Séries de Fourier

Exercice 1 *Valeurs de la fonction ζ*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 2 *Développement de la cotangente*
Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad \pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 3 *Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier*
Montrer que la série trigonométrique $\sum \frac{\sin(nt)}{\ln n}$ est convergente sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas le développement en série de Fourier d'une fonction localement intégrable et 2π-périodique.

Exercice 4 *Fonctions hölderiennes*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique α-hölderienne. Montrer qu'il existe $\mu \geq 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(f)| \leq \frac{\mu}{|n|^\alpha}.$$

On pourra exprimer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} \, \mathrm{d}t,$$

en fonction de $c_n(f)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 *Inégalité de Wirtinger*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 et de moyenne nulle. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 6 *Phénomène de Gibbs*

On considère une signal carré 2π-périodique impair φ, égal à 1 sur $(0, \pi)$, et valant 0 sur $\pi\mathbb{Z}$.

1. Calculer la série de Fourier de φ. Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers φ.

2. Montrer que les sommes partielles d'indice impairs S_{2n-1} de la série de Fourier de φ admettent la représentation intégrale

$$\forall t \in [0, \pi], \quad S_{2n-1}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(2ns)}{\sin(s)} \, \mathrm{d}s.$$

3. Calculer les points critiques de S_{2n-1} sur $[0, \pi]$ et montrer que S_{2n-1} admet en le plus petit d'entre eux un maximum local.

4. Montrer que ce maximum converge vers le nombre

$$M = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} \, \mathrm{d}s > 1.$$

5. Commenter.

Exercice 7 *Genèse des séries de Fourier : Equation de la chaleur*

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. Résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), & (t,x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $u(t, \cdot)$ est une fonction 2π-périodique pour tout $t \geq 0$, u est continue sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ et C^∞ sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Montrer l'unicité de la solution.

Exercice 8 *Méthode des rectangles*

Soit f une fonction C^∞ et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit

$$I = \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout entier naturel non nul N, on note R_N l'approximation de I obtenue par la méthode des rectangles à N pas constants entre 0 et 1. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, on a

$$R_N \underset{N \to +\infty}{=} I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^p}\right).$$