Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Séparabilité

Exercice 1 *Fonctions continues sur un compact*

Soit (X,d) un espace métrique compact. On note $E = C^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. L'objectif est de montrer que E est séparable.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe des points $x_1^n, \ldots, x_{N_n}^n$ de X et des fonctions positives $\varphi_1^n, \ldots, \varphi_{N_n}^n$ de E vérifiant

$$\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j^n = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j^n(x) = 0 \quad \text{si} \quad d(x, x_j^n) \geq \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que la famille $(\varphi_j^n)_{n,j}$ est totale et conclure.

Exercice 2 *Espaces de suites*

Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $l^p(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est séparable.

Exercice 3 *Espaces de fonctions intégrables*

L'objectif est de démontrer que pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ muni de $\|\cdot\|_{L^p}$ est séparable.

1. Pour tout $j \geq 1$ et $m \in \mathbb{Z}^n$, on considère les cubes

$$\Gamma_{j,m} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ 2^{-j} m_i < x_j \leq 2^{-j}(m_i + 1)\big\}.$$

Montrer que pour tout $j \geq 1$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.

2. Pour tout $j \geq 1$, on considère $\mathscr{F}_j$ l'ensemble des fonctions φ de la forme

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbb{1}_{\Gamma_{j,m}},$$

où les constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \bigcup_{j \geq 1} \mathscr{F}_j$ est dénombrable.

3. Montrer que toute fonction continue à support compact peut-être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

4. Conclure.

Exercice 4 *Exemples d'espaces non séparables*

1. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. Montrer que s'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j \in J}$ d'ouverts de E, non vides et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable.

2. En déduire que les espaces $l^\infty(\mathbb{N})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $L^\infty(0,1)$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty}$ et $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas séparables.

Exercice 5 *Un espace de Hilbert non séparable*

Soit I un ensemble non dénombrable et $l^2(I)$ l'espace des suites de carré sommable. Montrer que $l^2(I)$ est un espace de Hilbert non séparable.