Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 *Une limite*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$, et soit $L \geq 1$ un entier. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{nL} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big).$$

Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2 *Fonction de Van der Waerden*
Montrer que la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k},$$

où $\{\cdot\}$ désigne la fonction partie fractionnaire, est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Lemme de Borel et applications*
1. Soit (a_n) une suite de réels. On veut montrer le Lemme de Borel qui stipule qu'il existe une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(0) = a_n.$$

Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, on pose

$$N_p(f) = \max_{0 \leq q \leq p} \|f^{(q)}\|_\infty.$$

On considère φ une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$, nulle en dehors de $[-1, 1]$ et telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi^{(p)}(0) = 0$ si $p \geq 1$.
1a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} N_n\Big(\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)x^{n+1}\Big) = 0.$$

1b. Construire une suite décroisante de réels strictement positifs (ε_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_n\Big(\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)x^{n+1}\Big) \leq \min\Big(1, \frac{1}{|a_{n+1}|}\Big).$$

1c. On pose, pour tout nombre réel x,

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\Big)\frac{a_n x^n}{n!}.$$

Montrer que g est de classe C^∞ et vérifie $g^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que toute fonction C^∞ sur un intervalle compact $[a, b]$ avec dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire. Montrer qu'il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout x réel,

$$f(x) = g(x^2).$$

Exercice 4 *Racines des polynômes réels*

Soit P un polynôme à coefficients réels possédant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes et que cette majoration est optimale.

Exercice 5 *Fonctions à dérivées croissantes*

Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de dérivée croissante. Montrer que f est convexe sur I.

Exercice 6 *Critère de nullité*

Soit f une application dérivable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall t \in]a,b[, \quad \|f'(t)\| \leq k\|f(t)\|.$$

Montrer que si f s'annule en $t_0 \in]a,b[$, alors elle est identiquement nulle sur $]a,b[$.

Exercice 7 *Théorème de Darboux*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. En considérant l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} : x, y \in I, x < y \right\},$$

montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 *Inversion locale en dimension* 1

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f' \geq \alpha$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\mu| \leq C$, il existe $x \in [-1,1]$ tel que $f(x) = \mu$ et $\alpha|x| \leq |\mu|$.

Exercice 9 *Inégalité de Kolmogorov*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

1. Montrer que si f et f'' sont bornées, alors f' aussi et que l'on a l'estimation globale

$$\|f'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

2. On suppose à présent que la fonction f prend des valeurs positives et que sa dérivée seconde f'' est bornée. Montrer que l'on a alors l'estimation ponctuelle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)|^2 \leq 2f(x)\|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Exercice 10 *Lemme d'Hadamard*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geq 1$. Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$,

2. $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n g(x)$.