Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Théorème de Baire et conséquences

Exercice 1 *Base algébrique et complétude*
Montrer qu'un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable ne peut pas être muni d'une norme qui le rend complet.

Exercice 2 *Nilpotence*
Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout x de E, il existe un entier naturel n_x tel que $T^{n_x}x = 0$. Montrer que T est nilpotente, i.e. qu'il existe un entier naturel n tel que $T^n = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux si E n'est pas complet.

Exercice 3 *Limite simple et continuité*
1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est complet. On considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F convergeant simplement vers une application f de E dans F.
1a. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \big\{x \in E : \forall p \geq n, \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon\big\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense de E et que pour tout x_0 de Ω_ε, il existe V un voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad \|f(x_0) - f(x)\|_F \leq 3\varepsilon.$$

1b. En déduire que f est continue sur un sous-ensemble dense de E.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Exercice 4 *Lemme de Croft*
Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \geq 1, \quad f(nx) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 5 *Caractérisation des espaces l^p*
Soit $1 < p, q < +\infty$ des nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que pour toute suite (b_n) de $l^p(\mathbb{N})$, la série $\sum |a_n b_n|$ converge. Montrer que (a_n) est un élément de $l^q(\mathbb{N})$.

Exercice 6 *Séries de Fourier*
On note $C^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions complexes continues 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. Pour tout $n \geq 1$ et $f \in C_{2\pi}$, on pose :

$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f), \quad \text{où} \quad c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T_n : C_{2\pi} \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue.
2. Calculer une expression synthétique pour T_n.
3. Calculer la norme de T_n.
4. Pour $f \in C^0_{2\pi}$, la série de Fourier de f converge t-elle simplement vers f ?

Exercice 7 *Application injective d'image fermée*
Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de E, $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$.
2. T est injective et d'image fermée.

Exercice 8 *Supplémentaires topologiques*
Soient E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On suppose que F et G sont des supplémentaires algébriques, i.e.

$$F + G = E, \quad F \cap G = \{0\}.$$

Montrer que F et G sont des supplémentaires topologiques, i.e. les projections associées sont continues.

Exercice 9 *Théorème du graphe fermé*
Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Exercice 10 *Critères de continuité*
Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E'$ linéaire.
1. On suppose que pour tout x de E, $\langle Tx, x\rangle_{E',E}$ est positif. Montrer que T est continu.
2. Même question en supposant que pour tout $x, y \in E$, $\langle Tx, y\rangle_{E',E} = \langle Ty, x\rangle_{E',E}$.

Exercice 11 *Sous-espaces fermés de $C^0[0,1]$*
On considère, dans l'espace de Banach $E = C^0[0,1]$ muni de la norme uniforme, un sous-espace vectoriel fermé F tel que tout élément de F est de classe C^1.
1. Montrer que $T : F \to E, f \mapsto f'$ est continue.
2. Montrer que la boule unité de F est équicontinue.
3. En déduire que F est de dimension finie.