Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1 *Un difféomorphisme local*
On considère la fonction $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Donner des ouverts V et W maximaux tels que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 2 *Inversion globale*
Soient $k > 0$ une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 supposée k-dilatante, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
1. Montrer que f est injective et d'image fermée.
2. Montrer que $\mathrm{d}f(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Montrer par inversion locale que l'image de f est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et conclure.

Exercice 3 *Perturbation de l'identité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $|f'(x)| \leq k < 1$ pour tout x réel. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$. Montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 *Fonctions strictement monotone*
Soit E un espace euclidien de dimension finie. Une application $f : E \to E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k\|x - y\|^2.$$

1. Soit $f : E \to E$ de classe C^1. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si

$$\exists k > 0, \forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle \mathrm{d}f(x) \cdot h, h \rangle \geq k\|h\|^2.$$

2. Montrer que si $f : E \to E$ est C^1 et strictement monotone, alors c'est un C^1-difféomorphisme global sur E.

Exercice 5 *Rétraction de la boule sur la sphère*
Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne. On veut démontrer qu'il n'existe pas de rétraction C^1 de B sur ∂B. Par l'absurde, on suppose donc qu'il existe $f \in C^1(B, \partial B)$ tel que $f(x) = x$ pour tout $x \in \partial B$.
1. Pour tout $0 \leq t \leq 1$ et $x \in B$, on considère $\phi_t(x) = (1-t)x + tf(x) \in B$. On considère $\alpha > 0$ tel que pour tout $0 \leq t \leq \alpha$,

$$0 \leq \|\mathrm{d}f\|_\infty \frac{t}{1-t} < 1.$$

On se donne $0 \leq t \leq \alpha$. Montrer que :
1a. ϕ_t est un difféomorphisme local sur $\mathring{B}$,
1b. $\phi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$ par un argument de connexité.
A présent, on pose pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$P(t) = \int_{\mathring{B}} \det \phi_t(x)\ \mathrm{d}x.$$

2a. Montrer que P est un polynôme, puis, par un changement de variable, qu'il est constant.
2b. Montrer que $f(x) \in (\operatorname{Im} \mathrm{d}f(x))^{\perp}$ pour tout $x \in \mathring{B}$.
2c. En déduire que $P(1) = 0$ et conclure.

Exercice 6 *Réduction des formes quadratiques*
Soit A_0 une matrice symétrique inversible. On considère $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(M) = M^T A_0 M.$$

1. Montrer que $\mathrm{d}\varphi(I)$ est surjective et préciser son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in C^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ telle que

$$\forall A \in V, \quad A = \psi(A)^T A_0 \psi(A).$$

3. En déduire que l'ensemble des matrices symétriques de signature (p, q), avec $p + q = n$, est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 *Equation matricielle*
Démontrer que I_n est une solution isolée de l'équation

$$X^2 = I_n, \quad X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 8 *Sous-groupes du groupe linéaire*
1. Montrer que $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.
2. En déduire qu'il existe un voisinage W de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenu dans W, alors G est trivial.

Exercice 9 *Une équation différentielle non linéaire*
Soit $E = \{y \in C^1[0, T] : y(0) = 0\}$ muni de la norme

$$\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty.$$

On considère également $F = C^0[0, T]$ muni de la norme uniforme.
1. Soit $\varphi : y \in E \mapsto y' + y^2$. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $\mathrm{d}\varphi(0)$ est un isomorphisme de E vers F.
3. En déduire qu'il existe deux réels $r_1, r_2 > 0$ tel que pour tout $g \in F$ vérifiant $\|g\|_\infty \leq r_1$, il existe une unique fonction $y \in E$ telle que $\|y\| \leq r_2$ et satisfaisant $y' + y^2 = g$.

Exercice 10 *Développement limité*
Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin y + xy^4 + x^2$.
1. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que pour tout $x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x, y) = 0$.

2. Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ au voisinage de 0.

Exercice 11 *Polynômes scindés à racines simples*

Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes.

1. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}_n[X]$ de P_0 et des applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que tout polynôme $P \in V$ a n racines distinctes $\lambda_1(P), \ldots, \lambda_n(P)$.

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $P \in V$, calculer $\mathrm{d}\lambda_i(P)$ en fonction de $\lambda_1(P), \ldots, \lambda_n(P)$.

Exercice 12 *Asymptotique d'une équation du troisième degré*

Soit la fonction

$$f(x, \varepsilon) = (x - a)(x - b) + \varepsilon x^3,$$

où a et b sont fixés avec $a < b$, et $\varepsilon > 0$ est un paramètre. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x, \varepsilon) = 0$ a trois racines distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Donner un développement asymptotique à l'ordre 1 de ces racines lorsque ε tend vers 0.