Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes

EVNCD — 2017-2020

Espaces de Hilbert

Exercice 1 *Norme et formes linéaires continues*

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $x \in H$:

$$\|x\| = \max\big\{|f(x)| : f \in H',\ \|f\| \leq 1\big\}.$$

Exercice 2 *Un calcul de projection*

Calculer

$$\lambda = \inf\left\{\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \, \mathrm{d}x : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 3 *Distance non atteinte*

Illustrer l'importance des hypothèses du théorème de projection sur les convexes fermés dans les espaces de Hilbert.

Exercice 4 *Théorème de projection et identité du parallélogramme*

1. Montrer que $E = (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach et que la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme.

2. Montrer que l'ensemble

$$F = \big\{f \in C^0[0,1] : f(0) = 0,\ 0 \leq f \leq 1\big\},$$

est un convexe fermé de E.

3. Montrer que $d(1, F) = 1$ est atteinte en tout point de F.

Exercice 5 *Orthogonal non supplémentaire*

1. Montrer que $E = C^0[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est un espace préhilbertien qui n'est pas un Hilbert.

2. Montrer que

$$F = \big\{f \in C^0[0,1] : f_{|[0,\frac{1}{2}]} = 0\big\},$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|_{L^2})$.

3. Montrer que

$$F^\perp = \big\{g \in C^0[0,1] : g_{|[\frac{1}{2},1]} = 0\big\}.$$

4. Montrer que E n'est pas somme de F et $F^\perp$.

Exercice 6 *Hyperplan fermé d'orthogonal trivial*

Soit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On munit cet ensemble du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. L'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il un espace de Hilbert ?

2. Soit
$$f : u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}.$$
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et que son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

3. Commenter.

Exercice 7 *Critère de densité*

Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 1-périodiques et de carré intégrable. Formuler une condition nécessaire et suffisante sur $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ pour que $\mathrm{vect}\{\tau_a\varphi : a \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $L^2(\mathbb{T})$.

Exercice 8 *Commutation avec les translations*

Soit $T : L^2(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ un opérateur linéaire continu tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$, où τ_a est l'opérateur de translation $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$. Montrer qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $T(f) = f * g$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 9 *Polynômes orthogonaux*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids, i.e. que ρ est mesurable, strictement positive et vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x) \,\mathrm{d}x < +\infty.$$
On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer qu'il existe $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormale de polynômes tels que $\deg P_n = n$.

Exercice 10 *Densité des polynômes orthogonaux*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que
$$\int_I e^{a|x|}\rho(x) \,\mathrm{d}x < +\infty.$$
On va montrer que l'ensemble des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

1. Soit $f \in L^2(I, \rho)$. Montrer que la fonction φ définie par
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur
$$B_a = \big\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a/2\big\}.$$
2. On suppose que $f \in L^2(I, \rho)$ est orthogonale aux monômes. En calculant les dérivées de F en 0, montrer que f est nulle et conclure.

Exercice 11 *Base de Hermite*

A l'aide des exercices précédents appliqués à $I = \mathbb{R}$ et à la fonction $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, exhiber une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Calculer les premiers éléments de cette base.

Exercice 12 *Opérateur adjoint*

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(H)$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $T^* \in \mathcal{L}(H)$ telle que

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

2. Démontrer que $T^{**} = T$, que si $S \in \mathcal{L}_c(H)$ est continue, alors $(TS)^* = S^* T^*$, et que si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

3. Démontrer que $\|T\| = \|T^*\|$ et que $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

Exercice 13 *Opérateurs normaux*

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit normal si $T^*T = TT^*$.

1. Montrer que T est normal si et seulement si pour tout $x \in H, \|Tx\| = \|T^*x\|$.

2. Montrer que si T est normal, il vérifie :

2a. $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

2b. $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H si et seulement si T est injectif.

2c. Si $Tx = \alpha x$ pour $x \in H$ et α un scalaire, alors $T^*x = \overline{\alpha} x$.

2d. Si α et β sont deux valeurs propres distinctes de T, les sous-espaces propres correspondant sont orthogonaux.

Exercice 14 *Opérateurs diagonaux*

Soit H un espace de Hilbert séparable et soit (e_n) une base hilbertienne de H. D'autre part, soit (λ_n) une suite de scalaires. On considère l'opérateur D défini pour tout $x \in H$ par

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

1. Montrer que l'opérateur D est bien défini et continu si et seulement si (λ_n) est bornée.

2. Montrer que D est inversible si et seulement si $\inf_{n \geq 0} |\lambda_n| > 0$. Calculer alors $\|D^{-1}\|$.

3. Exprimer D^* en fonction de la suite (λ_n).

4. Identifier le spectre de D.

Exercice 15 *Théorème de Lax-Milgram*

Soit H un espace de Hilbert. On considère une forme bilinéaire continue a sur H que l'on suppose coercive, i.e. on suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall x \in H, \quad a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

On va montrer que pour toute forme linéaire continue $L \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u, v) = L(v).$$

1. Montrer que si u existe, il est nécessairement unique.

2a. Montrer qu'il existe une application linéaire et continue $T : H \to H$ telle que, pour tous $u, v \in H$:

$$a(u, v) = \langle Tu, v \rangle.$$

2b. Montrer que :

$$\forall u \in H, \quad \|Tu\| \geq \alpha \|u\|.$$

2c. Montrer que l'image de T est fermée dans H.

2d. Montrer que T est surjective et conclure.

Exercice 16 *Convergence faible*

Soit H un espace de Hilbert.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de la boule unité de H telles que

$$\langle x_n, y_n \rangle \underset{n \to +\infty}{\to} 1.$$

Montrer que la suite $(x_n - y_n)$ converge vers 0.

2. Soit (x_n) une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers $x \in H$ et telle que $\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\to} \|x\|$. Montrer que (x_n) converge fortement vers x.

3. Soit (x_n) une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, la suite (Tx_n) converge faiblement vers Tx.

4. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de H. On suppose que (x_n) converge faiblement vers $x \in H$ et que (y_n) converge fortement vers $y \in H$. Montrer que la suite $(\langle x_n, y_n \rangle)$ converge vers $\langle x, y \rangle$.

Exercice 17 *Adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible*

Soit H un espace de Hilbert, muni d'une base hilbertienne (e_n). On considère l'ensemble

$$F = \big\{ e_m + m e_n : m, n \geq 1 \big\}.$$

Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F, mais qu'il appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F.

Exercice 18 *Lemme de Mazur*

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que toute suite (x_n) d'éléments de H qui converge faiblement est limite forte d'une suite de combinaisons convexes des vecteurs x_n.

Exercice 19 *Propriété de Banach-Saks*

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que l'on peut extraire de toute suite bornée d'éléments de H une sous-suite qui converge fortement au sens de Cesàro.