Liste d'exercices

Exercice 1. On veut construire une grille de mots croisés ayant 5 lignes et 5 colonnes. On numérote les cases de 1 à 25, et on écrit ces nombres sur des cartons que l'on met dans une urne. On tire de celle-ci, au hasard, 8 cartons simultanément et on noircit les cases correspondantes.

1. Quelle est la probabilité, lors d'une épreuve, d'obtenir une grille avec un carré noir au centre et quatre dans les coins ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille avec une colonne de cases noires ?

Exercice 2. On jette trois dés non-truqués.

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.
2. Que vaut la probabilité d'obtenir au moins deux faces portant le même chiffre ?
3. Calculer la probabilité que la somme des points marqués sur les trois faces soit paire.
4. Montrer que les événements considérés aux questions 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 3. On considère un échantillon de la population de l'ENS composé de 16 mécatroniciens (parmi lesquels 4 agrégatifs) et de 16 matheux (parmi lesquels 4 agrégatifs). On extrait, au hasard, de ces 32 étudiants un groupe de 5. Tous les étudiants ont la même probabilité d'être choisis – et ils sont tirés indépendamment les uns des autres. Calculer :

1. la probabilité qu'ils soient tous les 5 issus du même département ;
2. la probabilité qu'il y ait parmi les 5 au moins un agrégatif ;
3. la probabilité qu'il y ait parmi les 5 au moins un mécatronicien, un matheux, et un agrégatif.

Exercice 4. Dans un magasin, 70 % des machines viennent d'une usine A et 30 % d'une usine B. Parmi celles venant de A, 20 % ont un défaut. Parmi celles venant de B, 10 % ont un défaut.

1. Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin présentant un défaut.
2. Une machine donnée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

Exercice 5. On considère n "menteurs" $I_1, \ldots, I_n$. I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non", la transmet à I_2, et ainsi de suite jusqu'à I_n, qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p, où $0 < p < 1$, et le contraire avec probabilité $1 - p$. On suppose que les réponses des n personnes sont indépendantes. Pour i entre 1 et n, on note p_i la probabilité que l'individu I_i transmette l'information initiale.

1. Que vaut p_1 ?
2. Pour i entre 2 et n, montrer que $p_i = 1 - p + (2p - 1)p_{i-1}$.
3. En déduire la valeur de p_n. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on choisit au hasard un des nombres 1, 2, …, n — tous les choix étant équiprobables. Soit p un entier non nul, avec $p \leqslant n$. Soit A_p l'événement : "le nombre choisi est divisible par p".

1. Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans lequel il est naturel de se placer. Calculer $\mathbb{P}\left(A_p\right)$ lorsque $p|n$.
2. Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n, distincts, alors les événements A_{p_1}, $A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ sont mutuellement indépendants.

3. On rappelle que l'indicatrice d'Euler est la fonction ϕ qui, à un entier naturel n, associe le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs à n et qui sont premiers avec lui. Montrer que :

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 7. Dans une réserve, on a regroupé dans le même parc trois dromadaires, deux chameaux et un lama. Un visiteur prend en photo trois de ces six camélidés au hasard. On considère que tous ces ongulés ont la même probabilité d'être photographiés. On note $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé dans lequel on travaille.

1. On note C (respectivement D) la variable aléatoire égale au nombre de chameaux (resp. dromadaires) présents sur la photo. Montrer que la loi jointe du couple (C, D) est fournie dans le tableau ci-contre.

	$D=0$	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$C=0$	0	0	$0,15$	$0,05$
$C=1$	0	$0,3$	$0,3$	0
$C=2$	$0,05$	$0,15$	0	0

2. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de bosses photographiées. *On rappelle qu'un chameau possède deux bosses, qu'un dromadaire une seule et que les lamas n'ont pas de bosses !*
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 8. Le beaujolais nouveau est arrivé.

1. Un amateur éclairé, mais excessif, se déplace de réverbère en réverbère. Quand il se lance pour attraper le suivant, il a 80 % de chances de ne pas tomber. Pour gagner le bistrot tant convoité, il faut en franchir 7. On notera X le nombre de réverbères atteints sans chute.
   (a) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?
   (b) Préciser sa loi.
2. Quand il sort du café, son étape suivante est l'arrêt de bus. Le nombre de chutes pour y parvenir, noté Y, suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$. Calculer la probabilité de faire au plus deux chutes.
3. Arrivé dans l'ascenseur, il appuie au hasard sur un des huit boutons. S'il atteint son étage, ou s'il déclenche l'alarme, il sort de l'ascenseur ; sinon il réappuie au hasard sur un des huit boutons. Soit Z le nombre de boutons pressés avant d'atteindre son étage ou de déclencher l'alarme.
   (a) Quelle est la loi de Z ?
   (b) Donner son espérance et sa variance.

Exercice 9. Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à une station. Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0, 6]$.

1. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?
2. Combien de temps cette personne attend en moyenne ?

Exercice 10. Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On appelle demi-vie la durée h telle que $\mathbb{P}(T > h) = \dfrac{1}{2}$. Déterminer h en fonction de λ.
2. Le strontium 90 est un composé radioactif très dangereux que l'on retrouve après une explosion nucléaire. Un atome de strontium 90 reste radioactif pendant une durée aléatoire T qui suit une loi exponentielle, durée au bout de laquelle il se désintègre. Sa demi-vie est d'environ 28 ans.
   (a) Déterminer le paramètre λ de la loi de T.
   (b) Calculer la probabilité qu'un atome reste radioactif durant au moins 50 ans.

(c) Calculer le nombre d'années nécessaires pour que 99% du strontium 90 produit par une explosion nucléaire se soit désintégré.

Exercice 11. Soit $f_\lambda(t) = \lambda t^{-2}$. Déterminer λ pour que f_λ soit une densité de probabilité sur :

1. $[1, 10]$;
2. $[1, +\infty[$.

Exercice 12. On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0,5\left(1 - x^2\right) & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0,9 & \text{si } x = 0 \\ 0,9 + 0,1x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ldots & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Que doit valoir F sur l'intervalle manquant si on veut espérer que F soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Justifier la réponse.
2. Représenter le graphe de la fonction F sur l'intervalle $[-3; 3]$.
3. On admet qu'ainsi complétée, F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. En justifiant la réponse, dire si la variable aléatoire X est :
   (a) discrète ;
   (b) à densité.
4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(|X| \leqslant 0,1)$.

Exercice 13. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Calculer la loi de $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.
2. Calculer la loi de $N = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

Exercice 14. On considère une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Par intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{E}\left[X^{n+2}\right] = (n+1)\mathbb{E}\left[X^n\right]$.
2. Que vaut $\mathbb{E}\left[X^2\right]$? Déduire de ce résultat et de la question précédente la valeur de $\mathbb{E}\left[X^4\right]$.
3. Que vaut $\mathbb{E}\left[X^3\right]$?
4. Soit $Y = 2X + 1$.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Déterminer $\mathbb{E}\left[Y^4\right]$.
5. À l'aide de la table de la loi normale, déterminer $\mathbb{P}(|X| \geqslant 2)$. Que donne l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas ? Comparer et commenter.
6. On considère maintenant une variable aléatoire Z suivant une loi normale de moyenne 5 et de variance 16.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(|Z| \leqslant 8)$, $\mathbb{P}(5 \leqslant Z \leqslant 9)$ et $\mathbb{P}\left(Z \geqslant 7 | Z \geqslant 3\right)$.
   (b) Déterminer q tel que $\mathbb{P}(Z > q) = 0,9$.
7. La taille des enfants d'un collège est distribuée selon une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. On sait qu'un cinquième des élèves mesure moins de 1m50 et que 10% des élèves mesurent plus de 1m80. Déterminer m et σ.

Exercice 15. On s'intéresse à un circuit électrique composé de deux diodes, appelées A et B, qui sont montées en série. Les durées de vie des diodes, qui sont indépendantes, suivent des lois exponentielles de paramètres inconnus λ_A et λ_B, éventuellement différentes.

1. Quelle est la loi suivie par la durée de vie du circuit en fonction de λ_A et λ_B ?
2. On a observé les durées de vie de n circuits indépendants de ce type (une diode de type A montée en série avec une diode de type B). Quel est le modèle statistique associé à cette expérience ?
3. On a observé le type de diode (A ou B) qui a défailli sur n circuits indépendants. Déterminer le modèle statistique associé à cette expérience.

Exercice 16. On s'intéresse au modèle statistique $\left((\mathbb{R}_+^*)^n, \{P_\theta^{\otimes n}\}_{\theta>0}\right)$ tel que pour chaque $\theta > 0$, P_θ est la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}\mathbb{1}_{]0,\theta[}(x).$$

Le paramètre d'intérêt est le paramètre θ de ce modèle. dans la suite, on notera $x_1, \ldots, x_n$ les observations.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^1$.
2. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n^1$ et en déduire sa densité.
3. Montrer que $\hat{\theta}_n^1$ est biaisé, mais asymptotiquement sans biais.
4. Calculer l'espérance de X_1 et en déduire un autre estimateur $\hat{\theta}_n^2$. Montrer qu'il est sans biais.
5. Déterminer les risques quadratiques de $\hat{\theta}_n^1$ et $\hat{\theta}_n^2$. Lequel vous semble préférable ? Sont-ils consistants ?
6. Montrer que $\hat{\theta}_n^1$ est de vitesse n. Quelle est la vitesse de $\hat{\theta}_n^2$?
7. À l'aide de $\hat{\theta}_n^2$, obtenir un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance 95 %.

Exercice 17. La thermo-sensibilité de la consommation électrique française s'est avérée être un problème inquiétant à l'approche de l'hiver 2016/2017, en raison de l'arrêt forcé de certaines centrales nucléaires. On suppose que la puissance soutirée maximale journalière, pour un jour de semaine non-férié et hors vacances scolaires, entre décembre et février vérifie une égalité de la forme :

$$P_i = aT_i + b + \varepsilon_i,$$

où

- P_i est la puissance soutirée maximale du jour i en MW ;
- a est une constante inconnue en MW/°C ;
- T_i est la température nationale pondérée relevée le jour i en °C ;
- b est une constante inconnue en MW ;
- ε_i est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, libellée en MW.

Une étude préalable nous a permis d'obtenir la valeur de σ, et c'est la raison pour laquelle on ne cherchera pas à l'estimer ici. On fait l'hypothèse que la puissance soutirée maximale d'un jour i est indépendante de celle d'un jour j (dès que $i \neq j$).

1. (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par P_i ?
   (b) Pendant n jours vérifiant les contraintes énoncées précédemment, on a relevé les valeurs p_i et T_i. Déterminer la log-vraisemblance de l'observation $(p_1, \ldots, p_n)$, notée $\ell_n(p_1, \ldots, p_n; a, b)$.
   (c) Déterminer l'ensemble des points critiques de cette fonction (on rappelle qu'il s'agit des couples (a, b) annulant simultanément les dérivées partielles par rapport à a et à b).

Dans la suite, on admettra que l'estimateur au maximum de vraisemblance du modèle est donné par :

$$\widehat{a}_n = \frac{n\sum_{i=1}^n P_iT_i - \left(\sum_{i=1}^n P_i\right)\left(\sum_{i=1}^n T_i\right)}{n\sum_{i=1}^n T_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n T_i\right)^2} \text{ et } \widehat{b}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n P_i - \frac{\widehat{a}_n}{n}\sum_{i=1}^n T_i.$$

2. Montrer que $\widehat{a}_n \sim \mathcal{N}\left(a, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n T_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n T_i\right)^2}\right)$.

Similairement, on admet que $\widehat{b}_n \sim \mathcal{N}\left(b, \frac{\sigma^2}{n}\frac{\sum_{i=1}^n T_i^2}{\sum_{i=1}^n T_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n T_i\right)^2}\right)$.

3. Que valent le biais et le risque quadratique de $\widehat{a}_n$ et $\widehat{b}_n$?
4. À partir des données recueillies lors de l'hiver 2015/2016, on calcule :

$$\mathbb{V}_{a,b}\left(\widehat{a}_n\right) = 8260 \text{ (MW/°C)}^2 \text{ et } \mathbb{V}_{a,b}\left(\widehat{b}_n\right) = 119300 \text{ MW}^2.$$

Ces mêmes données nous permettent de calculer les valeurs prises par nos estimateurs :

$$\widehat{a}_n = -1246 \text{ MW/°C et } \widehat{b}_n = 85380 \text{ MW}.$$

En déduire un intervalle de confiance au niveau de confiance 98% pour a et b.

5. Étant donnée une température prévue de T°C, on définit la variable aléatoire $\widehat{P}$ désignant la prévision de la puissance maximale soutirée par :

$$\widehat{P} = -1246 \times T + 85380 + \varepsilon,$$

où $\varepsilon \sim \mathcal{N}\left(0, 2149^2\right)$ MW. RTE considère qu'il y aura des coupures électriques en France si $\widehat{P}$ atteint 92000 MW pendant l'hiver 2016/2017. Ainsi, si l'hiver est doux, RTE estime qu'il ne devrait pas y avoir de problèmes d'approvisionnement ; en revanche, s'il est rude, des délestages intempestifs ont de grandes chances d'avoir lieu. À l'aide de la table en annexe, calculer la probabilité de coupure électrique sur le territoire français dans le cas :

(a) d'un hiver rude, comme en 2011/2012, où la température est tombée jusqu'à -5,6°C ;
(b) d'un hiver doux, comme en 2013/2014, où la température s'est maintenue au-dessus de -1°C.

Exercice 18. On cherche à estimer ici le nombre total de blagues Carambar. Pour cela, on a acheté un échantillon de 85 Carambars supposés indépendants, puis considéré uniquement la première blague de chaque emballage (pour des raisons d'indépendance entre les blagues). On note N le nombre de blagues au total (ce qu'on cherche à estimer) et on suppose que toutes les blagues sont équiprobables. On note P_N la loi du nombre de blagues différentes relevées dans 85 ouvertures indépendantes de blagues équiprobables appartenant à un ensemble de N blagues.

1. Quel est le modèle statistique associé à cette expérience ? Quelle est la fonction de vraisemblance du modèle ?
2. Dans notre expérience, on a dénombré exactement 59 blagues différentes sur les 85 ouvertures. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $N \geqslant 59$ entier, $P_N(\{59\}) = \lambda\frac{\binom{N}{59}}{N^{85}}$.
3. On pose, pour tout entier $N \geqslant 59$, $u_N = \frac{\binom{N}{59}}{N^{85}}$. Montrer que $u_{N+1} \geqslant u_N \Leftrightarrow f(N) \geqslant 0$, où f est la fonction définie sur $]58;+\infty[$ par $f : x \mapsto 85\ln x - 84\ln(x+1) - \ln(x-58)$.
4. Montrer qu'il existe un unique $\beta \in]58;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$.
5. On admet qu'on peut obtenir l'arrondi suivant : $\beta \simeq 106,9$. Que vaut l'estimateur au maximum de vraisemblance $\widehat{N}_{\mathrm{MV}}$ dans notre expérience ? Justifier *soigneusement* la réponse.
6. Sans faire le moindre calcul, expliquer comment on pourrait juger de la qualité de cet estimateur (évoquer la/les quantité(s) à calculer, le(s) théorème(s) à utiliser, etc.).