Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Topologie dans les espaces métriques

Exercice 1 *Théorème de prolongement des applications uniformément continues*
Donner un contre-exemple au théorème de prolongement des applications uniformément continues lorsque l'espace d'arrivée n'est pas complet.

Exercice 2 *Prolongement des fonctions hölderiennes*
Soit $\alpha \in (0,1)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions α-hölderiennes définies sur Ω à valeurs réelles. Montrer que $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, i.e. que les fonctions α-hölderiennes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sont les restrictions à Ω des fonctions α-hölderiennes sur l'adhérence de Ω.

Exercice 3 *Contre-exemples au théorème du point fixe*
Trouver des espaces métriques (E,d) et des applications f qui satisfont :
1. f est contractante de E dans lui-même mais n'admet pas de point fixe car E n'est pas complet.
2. E est complet, f est contractante mais n'admet pas de point fixe car n'applique pas E dans lui-même.
3. E est complet, f applique cet espace dans lui-même mais est sans point fixe malgré que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

4. E est complet, $f : E \to E$ est non contractante et admet un unique point fixe.
5. E est complet, f envoie E dans E et admet plusieurs points fixes.

Exercice 4 *Itérée contractante*
Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (f composée p fois) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans E et que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de x_0 par f converge vers a.

Exercice 5 *Théorème de point fixe dans un cadre compact*
Soient (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une fonction qui satisfait

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe $a \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées de x_0 par f converge vers a.

Exercice 6 *Théorème de point fixe dans un cadre convexe compact*
Soit X un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé. Soit $f : X \to X$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe dans X.

Exercice 7 *Détermination de zéros*
Soit f une fonction réelle. On souhaite calculer les zéros de f en se ramenant à un problème de point fixe. Pour cela, on pose la fonction $F = f - \mathrm{id}$ et on utilise une suite récurrente du type
$$x_{n+1} = F(x_n).$$
1. On souhaite calculer une valeur approchée de la solution positive de $x - \ln(1+x) - 0,2 = 0$ à l'aide des termes de la suite
$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) + 0,2.$$
Montrer qu'il y a convergence globale, i.e. il y a convergence pour tout $x_0 > 0$, et que la convergence est géométrique.
2. On souhaite calculer une valeur approchée des racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide des termes de la suite
$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1). \end{cases}$$
Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale, i.e. x_0 doit être proche de cette racine. Proposer une autre fonction F pour calculer les autres racines.

Exercice 8 *Equations intégrales*
Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact, $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $E = C(I, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère $\varphi \in E$.
1. Montrer que si $(b - a)\|K\|_\infty < 1$ l'équation intégrale de Fredholm
$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s)\ \mathrm{d}s, \quad t \in I,$$
admet une solution unique $x \in E$.
2. Montrer que l'équation intégrale de Volterra
$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s)\ \mathrm{d}s, \quad t \in I,$$
admet toujours une unique solution $x \in E$.

Exercice 9 *Equation fonctionnelle*
Montrer que l'équation fonctionnelle
$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100f(t) = \sin(2\pi t)$$
admet une solution f continue et 1-périodique.

Exercice 10 *Equation fonctionnelle*
En considérant une norme de la forme
$$\|f\|_M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|e^{-Mx},$$
avec $M \geq 0$, montrer que l'équation fonctionnelle
$$f'(x) = af(x^b) \quad \text{et} \quad f(0) = \alpha,$$
où $b > 1$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, admet une unique solution dans $C[0, 1]$.

Exercice 11 *Théorème de Cauchy-Lipschitz*
On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue telle que pout tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$ et $(y, z) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k\|y - z\|.$$

Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On pourra commencer par supposer que I compact et montrer que $C(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|y\|_k = \sup_{t \in I} e^{-\frac{k}{2}|t-t_0|}\|y(t)\|,$$

est complet.

Exercice 12 *Théorème d'Ascoli*
Soient (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet, et A une partie de $C(E, F)$. On suppose que A est relativement compacte dans $(C(E, F), d_\infty)$. Montrer que A est équicontinue et que pour tout x de E, l'ensemble $\{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact dans F.

Exercice 13 *Equicontinuité et compacité*
Soit (E, d) un espace métrique compact et A une partie de $C^0(E, \mathbb{R})$. On suppose que A est équicontinue sur E, i.e.

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Montrer que A est uniformément équicontinue sur E, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 14 *Bosse glissante*
Soit $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = f(x + n),$$

est équicontinue et bornée dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais qu'elle n'admet aucune sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Quelle hypothèse du théorème d'Ascoli est mise en défaut ?

Exercice 15 *Normes L^p uniformément majorées*
Soient $M > 0$ et $p > 1$. Montrer que l'ensemble

$$L_{M,p} = \left\{ f \in C^1[a, b] : \int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t + \int_a^b |f'(t)|^p \,\mathrm{d}t \leq M \right\},$$

est relativement compact dans $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 16 *Convergence uniforme de fonctions convexes*
Soit (f_n) une suite bornée de fonctions convexes sur $[0, 1]$. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) convergeant uniformément sur tout compact de $(0, 1)$ et ponctuellement sur $[0, 1]$. Vérifier que la limite est convexe. Trouver une suite bornée (f_n) de fonctions convexes sur $[0, 1]$ ne possédant aucune sous-suite convergeant uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 17 *Opérateur à noyau*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts et μ une mesure borélienne de masse finie sur Y. Etant donnée une fonction $K \in C^0(X \times Y)$, on définit un opérateur linéaire $T : C^0(Y) \to C^0(X)$ par

$$\forall f \in C(Y), \forall x \in X, \quad Tf(x) = \int_Y K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Montrer que T est compact, i.e. que l'image par T de la boule unité de $C^0(Y)$ est relativement compacte dans $C^0(X)$.

Exercice 18 *Théorème de Cauchy-Peano par la méthode d'Euler*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On va montrer que le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{P}$$

admet au moins une solution définie sur un intervalle de la forme $[t_0 - T, t_0 + T] \subset I$, avec $T > 0$.

1. Montrer qu'il existe $T > 0$ et $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$ et que toute solution x de (P) définie sur un intervalle $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ soit à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$.

2. Soient $N \geq 1$ et $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ une subdivision à pas constant $h = T/N$ de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par la méthode d'Euler explicite, i.e. $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$. On construit alors la fonction $x_{(N)}$ affine par morceaux sur $[t_0, t_0 + T]$ telle que $x_{(N)}(t_n) = x_n$ pour tout $n = 1, \ldots, N$. On prolonge la fonction $x_{(N)}$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ de la même façon grâce à la subdivision $t_0 - T = t_{-N} < \ldots < t_{-1} < t_0$.

2a. Montrer que les fonctions $x_{(N)}$ ainsi construites sont à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$ et sont des ε_N-solutions du problème (P), où $\varepsilon_N > 0$ est à préciser.

2b. Vérifier que si la suite $(x_{(N)})_N$ converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers une fonction x, celle-ci est solution du problème (P). Montrer qu'une telle convergence a lieu à extraction près. Conclure.

3. A t-on unicité de la solution obtenue ?