Exercices donnés en colle (Lycée Chateaubriand, MP*, 15/16)

Je ne revendique en aucun cas la paternité de ces exercices : je n'ai fait que les sélectionner.
Pour toute demande de correction détaillée, ne pas hésiter à me contacter par e-mail.

Table des matières

1 Espaces dénombrables

Exercice 1.1 On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?

2 Familles sommables

Exercice 2.1 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

Exercice 2.2 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ la famille $\left(\dfrac{1}{i^\alpha + j^\alpha}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

Exercice 2.3 On dit que la famille de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$ est de carré sommable lorsque la famille $\left(u_i^2\right)_{i\in I}$ est sommable. On note $\mathrm{L}^2(I)$ l'ensemble des familles de carré sommable. Démontrer ou réfuter (à l'aide d'un contre-exemple) les assertions suivantes :

1. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors elle est de carré sommable.
2. Si $(u_i)_{i\in I}$ est de carré sommable, alors elle est sommable.
3. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont de carré sommable, alors $(u_i v_i)_{i\in I}$ est sommable.
4. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont de carré sommable, alors $\left(u_i v_j\right)_{(i,j)\in I^2}$ est sommable.
5. $\mathrm{L}^2(I)$ est un espace vectoriel.

Exercice 2.4 La famille $\left(\dfrac{2p+1}{p+q+2} - \dfrac{p}{p+q+1} - \dfrac{p+1}{p+q+3}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 2.5 Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$ pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$.

3 Probabilités

Exercice 3.1 Dans une population donnée, on suppose que la probabilité p_k pour qu'une famille ait k enfants est définie par : $p_0 = p_1 = a$, et pour $k \geq 2$, $p_k = (1-2a)2^{1-k}$, où $a \in]0,1[$. On suppose de plus que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille lors d'une naissance est la même.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux garçons ait deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

On pourra utiliser l'identité suivante, sans la démontrer : $\forall x \in [0,1[, \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Exercice 3.2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements quelconques de $\mathcal{F}$, alors $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) \geq 1 - n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$.

Exercice 3.3 Deux joueurs, Roland et Nadine, lancent successivement deux dés équilibrés. Roland joue le premier et le jeu s'arrête dès que Roland obtient une somme égale à 6 ou que Nadine obtient une somme égale à 7. Lequel d'entre eux à le plus de chances de l'emporter ?

Exercice 3.4 Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, où n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k \in \Omega \text{ et } kd \in \Omega\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}\left(A_d\right)$.
2. Soit $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ la suite des diviseurs premiers de n, rangés par ordre croissant.
   (a) Montrer que $\left(A_{p_i}\right)_{1\leq i\leq r}$ est une famille d'événements indépendants.
   (b) En déduire une expression de $\varphi(n)$, cardinal de l'ensemble des entiers naturels inférieurs à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).

Exercice 3.5 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. On définit une fonction Y par $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 3.6 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 3.7 Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de "six" obtenu. Il met de côté les dés correspondant et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de "six" obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ La variable $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ correspond alors au nombre de "six" obtenu après n lancers.

1. Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.
3. On définit alors la variable aléatoire $T = \min\{n > 1 | S_n = N\} \cup \{+\infty\}$. Déterminer la loi de T.
4. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 3.8 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Quelle est la loi suivie par $X + Y$?

Exercice 3.9 On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 € sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise ;
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ € ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 3.10 Soient a et b deux réels de l'intervalle $]0,1[$. On choisit "au hasard" deux nombres entiers X et Y (dans $\mathbb{N}$). Les choix sont indépendants et la probabilité d'obtenir $X = n$ (respectivement $Y = p$) est $(1-a)a^n$ (resp. $(1-b)b^p$). On note B l'événement $X \leq Y$.

1. Calculer $\mathbb{P}((X = n) \cap B)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = n | B)$.

Exercice 3.11 On lance une infinité de fois une pièce ayant une probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile, les lancers étant mutuellement indépendants. Si $\omega \in \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, on décompose ω en sous-suites de résultats consécutifs identiques, appelés séries, le résultat changeant d'une série à la suivante et on note $L_1(\omega)$, $L_2(\omega), \ldots$ les longueurs de ces séries. Par exemple, si $\omega = FFFPFPPPPFP\ldots$, on a $L_1(\omega) = 3$, $L_2(\omega) = 1$, $L_3(\omega) = 1$, $L_4(\omega) = 4$ et $L_5(\omega) = 1$. Les fonctions $L_1, L_2, \ldots$ sont bien définies sur le sous-ensemble Ω' de $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, constitué des suites comportant une infinité de P et une infinité de F.

1. Prouver que Ω' est un événement presque sûr.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans l'espace probabilisé constitué de Ω', des événements inclus dans Ω' et de la restriction de $\mathbb{P}$ à ces événements. On admet que $L_1, L_2, \ldots$ sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

2. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2). En déduire la loi de L_2 et son espérance.
4. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

5. Montrer que L_3 a même loi que L_1, et que L_1 et L_3 ne sont pas indépendantes si $p \neq \frac{1}{2}$.

Exercice 3.12 Soient X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et f une application définie sur $X(\Omega)$. À quelle condition les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.13 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que si X admet une espérance, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)$. Montrer de même que si X admet une variance, alors $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k)$.
2. On dispose d'une urne contenant N boules, numérotées de 1 à N. On effectue à partir de cette urne n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer l'espérance de X. Préciser la loi de X. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}[X]$ et de $\mathrm{Var}(X)$ lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 3.14 Soient U et V deux variables aléatoires réelles, indépendantes, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer qu'on peut choisir a, b, c et d réels non-nuls, tels que $X := aU + bV$ et $Y := cU + dV$ soient deux variables aléatoires discrètes, non-indépendantes, alors que $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 3.15 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Montrer que la variable aléatoire Z, définie par $Z = \min\{X, Y\}$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

Exercice 3.16 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right)$?

Exercice 3.17 On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$ et on étudie la première apparition de deux succès consécutifs dans cette suite.

1. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe $n \geq 2$ vérifiant $X_n = X_{n-1} = 1$.
2. On note T la v.a. donnée par $T = \min\{n > 2 | X_n = X_{n-1} = 1\} \cup \{+\infty\}$. Calculer $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$ et exprimer, pour $n > 4$, $\mathbb{P}(T = n)$ en fonction de $\mathbb{P}(T = n-1)$ et $\mathbb{P}(T = n-2)$.
3. Justifier que T admet une espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 3.18 Peut-on truquer deux dés (cubiques) indépendants de façon que la somme des points obtenus en les lançant soit équirépartie ?

Exercice 3.19 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées. Soit N une variable aléatoire, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de la suite (X_n). On définit une fonction Z par $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Justifier le fait que Z soit une variable aléatoire discrète.
2. On note g et h les fonctions génératrices de X_1 et de N. Montrer que celle de Z est $h \circ g$.
3. Quand N et X_1 possèdent une espérance finie, montrer que $\mathbb{E}[Z] < \infty$ puis calculer $\mathbb{E}[Z]$. Faire de même pour $\mathrm{Var}(Z)$ quand N et X_1 possèdent un moment d'ordre 2 fini.

4 Suites et séries numériques

Exercice 4.1 Montrer la convergence ou la divergence des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$;
2. $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$;
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+(1/n)}}$.

Exercice 4.2 Signes de suites équivalentes.

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe au voisinage de l'infini de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.3 Nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(3n)!}{n!(2n)!}a^n$, $a > 0$.

Exercice 4.4 Critère de condensation de Cauchy et séries de Bertrand.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
2. Quelle est la nature de la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

Exercice 4.5 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan n^2\right)$?

Exercice 4.6 Nature, suivant la valeur du paramètre réel strictement positif α, de $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 4.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$. Obtenir un développement limité de u_n avec un reste en $o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 4.8 Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$;
2. $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$;
3. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2(\ln n)^n}{n!}$.

Exercice 4.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et décroissante. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'on dispose d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge et $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ et $\sum_{n\geq 0} f(u_n)$ convergent. Montrer successivement que $f(0) = 0$ puis $f'(0) = 0$.

Exercice 4.11 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$?

Exercice 4.12 Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{I}_n + \frac{1}{n}A\right)^n = \exp(A).$$

5 Suites et séries de fonctions

Exercice 5.1 Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$? Y est-elle continue ?

Exercice 5.2 Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[0,1]}$.
2. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$. Montrer que N est une norme sur E.
3. Soit (f_n) une suite d'éléments de E qui converge simplement sur $[0,1]$ vers $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. On suppose que les f_n ont un rapport de Lipschitz commun. Montrer que $f \in E$, et que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 5.3 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$. Discuter de la convergence simple et de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ et sur les intervalles de la forme $[-a,a]$, $a > 0$.

Exercice 5.4 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on définit $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$. Discuter de la convergence simple et de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout ou partie de $[0,1]$.

Exercice 5.5 Théorème de Dini et application.

1. Soient $a < b$ deux réels ; (f_n) une suite d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f continue. On suppose que pour pour chaque $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrer que la convergence des f_n est uniforme.
2. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par $f_0 \equiv 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \mapsto f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n^2(x)\right)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction qu'on déterminera.

Exercice 5.6 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on définit $f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$. Après avoir justifié que les fonctions f_n sont prolongeables par continuité en 0 (on continuera à noter f_n les fonctions prolongées en 0), discuter de la convergence simple et de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout ou partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 5.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et de dérivée seconde bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : x \mapsto n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa limite.

Exercice 5.8 Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Exercice 5.9 Étudier, selon les valeurs du réel α, les modes de convergence sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1-x)$.

Exercice 5.10 Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$? Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 5.11 Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, croissante et tendant vers $+\infty$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}$. Ensemble de définition de f ? Continuité ?

Exercice 5.12 Soit (E, N) un espace normé de dimension finie et f une application continue de $]-1,1[$ dans E. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0,1[$.
2. Déterminer sa somme sur $]-1,1[$.

Exercice 5.13 Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

6 Séries entières

Exercice 6.1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, quand :

1. $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;
2. a_n est la n^{e} décimale de π ;
3. $a_n = \sin n\theta$, avec $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 6.2 Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 6.3 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k)\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence puis la somme de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 6.4 Une involution d'un ensemble E est une application $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$; on convient de $I_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
2. Montrer que $\forall x \in]-1,1[, \sum_{n\geq 0} \dfrac{I_n}{n!} x^n$ converge.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme de cette série sur $]-1,1[$, en déduire une expression de I_n.

Exercice 6.5 Règle de Cauchy.

1. On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
2. En déduire le rayon de convergence quand $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$. Étudier la convergence sur le bord du disque de convergence.

Exercice 6.6 Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 6.7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série entière définissant f ? Étudier la convergence de la série entière pour $x = R$ et $x = -R$.
2. Établir la continuité de f en $-R$ et déterminer la limite de f en R.

Exercice 6.8 On définit $q : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sur $]-A, A[$. Montrer qu'il existe des solutions développables en série entière de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$, de rayon $R \geq A$.

7 Fonctions de la variable réelle à valeurs vectorielles

Exercice 7.1 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : [0,1] \to E$ une fonction dérivable à droite en 0, et vérifiant $f(0) = 0$. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 7.2 Pour tout x réel, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$. Montrer que D_n est dérivable, et en déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 7.3 Soit $\mathcal{D}$ le disque fermé du plan $\mathbb{R}^2$, de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$. Montrer que les vecteurs tangents à $\mathcal{D}$ aux points du cercle constituant son bord sont orthogonaux au vecteur rayon.

Exercice 7.4 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on suppose que f et f'' soient bornées. Montrer que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ (dans un premier temps, on pourra se contenter de montrer que $\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$, et raffiner la preuve ensuite).

Exercice 7.5 Soit E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ une fonction continue. On suppose que $\left\| \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| = \displaystyle\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe $e \in E$ de norme 1 tel que $\forall t \in [a,b], f(t) = \|f(t)\| e$.

8 Intégration

Exercice 8.1 Étudier, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $\left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}$.

Exercice 8.2 Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles suivants :

1. $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t + t^2\mathrm{e}^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}$ sur $[1, +\infty[$;
3. $t \mapsto \ln\left(\dfrac{1+t^2}{1+t^3}\right)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8.3 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admette en $-\infty$ une limite $l \in \mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ existe. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8.4 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.5 Le signe d'une intégrale.

1. Vérifier que pour tout $x > 0$, $F(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ln t\,\mathrm{d}t$ est bien définie et que $F(x) = \dfrac{F(1) - \ln x}{x}$.
2. Montrer que $F(1) < 0$.

Exercice 8.6 Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.7 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carré intégrable.

1. Montrer que f' est de carré intégrable et que $f'(x)f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer que $f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f'(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Montrer que $\left(\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)$.

Exercice 8.8 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, et telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = o_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)$.

Exercice 8.9 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On suppose que $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} l \in [0,1[$. Déterminer la nature de $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.11 On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer $f(0)$, $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \dfrac{\ln s}{s^2-1}\,\mathrm{d}s$ puis de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 8.12 Après en avoir justifié la bonne définition, calculer $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(tx)-\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ quand $x > 0$.

Exercice 8.13 Après avoir justifié que ces quantités sont bien définies, montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$.

Exercice 8.14 Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $g(x) = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Exprimer $g(x)$ en fonction de $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.15 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n \mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que la série de terme général u_n diverge.

9 Groupes, anneaux et algèbres

Exercice 9.1 Soit G un groupe commutatif, et a et b deux éléments d'ordres p et q.

1. On suppose que $p \wedge q = 1$. Montrer que ab est d'ordre pq.
2. On suppose que $p \wedge q \neq 1$. L'élément ab est-il nécessairement d'ordre $p \vee q$?

Exercice 9.2 On note V l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, et G l'ensemble des $M \in V \cap \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, et dont l'inverse est dans V.

1. Montrer que G est un groupe.
2. Soit $M \in V$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\det M$ pour que $M \in G$.
3. Quel est le cardinal de G ? Donner un groupe "standard" isomorphe à G.

Exercice 9.3 Soit $(G, .)$ un groupe ; pour $g \in G$, on définit l'application $\varphi_g : \left| \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array} \right.$.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, φ_g est un automorphisme de G.
2. On note $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \mapsto & \varphi_g \end{array} \right.$; montrer que Φ est un morphisme de groupes. Est-il injectif ? surjectif ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et G le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Montrer que le groupe $\mathfrak{A}_n$ constitué des permutations paires est stable par les φ_g.
4. On revient au cas général ; si $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Im}\,(\Phi)$ est-il stable par φ_δ ?

Exercice 9.4 On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, à coefficients entiers et dont l'inverse est à coefficients entiers.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\det M$ pour que $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Quelle remarque peut-on faire à propos des ordres de A, de B et de AB ?

Exercice 9.5 Dans cet exercice $\varphi(n)$ désigne l'indicatrice d'Euler de $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\varphi(1) = 1$, et que $\varphi(n)$ est le cardinal du groupe multiplicatif $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$, c'est-à-dire le nombre d'entiers premiers avec n entre 1 et $n-1$, ou encore le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\sum\limits_{\substack{d \mid n \\ d \geq 0}} \varphi(d) = n$. On pourra pour ce faire dénombrer les éléments d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, on note $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \backslash \{0\}$ son groupe multiplicatif. Si $d \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il y a soit 0, soit $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans $\mathbb{K}^\times$.
3. En déduire que tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^\times$ est cyclique.

Exercice 9.6 Petit théorème de Fermat. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ a & \mapsto & a^p \end{array} \right.$. Montrer que φ est un isomorphisme d'anneaux.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a : $x^p \equiv x\,[p]$.

Exercice 9.7 Soit $(A, +, .)$ un anneau tel que $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.

1. On note $Z(A)$ le centre de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tout le monde. Vérifier que $Z(A)$ est un sous-groupe de A.

2. Déterminer les éléments nilpotents de A. On rappelle que $x \in A$ est dit nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0$, élément neutre pour $+$.
3. Soit $e \in A$ tel que $e^2 = e$. Soit $a \in A$ et soit $b = ea(1-e)$. Calculer b^2 et en déduire que $ea = ae$. En déduire que pour tout $x \in A$, $x^2 \in Z(A)$.
4. Montrer que A est commutatif.

Exercice 9.8 Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ? Les développer en produit de polynômes irréductibles le cas échéant :

1. $P = X^4 - 22X^2 + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$;
2. $Q = X^3 + \overline{2}X + \overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}[X]$.

Exercice 9.9 On appelle anneau local un anneau commutatif A dans lequel l'ensemble $V(A)$ des éléments non-inversibles est un idéal.

1. Montrer que dans un anneau local, $V(A)$ est un idéal maximal, c'est-à-dire qu'il n'est strictement contenu dans aucun idéal autre que A.
2. Soit $m = p^n$, avec p un nombre premier, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ est un anneau local.
3. Plus généralement, trouver les anneaux locaux parmi les $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$, $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.10 Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (qui n'est pas un pirate). Celui-ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seul le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 9.11 Radical d'un idéal. Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif. À toute partie non-vide B de A, on associe $\mathcal{R}(B) = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in B\}$. Soient I et J deux idéaux de A. On note $I + J = \{x + y | (x, y) \in I \times J\}$ et $IJ = \{xy | (x, y) \in I \times J\}$.

1. Vérifier que $B \subset \mathcal{R}(B)$ et que $B \subset C \Rightarrow \mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(C)$.
2. Montrer que $\mathcal{R}(I)$ est un idéal de A.
3. Montrer que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I)) = \mathcal{R}(I)$.
4. Montrer que $\mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J) = \mathcal{R}(I \cap J) = \mathcal{R}(IJ)$.
5. Montrer que $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I) + \mathcal{R}(J)) = \mathcal{R}(I + J)$.
6. Déterminer $\mathcal{R}(n\mathbb{Z})$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.12 Montrer que si p est un nombre premier avec $p > 5$, alors 240 divise $p^4 - 1$.

Exercice 9.13 Soient F et G deux polynômes non-constants à coefficients complexes de degrés respectifs n et m.

1. On considère $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U, V) & \mapsto & UF + VG \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que l'application Φ est bien définie et linéaire.
   (b) Montrer que si Φ est surjective, alors F et G sont premiers entre eux. Montrer que si F et G sont premiers entre eux, alors Φ est injective. Qu'en conclure ?
   (c) Écrire la matrice de Φ dans les bases canoniques : $(E_i)_{0 \le i \le n+m-1}$ où E_i vaut $\left(X^i, 0\right)$ si $0 \le i \le m-1$ et $\left(0, X^{i-m}\right)$ si $i \ge m$ et $\left(1, X, X^2, \ldots, X^{n+m-1}\right)$.

   Le déterminant de cette matrice, noté $\operatorname{Res}(F, G)$, est appelé résultant des polynômes F et G.

2. Soit $\Gamma = \{(F(t), G(t)) | t \in \mathbb{C}\}$. Établir l'existence de $R \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on ait : $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow R(x, y) = 0$.

Exercice 9.14 Soit A la sous-algèbre de $\mathbb{R}[X]$ engendrée par X^2 et X^3.

1. Montrer que $A = \mathrm{Vect}\left\{X^k \middle| k \in \mathbb{N}, k \neq 1\right\}$.
2. Montrer que A n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.15

1. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme ayant une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ de multiplicité $\mu > \dfrac{\deg P}{2}$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{Q}$.
3. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, avec $\deg P = 2n + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et tel que P admette une racine d'ordre n. Si $n \geq 2$, montrer que P admet une racine dans $\mathbb{Q}$ (raisonner par l'absurde ; on pourra montrer que P a n polynômes irréductibles dans sa décomposition en facteurs irréductibles, puis expliquer pourquoi on peut supposer le premier de degré ≥ 3 et le second de degré 2 avant de faire une bonne division euclidienne).

Exercice 9.16 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et soient $n_1, \ldots, n_p$ des entiers naturels non-nuls tels que $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts. Soient des points y_{i_k} de $\mathbb{K}$, définis pour $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq k < n_i$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P < n$ et tel que $\forall (i, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $1 \leq i \leq p$ et $0 \leq k < n_i$, $P^{(k)}(x_i) = y_{i,k}$.

Exercice 9.17 Soit $\mathbb{K}$ une algèbre intègre sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geq 2$. On identifie $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}.1_{\mathbb{K}}$.

1. Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible.
2. Soit $a \in \mathbb{K}$ un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$. Montrer que $(1, a)$ est une famille libre et que $(1, a, a^2)$ est une famille liée.
3. Montrer l'existence d'un élément $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$ et en déduire que si $\mathbb{K}$ est commutative, alors $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

10 Réduction

Exercice 10.1 Soit $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ laissant stables chacun des axes de coordonnées et la droite engendrée par le vecteur $(1, \ldots, 1)$.

Exercice 10.2 Montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra poser $A = PBP^{-1}$, où $P = Q + \mathrm{i}R$, avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $\mathrm{rg}\ A = n$. Calculer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A. En déduire alors les valeurs propres de A^{-1}, puis celles de $\mathrm{Com}\ A$.
2. On suppose que $\mathrm{rg}\ A \leq n - 2$. Que vaut $\mathrm{Com}\ A$? En déduire ses valeurs propres.
3. Désormais, on suppose que $\mathrm{rg}\ A = n - 1$. Montrer que 0 est valeur propre de $\mathrm{Com}\ A$ de multiplicité au moins $n - 1$, puis que la dernière valeur propre de $\mathrm{Com}\ A$ vaut $\mathrm{tr}\ \mathrm{Com}\ A$. La calculer ensuite en considérant l'application $t \mapsto \mathrm{tr}\ \mathrm{Com}\ (A + t\mathrm{I}_n)$.

Exercice 10.4 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = (ij)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 10.5 Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui laissent stables tous les plans de $\mathbb{R}^3$ contenant D.

Exercice 10.6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, de rang 2. Exprimer χ_f en fonction de $\operatorname{tr} f$ et $\operatorname{tr} f^2$.

Exercice 10.7 Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que λ est une valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que cette propriété reste alors valable pour $\lambda = 0$.
3. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P \in E$, $u(P) = P'$ et $v(P) = \displaystyle\int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer le noyau de $u \circ v$ et celui de $v \circ u$. Conclusion ?

Exercice 10.8 Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle. Déterminer l'ensemble des sous-espaces stables de l'endomorphisme $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(AM)\mathrm{I}_n \end{array} \right.$.

Exercice 10.9 Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, tels que $|a| \neq |b|$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots & a & b \\ b & a & b & a & \dots & b & a \\ a & b & a & b & \dots & a & b \\ b & a & b & a & \dots & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & b & \dots & a & b \\ b & a & b & a & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres non-colinéaires pour en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 10.10 Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} -2-x & 5+x & x \\ x & -2-x & -x \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est-elle pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 10.11 Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que J est diagonalisable.

Exercice 10.12 Calculer A^n quand $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.13 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\chi_A = X^3 - X^2 - 2X + 1$, puis que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 10.14 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 10.15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. On considère l'endomorphisme de φ sur $\mathcal{L}(E)$ défini par $\varphi : g \mapsto f \circ g$.

1. Montrer que toute valeur propre de f est valeur propre de φ.
2. Caractériser le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$ et en déduire sa dimension en fonction de $E_\lambda(f)$.
3. Montrer que si f est diagonalisable, alors φ est diagonalisable.

Exercice 10.16 Soit $n \geq 2$; on considère des matrices non-nulles A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on définit l'application $\Theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + \mathrm{tr}\,(AM)B \end{array} \right.$. Trouver les valeurs et vecteurs propres de Θ. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Θ soit diagonalisable.

Exercice 10.17 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B diagonalisable. Montrer que $AB^3 = B^3A \Rightarrow AB = BA$.

Exercice 10.18 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(f) \text{ est nilpotent}\}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ puis déterminer, en fonction du polynôme minimal μ_f, un élément générateur.

Exercice 10.19 Soit $n \geq 2$. On note S l'ensemble des matrices réelles stochastiques, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $P = \left(p_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, p_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$.

1. Montrer que tous les éléments de S ont une valeur propre commune et un vecteur propre commun.
2. Si P et Q sont dans S, montrer que $PQ \in S$.
3. Soit $P \in S$, et soit λ une valeur propre complexe de P. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 10.20 Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$ et $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.

Exercice 10.21 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les complexes $u_1, \ldots u_n, v_1, \ldots, v_n$ pour la diagonalisabilité de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & u_n \\ v_1 & \ldots & v_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Exercice 10.22 Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on définit la matrice par blocs $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Sans calculs, montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est également.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer la matrice par blocs $P(B)$ uniquement à l'aide de la matrice A et des polynômes P et P'.
3. On suppose à nouveau que B est diagonalisable. À l'aide de la question précédente, retrouver le fait que A est diagonalisable, et montrer que 0 est la seule valeur propre de A. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité pour B.

Exercice 10.23 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que, si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathbb{K}[f]$.
2. Montrer que $P(f)$ est inversible si, et seulement si, P est premier avec le polynôme minimal μ_f.

Exercice 10.24 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Justifier l'inversibilité de $B = A + \lambda \mathrm{I}_3$. Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma \mathrm{I}_3$.

Exercice 10.25 Soit $n \geq 2$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant $AB - BA = A$.

1. On pose $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & XB - BX \end{array} \right.$. Calculer $\Phi\left(A^k\right)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 10.26 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on définit $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline A & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Exprimer les éléments propres de B en fonction de ceux de A.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour la diagonalisabilité de B.

Exercice 10.27 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$ et A nilpotente. Montrer que $\det(A + B) = \det(B)$; dans un premier temps on supposera que $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10.28 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | AB = BA\}$ le commutant de A.

1. On suppose que $A = \mathrm{diag}\ (\lambda_1 \mathrm{I}_{n_1}, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{n_r})$. Exprimer $\mathcal{C}_A$, puis calculer $\dim \mathcal{C}_A$ en fonction de $n_1, \ldots, n_r$.
2. On suppose que A est diagonalisable. Calculer $\dim \mathcal{C}_A$.

11 Convexité

Exercice 11.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f, alors a est un minimum global de f.

Exercice 11.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante, et convexe. Que dire de l'application réciproque f^{-1} ?

Exercice 11.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 11.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que f est continue.
2. Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\,\mathrm{d}t$.

12 Espaces vectoriels normés

Exercice 12.1 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$; on considère $N_f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^+ \\ P & \mapsto & \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)P(x)| \end{array} \right.$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que N_f soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, s'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que $a|f| \leq |g| \leq b|f|$, alors les normes N_f et N_g sont équivalentes.

Exercice 12.2 Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact de E et $f : K \to K$ une application vérifiant : $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.
2. En considérant l'application $\delta : x \mapsto \|f(x) - x\|$, montrer que f admet un point fixe.
3. On définit une suite x par récurrence avec $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite converge vers le point fixe de f.

Exercice 12.3 Soit E un espace normé, et C une partie convexe de E. Montrer que $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

Exercice 12.4 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme. L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \inf\limits_{[0,1]} f \end{array} \right.$ est-elle continue ?

Exercice 12.5 Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-elle compacte ? connexe par arcs ?

Exercice 12.6 On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de l'espace des suites sommables, normé par $\|u\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$.
2. $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie dense de l'espace des suites bornées, normé par $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$?

Exercice 12.7 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, N une norme sur E et $A = \{f \in E | f(0) = 0\}$.

1. Montrer que A est soit fermé, soit dense dans (E, N).
2. Montrer que A est fermé dans $(E, \|.\|_\infty)$ et dense dans $(E, \|.\|_1)$.

13 Espaces préhilbertiens ou euclidiens

Exercice 13.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}AA = A\,{}^{\mathrm{t}}A$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que le spectre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ est contenu dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA = 0$.
3. En déduire que $A = 0$.

Exercice 13.2 Soit u un automorphisme orthogonal de E euclidien et $v = u - \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\ v = (\mathrm{Im}\ v)^\perp$.
2. Soit $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k$. Montrer que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour tout $x \in E$, vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}\ v$.

Exercice 13.3 Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\ p \perp \mathrm{Im}\ p$) si, et seulement si, $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 13.4 Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 13.5 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\ ({}^{\mathrm{t}}AB)$. On définit les objets

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathrm{Vect}\left\{U^k | k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

1. Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], {}^{\mathrm{t}}\left(U^k\right) = U^{n-k}$.
2. Montrer que $\left(U^k\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est une base orthogonale de F.
3. Déterminer la projection orthogonale de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur F.

14 Équations différentielles linéaires

Exercice 14.1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y'(x) + y(x) = \max\{x, 0\}.$$

Quelle est la structure de l'ensemble des solutions ?

Exercice 14.2 Soient $p, q : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0.$$

Montrer que si une solution s'annule une infinité de fois, alors c'est la fonction nulle.

Exercice 14.3 On considère l'équation différentielle

$$(E) : tx'(t) + 2x(t) = \frac{t}{t^2+1}.$$

1. Déterminer la solution générale de (E) sur les intervalles où elle est résolue.
2. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14.4 Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

et on se propose de montrer que ses solutions sur $\mathbb{R}$ s'annulent. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

1. Expliquer pourquoi on peut, sans perdre en généralité, supposer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
2. Montrer que le graphe de f est en-dessous de ses tangentes.
3. En déduire que $f' \equiv 0$. Conclure.

Exercice 14.5 Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(1+x^2\right) y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0.$$

Exercice 14.6

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et de limite nulle en $+\infty$. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = h(x).$$

   Montrer que ses solutions convergent vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 14.7 Résoudre l'équation différentielle

$$x''(t) + 4x'(t) + x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

Exercice 14.8 On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est antisymétrique ;
2. toute solution Y du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 14.9 Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue intégrable ; on considère l'équation homogène

$$(H) : y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

1. Montrer que si f est une solution bornée de (H), alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
2. En déduire que (H) admet des solutions non-bornées (on pourra utiliser le wronskien).

Exercice 14.10

1. Quand $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = \cos(nt).$$

2. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt).$$

Exercice 14.11 Lemme de Gronwall et application.

1. Soient $c \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. On suppose que u et v sont continues et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, u(x) \leq c \exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

2. Soit $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$(E) : y''(x) + (1 - p(x))y(x) = 0$$

sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 14.12 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = (1+t)x_1(t) + tx_2(t) - \mathrm{e}^{-t} \\ x_2'(t) = -tx_1(t) + (1-t)x_2(t) + \mathrm{e}^{t} \end{cases}$.

Exercice 14.13 Déterminer l'ensemble des fonctions f continues vérifiant l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x.$$

15 Calcul différentiel

Exercice 15.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 15.2 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$.

L'application f admet-elle une dérivée en $(0,0)$ suivant tout vecteur ?
L'application f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 15.3 On considère un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$ de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E. On cherche à redémontrer le théorème spectral à l'aide du calcul différentiel. Pour cela, on définit l'application :

$$f_u : \left| \begin{array}{ccc} E\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\langle x,u(x)\rangle}{\|x\|^2} \end{array} \right. .$$

1. Calculer $f_u(\alpha x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f_u est bornée sur son ensemble de définition et qu'elle atteint ses bornes.
3. Montrer que f_u est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de son domaine de définition.
4. Montrer par récurrence qu'il existe une base de E qui soit orthonormale et formée de vecteurs propres de u.

Exercice 15.4

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
   Quelle est la dérivée de $u : x \mapsto f(x, -x)$ sur $\mathbb{R}$?
   Quelle est la différentielle de $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$ sur $\mathbb{R}^2$?
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$. Pour $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$, quelle est la dérivée de la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ en $t = 0$?

Exercice 15.5 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Après avoir justifié le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, étudier la différentiabilité de l'application $M \mapsto M^{-1}$ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy)\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en $(0, 0)$. Les déterminer.
3. Soit $y_0 \neq 0$. La fonction f admet-elle une dérivée partielle par rapport à x en $(0, y_0)$?

Exercice 15.7 Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, on définit l'inverse de $x \neq 0$ comme le point $y = f(x)$, caractérisé par $y = \lambda x$ et $\|x\|\|y\| = 1$. Calculer $\mathrm{d}f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Exercice 15.8 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g, h : U \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in U, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. On suppose que f et h sont différentiables en $a \in U$ et que $f(a) = h(a)$. Montrer que g est différentiable en a.

Exercice 15.9 Déterminer les extrémums globaux sur $[0, \pi]^2$ de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y).$$

Exercice 15.10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice jacobienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. En déduire que f est une rotation affine.

Exercice 15.11 Soit $f : (x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right)$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et simplifier l'expression de f grâce au calcul de ses dérivées partielles.

Exercice 15.12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathcal{C}^2$?
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en conclure ?

Exercice 15.13 Différentielle du déterminant.

1. Montrer que det est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{d}(\det)\,(\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}$.
2. Après avoir rappelé pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en déduire $\mathrm{d}(\det)(X)$ pour $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Étendre ensuite ce résultat au cas où $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.14 Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point et soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que f est homogène de degré k, ie $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \forall t > 0, f(tx) = t^k f(x)$, si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler : $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$.

16 Remarques, indications et réponses succinctes

2.1 : Sommabilité $\Leftrightarrow \alpha > 2$ (théorème de sommation par paquets).
2.2 : Sommabilité $\Leftrightarrow \alpha > 2$ (raisonner par double-implication ; dans un sens, majorer une somme par une intégrale).
2.3 : Vrai, Faux, Vrai, Faux, Vrai.
2.4 : Non (sommer sur p puis q, et sur q puis p).
3.3 : Nadine (montrer que la probabilité qu'elle gagne au k^{e} tour vaut $\frac{31}{216}\left(\frac{155}{216}\right)^{k-1}$). On peut remarquer que le jeu s'arrête presque sûrement.
3.7 : $S_n \sim \mathcal{B}\left(N, 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$ (montrer par récurrence que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n, probabilité à déterminer) ; pour la loi de T, calculer $\mathbb{P}(T \geq n)$; exploiter la formule $\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n)$.
3.9 : pour montrer que le jeu s'arrête presque sûrement, considérer l'événement "le jeu dure au moins n parties".
3.11 : pour montrer que Ω' est presque sûr, considérer l'événement "au cours des n premiers lancers, il y a exactement m piles".
3.12 : X et $f(X)$ sont indépendantes $\Leftrightarrow f(X)$ est presque sûrement constante.
3.16 : les variables Y_i ne sont pas indépendantes donc on ne peut pas utiliser le théorème du cours ; on peut passer par Bienaymé-Tchebychev. Noter que l'hypothèse sur la loi des X_i est en fait inutile, mais permet ici de faire des calculs.
3.17 : pour montrer l'existence presque sûre, considérer les événements $\left\{X_{2p} + X_{2p+1} \leq 1\right\}$.
3.18 : raisonner par l'absurde ; introduire la fonction génératrice de chaque dé, de leur somme ; l'indépendance fournit une égalité, dans laquelle on peut faire une simplification par t^2, trouver alors une contradiction en dénombrant les racines réelles de chaque membre.
4.1 : pour la dernière, montrer que le terme général équivaut à $\frac{1}{n}$.
4.5 : utiliser que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, considérer le cosinus du terme général dans un premier temps.
4.7 : montrer que la suite tend vers 0, puis que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$ (en utilisant un développement limité de arctan puis le théorème de Cesàro), et enfin montrer que $u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{3}}{40\sqrt{2}} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$.
4.9 : commencer par traduire avec des quantificateurs que les restes tendent vers 0.
4.10 : pour montrer que $f'(0) = 0$, utiliser une formule de Taylor.
4.11 : appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction racine n^{e}.

5.3 : calculer f_n sous la forme d'une fraction à l'aide de la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ (hors de $2^n\pi\mathbb{Z}$).
5.5 : démontrer le théorème par l'absurde ; sous cette hypothèse (fausse) montrer qu'il existe une suite convergente (x_n) et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) - f_n(x_n) \geq \varepsilon$; conclure.
5.6 : ne pas perdre espoir dans les calculs.
5.9 : calculer $\|f_n\|_\infty$ pour déterminer l'ensemble des α pour lesquels la convergence est normale ; montrer que la convergence simple est vraie pour tout α ; montrer que la convergence n'est pas uniforme quand $\alpha = 0$ en calculant la limite, conclure.
5.10 : un encadrement par des intégrales montre que l'équivalent est $\frac{2}{x^2}$.
5.12 : pour la première question, majorer f_n uniformément sur $[-a, a]$ par une suite géométrique de raison a ; pour la suivante, résoudre une équation différentielle.
5.13 : considérer $u_n(x) = \left(-x^2\right)^{n+1} \ln x$.
6.2 : séparer les termes pairs et les termes impairs dans la somme pour faire les calculs.
6.8 : raisonner par analyse-synthèse ; pour la synthèse, fixer $r \in]0, A[$, et introduire un majorant de $b_n r^n$, cela permettra de montrer par récurrence forte que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, où les coefficients a_n sont ceux du développement en série entière en 0 de la solution.
7.1 : utiliser une formule de Taylor (attention, bien penser à utiliser un reste en $x\varepsilon(x)$ où ε tend vers 0 plutôt qu'en $o(x)$, qui ne permet pas de faire des calculs efficacement).
7.4 : commencer par Taylor-Lagrange entre x et $x + h$; en déduire une majoration de $\|f'\|_\infty$ en fonction de h, trouver le h qui minimise ; pour améliorer l'inégalité, faire de même entre $x + h$ et $x - h$.
7.5 : poser (quand c'est possible) $e_1 = \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|}$, vecteur qu'on complète en une base orthonormée de E, puis écrire f dans cette base.
8.1 : utiliser le fait que f est positive pour avoir une CNS d'intégrabilité.
8.3 : considérer l'intégrale avec des bornes finies dans un premier temps, la réexprimer, et faire tendre la borne supérieure vers l'infini. La définition de la limite permettra de conclure que l'intégrale vaut $(b - a)l$.
8.5 : pour la deuxième question, couper l'intégrale de part et d'autre de 1, faire un changement de variable dans l'une des deux pour se ramener à une seule intégrale et conclure par une étude de fonction.
8.7 : on peut commencer par regarder ce qui se passe sur $\mathbb{R}^+$, pour remarquer ensuite que la même méthode fournirait le même résultat sur $\mathbb{R}^-$; pour la première question, d'abord montrer que la fonction ff' admet une limite (finie ou infinie) en l'infini.
8.8 : une application rapide de Cauchy-Schwarz fournit $\mathcal{O}\left(\sqrt{x}\right)$, et une application plus subtile fournit le résultat attendu.
8.9 : commencer par remarquer qu'il existe $q \in]l, 1[$ tel que $\frac{f(x+1)}{f(x)} < q$ pour x suffisamment grand.
8.10 : on trouve $f(0) \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
8.11 : pour la dernière question, on pourra regarder ce que vaut f'.
8.12 : on trouve $\frac{\pi}{2} \ln x$.
8.15 : pour la dernière question, on pourra raisonner par l'absurde, puis appliquer un théorème du cours.
9.2 : pour la deuxième question, penser que les matrices à coefficients entiers ont un déterminant entier, et se rappeler de cette formule reliant l'inverse à la comatrice...
9.3 : pour la deuxième question, montrer qu'il n'est, en général, ni injectif, ni surjectif. On construira à chaque fois un contre-exemple simple en se restreignant aux groupes commutatifs.
9.4 : pour la première question, penser que les matrices à coefficients entiers ont un déterminant entier, et se rappeler de cette formule reliant l'inverse à la comatrice...
9.7 : pour la dernière question, on peut commencer par montrer que pour tout $x \in A$, $2x \in Z(A)$ et $3x \in Z(A)$.
9.9 : pour la deuxième question, on peut déjà montrer que l'image d'un idéal par un morphisme d'anneaux surjectif est un idéal.
9.11 : pour la dernière question, décomposer n en un produit de facteurs premiers.
9.14 : pour la deuxième question, on peut poser $Q = \Phi(X)$, où $\Phi : \mathbb{R}[X] \to A$ est un isomorphisme d'algèbres, exprimer $\Phi(P)$ en fonction de Q et aboutir à une contradiction sur le degré de Q.
9.15 : pour la première question, montrer que P et P' sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide d'une

relation de Bézout ; pour les deux suivantes, commencer par écrire la décomposition de P en facteurs irréductibles.
9.17 : pour la première question, considérer l'application "multiplication à gauche par a" ; pour la deuxième, partir du fait que $(1, a, a^2, \dots, a^n)$ est liée pour montrer que $(1, a, a^2)$ est liée.
10.4 : on pourra commencer par déterminer le rang de A.
10.5 : on pourra raisonner par analyse-synthèse et écrire la forme de la matrice d'un tel endomorphisme dans une bonne base.
10.8 : prendre F un sous-espace stable par φ, et distinguer les cas $\mathrm{I}_n \in F$ et $\mathrm{I}_n \notin F$.
10.10 : commencer par montrer que χ_A est scindé à racines simples pour tout $x \neq 0$.
10.11 : on n'est pas obligé de calculer de gros déterminants si on remarque que J est de rang 1.
10.13 : le polynôme χ_A n'a pas de racine évidente ; montrer qu'il n'a pas de racine double (soit en utilisant le TVI, soit en raisonnant par l'absurde).
10.16 : commencer par chercher ce qu'on peut dire quand on pose $\Theta(M) = \lambda M$; on distinguera les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$. La réponse est : Θ est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}\,(AB) \neq 0$.
10.18 : le générateur est le polynôme scindé à racines simples ayant les mêmes racines que le polynôme minimal.
10.19 : le vecteur propre commun est $(1, \dots, 1)$ associé à la valeur propre 1.
10.21 : écrire M sous la forme d'une matrice par blocs simplifiera le calcul des premières puissances de M.
10.23 : pour la première question, écrire le polynôme minimal de f sous forme développée.
10.25 : établir pour la première question une relation entre $\Phi\left(A^{k+1}\right)$ et $\Phi\left(A^k\right)$.
10.26 : pour la deuxième question, traduire la diagonalisabilité de B en termes de dimensions des sous-espaces propres ; B est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable et inversible.
11.4 : pour la deuxième question, penser aux sommes de Riemann.
12.1 : penser qu'une fonction continue non-nulle en un point demeure non-nulle sur un petit intervalle autour de ce point.
12.2 : on pourra utiliser Bolzano-Weierstrass pour la dernière question.
12.4 : montrer que φ est 1-lipschitzienne.
12.7 : on pourra considérer la forme linéaire d'évaluation en 0.
13.3 : pour le sens réciproque, on pourra remarquer que $\|x + ty\| \geq \|ty\|$ pour tous $x \in \mathrm{Ker}\, p$, $y \in \mathrm{Im}\, p$ et $t \in \mathbb{R}$.
14.2 : en bref, Bolzano-Weierstrass, Rolle et problème de Cauchy.
14.6 : utiliser la définition de la limite nulle en l'infini.
14.8 : commencer par calculer $({}^t YY)'$.
14.9 : pour la première question, on peut commencer par montrer que f' admet une limite en $+\infty$.
14.11 : on pourra poser $w(x) = c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $f(x) = w(x) \exp\left(-\displaystyle\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)$, puis dériver f.
15.1 : à $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, commencer par différentier $f(tx)$ en 0, avec $t \in \mathbb{R}$.
15.4 : vous DEVEZ trouver $u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, -x)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$ et $\restriction \frac{\partial}{\partial t} f(a + tv)_{t=0} = \mathrm{d}f(a)(v)$.
15.8 : faire l'effort d'avoir une rédaction correcte, notamment, ne pas écrire de o ou de $\mathcal{O}$ dans des inégalités.
15.10 : pour la première question, écrire la jacobienne de f sous la forme $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, où c et s sont des fonctions $\mathcal{C}^1$; l'objectif est de montrer qu'elles sont constantes.
15.11 : cette fonction n'est pas constante sur son ensemble de définition ; on pourra calculer $f(0, 0)$ et $f(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ pour s'en convaincre, et relire son cours pour comprendre ce qui se passe...
15.12 : le théorème de Schwarz n'admet pas de réciproque.