Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Problèmes d'extrema

Exercice 1 *Recherche d'extrema*
Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, et préciser leur nature :
1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$,
2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 2 *Extrema en fonction d'un paramètre*
Discuter, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, la nature des extrema de la fonction

$$f(x,y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 *Triangle*
Soit ABC un triangle du plan. Trouver le point qui réalise le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$, où M varie dans le plan du triangle.

Exercice 4 *Extrema sur un fermé*
Etudier les extrema de la fonction $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$ définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

Exercice 5 *Infimum du gradient*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1. Déterminer $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|$.

Exercice 6 *Recherche d'extrema liés*
Soit $a > 0$ un réel strictement positif. On considère la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{axy}.$$

Etudier les extrema relatifs de la fonction f sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 + x + y = 4\big\}.$$

Exercice 7 *Distance d'un hyperplan à une sphère*
Soient $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = a\}$, où $v \in \mathbb{R}^n$ et $a \geq 0$ sont fixés. Déterminer la distance de l'hyperplan H à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 8 *Inégalité arithmético-géométrique*
1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. On considère

$$K = \Big\{x \in (\mathbb{R}_+)^n : \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 1\Big\},$$

et pour tout $x \in K$, on pose $f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Calculer le maximum de f sur K et en déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Caractériser le cas d'égalité.

2. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V donné, quel est celui dont la surface est minimale ?

Exercice 9 *Caractérisation de* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$

Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 *Inégalité d'Hadamard*

A l'aide du théorème des extremas liés, démontrer l'inégalité suivante,

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n, \quad |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|v_j\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, et caractériser les cas d'égalité.

Exercice 11 *Une partie de billard*

Montrer qu'il existe une trajectoire fermée à trois rebonds sur tout billard elliptique.

Exercice 12 *Descente de gradient*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et coercive, i.e. telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

1. Montrer que f admet son minimum sur $\mathbb{R}^n$ et que ce minimum est atteint en un point unique x^*.

On suppose maintenant que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ et on définit ensuite récursivement la suite $(x_p)_{p \geq 0}$ par

$$\forall p \geq 0, \quad x_{p+1} = x_p - \alpha \nabla f(x_p).$$

2. On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne pour un certain $L > 0$.

2a. Montrer que pour tout $p \geq 0$,

$$f(x_{p+1}) \leq f(x_p) - \alpha\Big(1 - \frac{L\alpha}{2}\Big)\|\nabla f(x_p)\|^2.$$

2b. On suppose maintenant que $\alpha \leq 1/L$. Déduire de l'inégalité précédente que pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(x_{p+1}) &\leq f(x_p) + \langle \nabla f(x_p), x_p - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x_p)\|^2 \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha}\left(\|x_p - x^*\|^2 - \|x_{p+1} - x^*\|^2\right). \end{aligned}$$

2c. Montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$f(x_p) - f(x^*) \leq \frac{1}{2p\alpha}\|x_0 - x^*\|^2.$$

3. On suppose toujours que ∇f est L-lipschitzienne mais on suppose de plus que f est m-fortement convexe, i.e. que la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$ est convexe.
3a. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2}\|x - y\|^2.$$

3b. Montrer que si α est plus petit qu'une certaine constante ne dépendant que de m et L, alors il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\forall p \geq 0, \quad \|x_p - x^*\| \leq c^p \|x_0 - x^*\|.$$