Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Espaces vectoriels normés

Exercice 1 *Théorème de Fréchet - Von Neumann - Jordan*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
1. Supposons E euclidien. Montrer que l'identité du parallélogramme est vérifiée :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Réciproquement, montrer que si la norme de E vérifie l'identité du parallélogramme, alors E est euclidien.

Exercice 2 *Théorème de Riesz*
Rappeler et démontrer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité d'un espace vectoriel normé.

Exercice 3 *Séparé d'un espace vectoriel normé muni d'une semi-norme.*
Soit E un espace vectoriel et N une semi-norme sur E. On pose

$$F = \big\{x \in E : N(x) = 0\big\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour ξ appartenant au quotient E/F et x un représentant de ξ, on pose $\|\xi\| = N(x)$. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie et est une norme sur E/F.

Exercice 4 *Non équivalence des normes en dimension infinie*
Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ converge vers Q au sens de cette norme.

Exercice 5 *Non équivalence des normes en dimension finie*
Considérons le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ muni de

$$N_0(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a+b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|).$$

Montrer que N_0 et N_∞ sont des normes non équivalentes sur E. Commenter.

Exercice 6 *Complétude et séries*
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Application 1 : Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On introduit sur le quotient E/F

$$N(\xi) = \inf_{\xi = \overline{x}} \|x\|.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme et que $(E/F, N)$ est complet.

Application 2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Démontrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mu)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est complet. De plus, si (f_n) est une suite de $L^p(\mu)$ qui converge vers $f \in L^p(\mu)$ dans cet espace, montrer qu'il existe une extractrice (n_k) telle que (f_{n_k}) converge presque partout vers f et qu'il existe $g \in L^p(\mu)$ telle que $|f_{n_k}| \leq g$.

Exercice 7 *Complété d'un espace vectoriel normé*

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(\mathbf{E}, d)$ son complété. Montrer que $\mathbf{E}$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Banach.

Exercice 8 *Polynômes*

Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes, on pose, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{k=0,\ldots,n} |a_k|.$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes. Sont-elles équivalentes ? $\mathbb{C}[X]$ est-il complet pour l'une d'entre elles ?

Exercice 9 *Fonctions continues sur* $[0,1]$

On note E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$.

1. Montrer que l'application

$$f \in E \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

définit une norme sur E.

2. $(E, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

Exercice 10 *Fonctions continues sur un compact*

Soit (X, d) un espace métrique compact. on note $E = C^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que E est un espace de Banach.

2. On va maintenant montrer que E est séparable.

2a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des points $x_1^n, \ldots, x_{N_n}^n$ de X et des fonctions $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_{N_n}^n$ de E positives vérifiant

$$\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j^n = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j^n(x) = 0 \quad \text{si} \quad d(x, x_j^n) \geq \frac{1}{n}.$$

2b. Prouver que la famille (φ_j^n) est totale et conclure.

Exercice 11 *Fonctions de classe* C^1

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)|,$$

définissent deux normes équivalentes sur E qui rendent cet espace complet.

Exercice 12 *Fonctions hölderiennes*

Soit $\alpha \in (0,1]$. On note Lip_α l'espace des fonctions α-hölderiennes sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

1. Que dire d'une fonction α-hölderienne avec $\alpha > 1$?

2. Montrer que l'application N définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

est une norme sur Lip_α.

3. Montrer que Lip_α muni de N est un espace de Banach.

4. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

5. Montrer que la boule unité fermée de (Lip_α, N) est une partie compacte de $C^0[0,1]$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 13 *Espaces de suite*

1. Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$ avec injection continue. Cette inclusion peut-elle être une égalité ?

2. Montrer que les $l^p(\mathbb{N})$ sont complets.

3. Montrer que $c_0(\mathbb{N})$, le sous-espace de $l^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites qui tendent vers 0, est complet lorsqu'il est muni de $\|\cdot\|_\infty$.

4. Quelle est l'adhérence de $l^p(\mathbb{N})$ dans $l^\infty(\mathbb{N})$?

5. Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, $l^p(\mathbb{N})$ est séparable, mais que $l^\infty(\mathbb{N})$ ne l'est pas.