Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Sous-variétés

Exercice 1 *Echauffement*
L'ensemble
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 + xz + y = 0\},$$
est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 *Groupes de matrices*
1. Montrer que le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2-1 de $\mathbb{R}^{n^2}$ et déterminer son espace tangent en tout point.
2. Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ et de même qu'en question précédente, déterminer son espace tangent en tout point.
3. Mêmes questions avec le groupe des matrices symplectiques réelles
$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}) : M^T J M = J\} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *Matrices de rang donné*
Soit $0 < r < n$ fixé. On considère l'ensemble $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de rang r. L'objectif est de montrer que V_r est une sous-variété de dimension $n^2-(n-r)^2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$. Pour cela, on introduit l'ensemble $U_r \subset M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont le premier mineur $r \times r$ (en haut à gauche) est non nul.
1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ que l'on écrit par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in M_r(\mathbb{R})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in V_r \cap U_r$ si et seulement si $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ et $D = CA^{-1}B$.
2. Montrer que $V_r \cap U_r$, puis V_r, sont des sous-variétés de dimension $n^2-(n-r)^2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 4 *Contre-exemples*
Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$:
1. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 = x^4\}$ (point double),
2. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^4\}$ (point double),
3. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$ (cusp).

Exercice 5 *Ensemble dépendant d'un paramètre*
Pour $r > 0$, on considère l'ensemble
$$V_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1,\ x^4 + y^4 + z^4 = r\}.$$
1. Pour quelles valeurs de $r > 0$ l'ensemble V_r est-il non vide ?
2. Dans ce cas, est-ce une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?