Distributions à support ponctuel

Leçons : ***254, 255***

[Zui], théorème 2.4.5

Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \Omega$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a : $\operatorname{supp} \partial^\alpha \delta_{x_0} = \{x_0\}$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, telle que $\operatorname{supp} T \subset \{x_0\}$.
   Alors $\exists k \in \mathbb{N}, \exists \left(a_\alpha\right)_{|\alpha| \leqslant k} \subset \mathbb{C}, T = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$.

Démonstration :

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}\left(\Omega \setminus \{x_0\}\right)$, on a : $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0$ donc $\operatorname{supp} \partial^\alpha \delta_{x_0} \subset \{x_0\}$.
   Réciproquement, soit V_{x_0} un voisinage de x_0 dans Ω et $\chi \in \mathcal{D}\left(V_{x_0}\right)$ avec $\chi \equiv 1$ au voisinage de x_0.
   On pose $\varphi : x \mapsto \dfrac{\left(x - x_0\right)^\alpha}{\alpha!} \chi(x)$, alors $\varphi \in \mathcal{D}\left(V_{x_0}\right)$.
   De plus, par la formule de Leibniz :
   $$\partial^\alpha \varphi\left(x_0\right) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \left[\left(x - x_0\right)^\alpha\right] |_{x = x_0} \partial^{\alpha - \beta} \chi\left(x_0\right) = \frac{1}{\alpha!} \binom{\alpha}{\alpha} \partial^\alpha \left[\left(x - x_0\right)^\alpha\right] |_{x = x_0} \chi\left(x_0\right) = \frac{1}{\alpha!} 1 \alpha! 1 = 1$$

2. On aura besoin des deux lemmes suivants.

   Lemme 1

   Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$.
   Alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

   Lemme 2

   Soit $k \in \mathbb{N}$, $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k_{\mathrm{C}}(\Omega)$.
   On suppose que : $\forall x \in \operatorname{supp} T, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant k \Rightarrow \partial^\alpha \varphi(x) = 0$.
   Alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

   Soit ω un ouvert contenant x_0 avec $\overline{\omega}$ compact dans Ω.
   Comme $\overline{\omega}$ est compact, on sait que $T \in \mathcal{D}'(\omega)$ est d'ordre fini, noté $k \in \mathbb{N}$.
   Soit $\chi \in \mathcal{D}(\omega)$, tel que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de x_0, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
   On a : $\langle T, (1 - \chi)\varphi \rangle = 0$ car $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\left(1 - \chi\right) = \varnothing$ donc $\langle T, \chi\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.
   On pose : $\psi : x \mapsto \chi(x) \left[\varphi(x) - \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \dfrac{\left(x - x_0\right)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi\left(x_0\right)\right]$; alors $\psi \in \mathcal{D}(\omega)$ et pour $|\beta| \leqslant k$:
   $$\begin{aligned} \partial^\beta \psi\left(x_0\right) &= \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma \chi\left(x_0\right) \partial^{\beta - \gamma} \left[\varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\left(x - x_0\right)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi\left(x_0\right)\right] \Bigg|_{x = x_0} \\ &= \binom{\beta}{0} 1 \left(\partial^\beta \varphi\left(x_0\right) - 0 - \frac{\beta!}{\beta!} \partial^\beta \varphi\left(x_0\right)\right) = 0 \end{aligned}$$
   Et comme $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$, par le lemme 2, on a : $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
   Par conséquent,
   $$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha \varphi\left(x_0\right)}{\alpha!} \langle T, \chi_\alpha \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\langle T, \chi_\alpha \rangle}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi\left(x_0\right)$$
   où $\chi_\alpha : x \mapsto \chi(x) \left(x - x_0\right)^\alpha$.

Démonstration du lemme 1 :
Comme $\operatorname{supp}\varphi \subset (\operatorname{supp} T)^c$, on a :

$$\forall x \in \operatorname{supp}\varphi, \exists V_x \text{ un voisinage ouvert de } x, \forall \psi \in \mathcal{D}(V_x), \langle T, \psi \rangle = 0$$

Alors on obtient : $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{x \in \operatorname{supp}\varphi} V_x$.

Et comme $\operatorname{supp}\varphi$ est compact, par Borel-Lebesgue : $\exists x_1, \dots, x_N \in \operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{x_i}$.

Soit $(\chi_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ une famille d'éléments tels que :
- $\forall i \in [\![1, N]\!], \chi_i \in \mathcal{D}(V_{x_i})$;
- $\sum_{i=1}^{N} \chi_i(x) = 1$ pour $x \in \operatorname{supp}\varphi$.

Alors $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \chi_i \varphi$ et donc $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle T, \chi_i \varphi \rangle = 0$ car $\chi_i \varphi \in \mathcal{D}(V_{x_i})$. ■

Démonstration du lemme 2 :
On note $K = \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi$. Si $K = \varnothing$, on renvoie au lemme 1. Supposons donc désormais que K est non-vide.
Pour $\varepsilon > 0$, on pose $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, K) \leqslant \varepsilon\}$. On a : $\exists \varepsilon_0 \in]0, 1], \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], K_\varepsilon \subset \Omega$.
Soit $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(K_\varepsilon)$, telle que $\chi_\varepsilon \equiv 1$ sur $K_{\frac{\varepsilon}{2}}$ et telle que quand $|\alpha| \leqslant k$, on ait : $|\partial^\alpha \chi_\varepsilon| \leqslant C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$.
On a $\langle T, (1 - \chi_\varepsilon)\varphi \rangle = 0$ car $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\ (1 - \chi_\varepsilon)\varphi \subset K \cap K^c_{\frac{\varepsilon}{2}} = \varnothing$.
Donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi_\varepsilon \rangle$, puis :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{K_\varepsilon} |\partial^\alpha (\chi_\varepsilon \varphi)|, \text{ où } C \in \mathbb{R}^{+*} \text{ est indépendant de } \varepsilon$$

Or, par Leibniz : $\partial^\alpha (\chi_\varepsilon \varphi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} \chi_\varepsilon \partial^\beta \varphi$.
D'où : $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha - \beta} \varepsilon^{|\beta| - |\alpha|} \sup_{K_\varepsilon} \left| \partial^\beta \varphi \right|$.
Et comme $|\beta| - |\alpha| \geqslant |\beta| - k$ et $\varepsilon \leqslant 1$, on a :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant k} \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ \alpha \geqslant \beta}} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha - \beta} \varepsilon^{|\beta| - k} \sup_{K_\varepsilon} \left| \partial^\beta \varphi \right|$$

On pose $C' = C \max_{|\beta| \leqslant k} \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ \alpha \geqslant \beta}} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha - \beta} \right)$ et on obtient :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C' \sum_{|\beta| \leqslant k} \varepsilon^{|\beta| - k} \sup_{K_\varepsilon} \left| \partial^\beta \varphi \right|$$

On va montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{|\beta| - k} \sup_{K_\varepsilon} \left| \partial^\beta \varphi \right| = 0$ pour $|\beta| \leqslant k$; on aura ainsi terminé la preuve.
On sait que : $\exists x_\varepsilon \in K_\varepsilon, \sup_{K_\varepsilon} \left| \partial^\beta \varphi \right| = \left| \partial^\beta \varphi(x_\varepsilon) \right|$ et $\exists x_0 \in K, |x_\varepsilon - x_0| \leqslant \varepsilon$.
$\partial^\beta \varphi$ étant continue à support compact, elle est uniformément continue. Soit $\delta > 0$;

$$\exists \eta > 0, \forall x, x' \in \Omega, |x - x'| < \eta \Rightarrow \left| \partial^\beta \varphi(x) - \partial^\beta \varphi(x') \right| \leqslant \delta$$

Choisissons $\varepsilon \leqslant \eta$, on obtient $\left| \partial^\beta \varphi(x_\varepsilon) - \partial^\beta \varphi(x_0) \right| \leqslant \delta$ et comme $x_0 \in K \subset \operatorname{supp} T$: $\left| \partial^\beta \varphi(x_\varepsilon) \right| \leqslant \delta$.
On en déduit, pour $|\beta| = k$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{|\beta| - k} \sup_{K_\varepsilon} \left| \partial^\beta \varphi \right| = 0$.

Supposons désormais $|\beta| < k$; par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\partial^\beta \varphi(x_\varepsilon) = \sum_{|\gamma| \leqslant k-1-|\beta|} \frac{(x_\varepsilon - x_0)^\gamma}{\gamma!} \partial^{\gamma+\beta}\varphi(x_0) + \sum_{|\gamma|=k-|\beta|} \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-|\beta|-1}}{(k-|\beta|-1)!} \partial^{\gamma+\beta}\varphi(x_0 + t(x_\varepsilon - x_0))(x_\varepsilon - x_0)^\gamma \,\mathrm{d}t$$

$$\left|\partial^\beta \varphi(x_\varepsilon)\right| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant k-1-|\beta|} \frac{\left|(x_\varepsilon - x_0)^\gamma\right|}{\gamma!} \left|\partial^{\gamma+\beta}\varphi(x_0)\right| + \frac{1}{(k-|\beta|-1)!} \sum_{|\gamma|=k-|\beta|} \int_0^1 (1-t)^{k-|\beta|-1} \left|\partial^{\gamma+\beta}\varphi((1-t)x_0 + tx_\varepsilon)\right| \left|(x_\varepsilon - x_0)^\gamma\right| \,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $|(1-t)x_0 + tx_\varepsilon - x_0| = t\,|x_\varepsilon - x_0| \leqslant \varepsilon$ donc $(1-t)x_0 + tx_\varepsilon \in K_\varepsilon$.
D'autre part, $x_0 \in K \subset \operatorname{supp} T$ donc pour $|\gamma| + |\beta| \leqslant k-1$, on a : $\partial^{\gamma+\beta}\varphi(x_0) = 0$.
Par conséquent :

$$\left|\partial^\beta \varphi(x_\varepsilon)\right| \leqslant \frac{1}{(k-|\beta|-1)!} \sum_{|\gamma|=k-|\beta|} \int_0^1 1 \sup_{K_\varepsilon} \left|\partial^{\gamma+\beta}\varphi\right| \varepsilon^{|\gamma|} \,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon^{k-|\beta|}}{(k-|\beta|-1)!} \sum_{|\gamma|+|\beta|=k} \sup_{K_\varepsilon} \left|\partial^{\gamma+\beta}\varphi\right|$$

Donc $\varepsilon^{|\beta|-k} \left|\partial^\beta \varphi(x_\varepsilon)\right| \leqslant \dfrac{1}{(k-|\beta|-1)!} \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} \underbrace{\sup_{K_\varepsilon} |\partial^\alpha \varphi|}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0}$.

Et finalement : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{|\beta|-k} \sup_{K_\varepsilon} \left|\partial^\beta \varphi\right| = 0$. ■

■

Références

[Zui] C. ZUILY – *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod, 2002.