Nombre de zéros des solutions d'une équation différentielle

Leçons : 220, 221, 224

[ZQ], théorème X.VI.3

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $q : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\, \mathrm{d}u = +\infty$ et que $q'(x) = o_{x\to+\infty}\left(q(x)^{\frac{3}{2}}\right)$.[1]
Soit y une solution réelle non-nulle de $y'' + qy = 0$ sur $[a, +\infty[$ et soit $N(x)$ le nombre de zéros de y sur $[a, x]$.
Alors $N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}\, \mathrm{d}u$.

Démonstration :

Étape 1 : On va faire un "changement de temps" : posons, pour $x \in [a, +\infty[$, $\tau(x) = \displaystyle\int_a^x \sqrt{q(u)}\, \mathrm{d}u$.

Alors τ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[, \tau'(x) = \sqrt{q(x)} > 0$.
Donc τ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $[a, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$ et donc τ^{-1} est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[a, +\infty[$.[2]
On pose alors $Y = y \circ \tau^{-1}$, ie $\forall x \in [a, +\infty[, y(x) = Y(\tau(x))$.
En conséquence, pour $x \in [a, +\infty[$:

$$y'(x) = \tau'(x)Y'(\tau(x)) = \sqrt{q(x)}Y'(\tau(x)) \text{ et } y''(x) = \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y''(\tau(x)).$$

L'équation devient alors : $q(x)Y''(\tau(x)) + \dfrac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}Y'(\tau(x)) + q(x)Y(\tau(x)) = 0$.

En posant $t = \tau(x)$ et $\varphi(t) = \dfrac{q'(x)}{2q(x)^{\frac{3}{2}}}$, on obtient finalement :

$$Y''(t) + \varphi(t)Y'(t) + Y(t) = 0, \text{ où } t \in \mathbb{R}^+.$$

Étape 2 : On rappelle le lemme de relèvement.[3]

Lemme (*Relèvement*)

Soient $y_1, y_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et sans zéro commun ; on note $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.
Si $y_1(a) + \mathrm{i}y_2(a) = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, alors on peut écrire : $y_1 = r\cos\theta$ et $y_2 = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2}\, \mathrm{d}t$.

Démonstration :

On pose $\varphi = y_1 + \mathrm{i}y_2$ (par hypothèse, φ ne s'annule jamais) et $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, \mathrm{d}t + \ln r_0 + \mathrm{i}\theta_0$.

Alors $\left(\varphi \mathrm{e}^{-\psi}\right)' = \left(\varphi' - \psi'\varphi\right)\mathrm{e}^{-\psi} = \left(\varphi' - \dfrac{\varphi'}{\varphi}\varphi\right)\mathrm{e}^{-\psi} = 0$.

D'où $\forall x \in [a, +\infty[, \varphi(x)\mathrm{e}^{-\psi(x)} = \varphi(a)\mathrm{e}^{-\psi(a)} = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} \exp\left(-\ln r_0 - \mathrm{i}\theta_0\right) = 1$.

1. Cette hypothèse est indispensable : exhibons un contre-exemple. Prenons $a = 1$ et $q(x) = \frac{1}{4x^2}$. On a $q'(x) = \frac{-1}{2x^3}$ puis $\frac{q'(x)}{q(x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{-1}{2x^3}}{\frac{1}{8x^3}} = -4$. Résolvons $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$. On commence par chercher $y(x)$ sous la forme x^α ; alors on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\sqrt{x}$ est solution de l'équation (on pourrait déjà conclure notre contre-exemple). Par la méthode de Liouville, on va chercher $y(x)$ sous la forme $\sqrt{x}z(x)$; on se ramène alors à $z'' + \frac{1}{x}z' = 0$; et on obtient $y(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. Rappelons que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ fournit $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(x)}$.
3. Qu'on n'aura jamais le temps de démontrer au tableau, ni même d'énoncer.

Donc $y_1 + \mathrm{i}y_2 = \mathrm{e}^{\psi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où l'on convient $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et $\theta = \operatorname{Im} \psi$.
Mais pour tout $x \geqslant a$,

$$\psi(x) = \ln r_0 + \mathrm{i}\theta_0 + \int_a^x \frac{y_1'(t) + \mathrm{i}y_2'(t)}{y_1(t) + \mathrm{i}y_2(t)}\,\mathrm{d}t = \ln r_0 + \mathrm{i}\theta_0 + \int_a^x \frac{\left(y_1'(t) + \mathrm{i}y_2'(t)\right)\left(y_1(t) + \mathrm{i}y_2(t)\right)}{r(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Donc $\theta(x) = \theta_0 + \displaystyle\int_a^x \frac{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}{r(t)^2}\,\mathrm{d}t = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2}\,\mathrm{d}t.$ ■

Supposons que Y et Y' aient un zéro commun en t_0.
Comme $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est bornée.
Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système différentiel $\begin{pmatrix} Y''(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(t) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$
admet une unique solution quand on lui rajoute la condition $\begin{pmatrix} Y'(t_0) \\ Y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $Y \equiv 0$, et donc $y \equiv 0$. Mais on avait exclu cette éventualité : contradiction.
Donc Y et Y' n'ont aucun zéro commun.
Par le lemme de relèvement, on obtient $Y = r\sin\theta$ et $Y' = r\cos\theta$, où $r, \theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sont $\mathcal{C}^1$.

Étape 3 : En dérivant ces égalités, on obtient :

$$\begin{cases} Y' &= r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta &= r\cos\theta & (L_1) \\ Y'' &= r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta &= -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta & (L_2) \end{cases}.$$

Alors $\cos\theta\,(L_1) - \sin\theta\,(L_2)$ fournit : $r\theta' = r + \varphi r\cos\theta\sin\theta$.
Et sachant que r ne s'annule pas, on a : $\theta' = 1 + \varphi\dfrac{\sin 2\theta}{2}$.
Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\theta'(t) - 1| = |\varphi(t)|\dfrac{|\sin 2\theta(t)|}{2} \leqslant \dfrac{|\varphi(t)|}{2}$.
Or $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\theta'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t$ diverge, on a : $\theta(t) - \theta(0) = \displaystyle\int_0^t \theta'(s)\,\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_0^t \mathrm{d}s = t$.
En conséquence, on obtient : $\theta(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$.

Étape 4 : Notons M_a^b le nombre de zéros de Y sur $[a,b]$; on va montrer que $M_0^t \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{\pi}$.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$, tel que $\forall t \geqslant t_0, \theta'(t) > 0$, alors dès que $t \geqslant t_0$, on a :

$$\begin{aligned} M_{t_0}^t &= \#\{u \in [t_0, t] | \sin\theta(u) = 0\} = \#\{v \in [\theta(t_0), \theta(t)] | \sin v = 0\} = \#\{k \in \mathbb{Z} | \theta(t_0) \leqslant k\pi \leqslant \theta(t)\} \\ &= \left\lfloor \frac{\theta(t)}{\pi} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\theta_0}{\pi} \right\rceil + 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\theta(t)}{\pi} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}. \end{aligned}$$

On va montrer que $M_0^{t_0}$ est fini.
Par l'absurde, si on suppose $M_0^{t_0} = \infty$, alors l'ensemble $\{u \in [0, t_0] | Y(u) = 0\}$ possède un point d'accumulation u.
Soit (u_n) une suite dans cet ensemble qui tend vers u.
Comme Y est $\mathcal{C}^1$, on a : $Y'(u) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{Y(u_n) - Y(u)}{u_n - u} = 0$.
Mais on a déjà vu que c'est impossible... donc $M_0^{t_0} < \infty$.
En conséquence : $M_0^t \underset{t\to+\infty}{\sim} M_{t_0}^t \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{\pi}$.

Étape 5 : Enfin, rattachons cela à la quantité $N(x)$.

$$\begin{aligned} N(x) &= \#\{s \in [a,x] | y(s) = 0\} = \#\{s \in [a,x] | Y(\tau(s)) = 0\} = \#\{t \in [0, \tau(x)] | Y(t) = 0\} \\ &= M_0^{\tau(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\tau(x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

■

Références

[ZQ] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY – *Analyse pour l'agrégation*, 4e éd., Dunod, 2013.