Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Applications linéaires

Exercice 1 *Un calcul de norme*
Soient E l'espace vectoriel normé des fonctions continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, a un réel de $]0,1[$ et $T : E \to E$ définie pour tout f de E par

$$T(f) = \int_0^a x^2 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Montrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 2 *Un autre calcul de norme*
Sur $E = C^0[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on définit la forme linéaire μ_f associée à un élément non nul f de E par

$$\forall g \in E, \quad \mu_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que μ_f est continue et calculer sa norme.

Exercice 3 *Formes linéaires positives*
Soient $E = C^0[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et φ une forme linéaire positive sur E, i.e. pour tout f de E, si $f \geq 0$ alors $\varphi(f) \geq 0$. Montrer que φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 4 *Continuité pour différentes normes*
Sur l'espace de Banach $E = C^0[0,1]$, on considère la forme linéaire $\varphi : f \in E \mapsto f(0)$. Montrer que φ est continue vis-à-vis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 5 *Opérateur à noyau*
Soit K une fonction continue sur $[0,1]^2$. On note $E = C[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on note Tf la fonction donnée par :

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\ \mathrm{d}y.$$

Montrer que T est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

Exercice 6 *Continuité et noyau d'une forme linéaire*
Soient E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 7 *Norme et noyau d'une forme linéaire*
Soient E un espace vectoriel normé et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle φ. Montrer que pour tout x dans E,

$$d(x,H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}.$$

Exercice 8 *Complétude de $\mathcal{L}_c(E,F)$*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est complet.

Exercice 9 *Opérateurs inversibles*

Soit E un espace de Banach. On note I l'ensemble des inversibles de $\mathcal{L}_c(E)$, i.e. l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_c(E)$ bijectifs (les inverses de tels éléments sont nécessairement continus par le théorème d'isomorphisme de Banach).

1. Soit $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|T\| < 1$. Montrer que $1 - T \in I$.

2. Montrer que I est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

3. Montrer que l'application $T \mapsto T^{-1}$ de I dans lui-même est continue.

Exercice 10 *Spectre*

Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E)$. On appelle valeur spectrale de T tout scalaire λ tel que $\lambda I - T$ n'est pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de T est appelé spectre de T et noté $\sigma(T)$.

1a. Montrer que la suite de terme general $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $r(T) = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

1b. Donner un exemple pour lequel cette suite n'est pas décroissante.

2. Montrer que $\sigma(T)$ est fermé.

3. Montrer que pour tout λ dans $\sigma(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$.

Exercice 11 *Théorème de Hahn-Banach en dimension finie*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Soit f une forme linéaire sur F. On veut montrer qu'on peut prolonger f à E en une forme linéaire de même norme.

1. Montrer le résultat si E est euclidien.

2. On suppose que $\|f\| = 1$. Soit $u \in E$. Montrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x, y \in F, \quad f(x) - \|x - u\| \leq a \leq f(y) + \|y - u\|.$$

3. Soit $u \notin F$. On pose :

$$g(x + tu) = f(x) + ta.$$

Montrer que g prolonge f à $F \oplus \mathbb{R}u$ et que $\|g\| = 1$.

4. Conclure.

Exercice 12 *Dual de $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$*

Soit $1 \leq p < +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $y \in l^q(\mathbb{N})$, on pose pour tout $x \in l^p(\mathbb{N})$:

$$F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

1. Montrer que pour tout $y \in l^q(\mathbb{N})$, on a $F_y \in (l^p(\mathbb{N}))'$.

2. Montrer que $F : y \mapsto F_y$ est linéaire et isométrique de $l^q(\mathbb{N})$ à valeurs dans $(l^p(\mathbb{N}))'$.

Soit $\varphi \in (l^p(\mathbb{N}))'$. On pose $y_n = \varphi(e_n)$, où e_n désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang n qui vaut 1.

3. Pour $p = 1$, montrer que $(y_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$.

4. Pour $1 < p < +\infty$, on pose pour tous $n, N \geq 0$,

$$x_n^N = \begin{cases} y_n^{-1}|y_n|^q & \text{si } y_n \neq 0 \text{ et } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\varphi(x^N)$ et en déduire que $y \in l^q(\mathbb{N})$.
5. Montrer que F est surjective.

Exercice 13 *Dual de* $c_0(\mathbb{N})$
On rappelle que $c_0(\mathbb{N})$ désigne le sous-espace de $l^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites qui tendent vers 0. Montrer que $l^1(\mathbb{N})$ s'identifie au dual de $c_0(\mathbb{N})$.