Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Différentiabilité

Exercice 1 *Pour se faire la main*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et que $\mathrm{d}f(0) = 0$.

Exercice 2 *Contre-exemples*
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que les applications partielles en ce point le sont. De plus, montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ mais qu'elle n'admet pas de dérivée suivant tous les vecteurs en $(0,0)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0,y) = 0.$$

Montrer que f admet une dérivée suivant tous les vecteurs en $(0,0)$, mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ suivant tous les vecteurs mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 *Continuité et différentiabilité en fonction d'un paramètre*
Soit $\alpha > 0$. Etudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Exercice 4 *Calcul de jacobiennes*
On considère les fonctions

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3,$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (\ln(1+x^2+y^2), x^2+y^2-z^2, \cos(xz)).$$

Déterminer la matrice jacobienne de f au point $(0,-1,1)$ et celles de g et $h = f \circ g$ au point $(0,0,1)$.

Exercice 5 *Calculs de différentielles*

Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle :

1. $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - P^2$.

2. $\det : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$.

3. $\mathrm{Inv} : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1}$.

4. $f : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto M^k$, où $k \geq 1$ est un entier non nul.

5. $\varphi : f \in E \mapsto \int_0^1 \det(f(t), f'(t))\,\mathrm{d}t$, avec $E = C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ muni de la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

6. $\phi : f \in E \mapsto \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$, avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

7. $F : (x_n)_n \in l^1(\mathbb{N}) \mapsto (f(x_n))_n \in l^1(\mathbb{N})$, avec $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(0) = 0$ (vérifier au préalable que la fonction F est bien définie).

Exercice 6 *Différentiabilité de la distance à un convexe fermé.*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in U$. On suppose qu'il existe deux applications h_1 et h_2 de U dans $\mathbb{R}$, différentiables en x_0 telles que $h_1 \leq f \leq h_2$ et $h_1(x_0) = h_2(x_0)$. Montrer que f est différentiable en x_0.

2. On suppose maintenant que f est 1-lipschitzienne et qu'il existe un segment $[a, b] \subset U$ tel que $f(b) - f(a) = \|b - a\|$. Montrer que f est différentiable en tout point de $]a, b[$.

3. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, C)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Exercice 7 *Différentielle de l'exponentielle*

1. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $H \in E$ et $A \in \mathcal{L}_c(E)$. Résoudre les équations différentielles

$$f'(t) = Af(t),\ f(0) = H, \quad g'(t) = e^{tA}H,\ g(0) = 0.$$

où les inconnues f et g sont deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans E.

2. Désormais, E sera l'espace $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous $X, H \in E$,

$$e^X H e^{-X} = e^{\mathrm{ad}_X} H,$$

où ad_X est définie par $\mathrm{ad}_X(M) = XM - MX$ pour tout élément M de E.

3. Soient t et u deux variables réelles et

$$g(t) = \partial_u\big(e^{-tX} e^{t(X+uH)}\big)\big|_{u=0}.$$

Vérifier que $g(0) = 0$ et que $g'(t) = e^{-t\,\mathrm{ad}_X} H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Déduire des questions précédentes que pour tous $X, H \in E$,

$$\mathrm{d}\exp(X) \cdot H = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\,\mathrm{ad}_X)^k}{(k+1)!} H.$$

5. A-t-on $(e^{X(t)})' = e^{X(t)} X'(t)$ pour toute fonction dérivable X à valeurs dans E ?

Exercice 8 *Différentielle et vecteur propre*

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et u un endomorphisme symétrique continu de E.

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

2. On considère l'application $\varphi : E\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle u(x), x\rangle/\|x\|^2$ pour tout $x \in E\setminus\{0\}$. Etablir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E, $\mathrm{d}\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

Exercice 9 *L'ouvert des matrices cycliques*

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\mathrm{Tr}(M), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$.

1. Montrer que f est différentiable pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ et préciser $\mathrm{d}f(M)$.

2. Montrer que le rang de $\mathrm{d}f(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.

3. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 *Rang localement constant*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que le rang de $\mathrm{d}f(x)$ soit localement constant sur U.

Exercice 11 *Une égalité*

Calculer, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Exercice 12 *Un calcul de dérivées partielles secondes*

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 \arctan\frac{y}{x} - y^2 \arctan\frac{x}{y} \quad \text{si} \quad xy \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad xy = 0.$$

Montrer que f n'est pas de classe C^2.

Exercice 13 *Un calcul de différentielle seconde*

Soit $E = l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application $f : E \times E \to E$ définie par

$$f : (x,y) \mapsto (\sin(x_n y_n))_n.$$

Montrer que f est de classe C^∞ et calculer $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E \times E$.

Exercice 14 *Dérivation des fonctions composées*

Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $\mathbb{S}^1$. On pose $a = \partial_x f(1,0)$ et $b = \partial_y^2 f(1,0)$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer $F''(0)$ en fonction de a et b.

Exercice 15 *Une EDP*

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante en utilisant le changement de variables indiqué :

$$\frac{1}{x^2}\partial_x^2 f(x,y) - \frac{1}{x^3}\partial_x f(x,y) + \frac{1}{y^3}\partial_y f(x,y) - \frac{1}{y^2}\partial_y^2 f(x,y) = 0,$$

où f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $u = x^2$, $v = y^2$.

Exercice 16 *Une limite*

A l'aide du développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$ au point $(0,0)$, calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}.$$

Exercice 17 *Lemme d'Hadamard*

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x).$$