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ (par le théorème de réduction des éléments de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$).
Comme en plus $\varphi(\mathrm{I}_3) = 3$, on en déduit que $\varphi\left(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\right) = [a, 3]$, pour un certain réel a.
Par l'absurde, supposons que $a = 3$.
Alors $\forall g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\left(ghg^{-1}h^{-1}\right) = 3$, et donc $ghg^{-1}h^{-1} = \mathrm{I}_3$.
En conséquence, $h \in \mathrm{Z}\left(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\right) = \{\mathrm{I}_3\}$, ce qui est exclu.[3]
On a donc bien $a < 3$.
La suite $\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant 3 pour limite, on peut prendre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos\frac{\pi}{n} < 3$.
Soit alors $g_n \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n}$.
On pose $h_n = g_nhg_n^{-1}h^{-1}$; $h_n \in H$, car H est conjugué dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et car $h \in H$.
Comme $\mathrm{tr}\ h_n = 1 + 2\cos\frac{\pi}{n}$, on obtient que h_n est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{n}$; ainsi $h_n^n \in H$ est une rotation d'angle π, autrement dit, un retournement. Ce qui conclut la preuve. ■

Références

[H2G2] P. Caldero et J. Germoni – *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Calvage & Mounet, 2013.

[Per] D. Perrin – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

3. En effet, soit $n \geqslant 2$, et $h \in \mathrm{Z}\left(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\right)$; on va montrer que h est une homothétie.
Soit D une droite de $\mathbb{R}^n$; on a : $R_{h(D)} = hR_Dh^{-1} = R_D$, car h est central.
Donc h laisse stables toutes les droites de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une homothétie (c'est facile : on prend deux vecteurs non-colinéaires, ce sont des vecteurs propres de h, leur somme également, et on montre que tous les vecteurs sont de même valeur propre.)