École Normale Supérieure de Lyon **Année 2020–2021**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 0 : Théorie des ensembles, dénombrabilité et topologie de la droite réelle

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

a) Montrer que

  i) f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout sous-ensemble A de E.

  ii) f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour tout sous-ensemble B de F.

b) Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles de parties respectivement de E et F. Montrer que

  i) $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$,

  ii) $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$,

  iii) $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,

  iv) $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

  Montrer que l'inclusion est stricte en générale et qu'il y a égalité lorsque f est injective.

c) Montrer que pour toute partie B de F, on a $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour avoir

  i) $f(A^c) \subset f(A)^c$ pour tout $A \subset E$.

  ii) $f(A)^c \subset f(A^c)$ pour tout $A \subset E$.

Exercice 2. Soient E un ensemble, (J_i) une famille de $\mathcal{P}(E)$ indexée par ensemble quelconque I et $(A_{i,j})$ une autre famille de $\mathcal{P}(E)$ indexée par $I \times \bigcup_{i\in I} J_i$, avec les J_i d'autres ensembles quelconques. Développer $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}$. Même question en échangeant $\bigcap$ et $\bigcup$.

Exercice 3. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est *algébrique* s'il existe un polynôme à coefficients rationnels qui annule x. Dans le cas contraire, on dit que x est *transcendant*.

Montrer par un argument de dénombrabilité l'existence de nombres transcendants.

Exercice 4 (Famille sommable). Soit E un ensemble et $(x_\alpha)_{\alpha\in E}$ une famille de réels strictement positifs tels que la somme $\sum_{\alpha\in E} x_\alpha$ converge, ce qui signifie : l'ensemble des sommes sur des sous-parties finies de E admet un majorant, et par défintion

$$\sum_{\alpha\in E} x_\alpha = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha : F \text{ partie finie de } E\right\}.$$

Montrer que E est dénombrable.

Exercice 5. Deux ensembles sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

a) Montrer que deux intervalles réels non vides et non réduits à des singletons sont toujours équipotents.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents, et en déduire que les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ le sont pour tous entiers $n, m \geq 1$.

Exercice 6. a) Démontrer le *théorème de Cantor* : si E est un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
Indication : pour $f : E \to \mathcal{P}(E)$, considérer $A = \{x \in E : x \notin f(x)\}$.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. *Connaissez-vous d'autres preuves de ce fait ?*

Exercice 7. On va démontrer le *théorème de Cantor-Bernstein* : si E et F sont des ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \hookrightarrow F$ et $g : F \hookrightarrow E$, alors ils sont équipotents.

a) Soit $X = \{A \subset E : g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus A\}$. Montrer que X n'est pas vide.
b) Montrer que X a un plus grand élément pour l'inclusion qu'on note M.
c) Montrer que $g(F \setminus f(M)) = E \setminus M$ et conclure.
d) Montrer que l'ensemble des suites d'entiers $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

Exercice 8 (Valeurs d'adhérence). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

a) Soit l est un nombre réel tel que toute sous-suite de (u_n) admet l comme valeur d'adhérence. Montrer qu'alors la suite (u_n) converge vers l.
b) Montrer que si (u_n) est bornée et admet une unique valeur d'adhérence, alors (u_n) converge.
Application : si la suite (u_n) est bornée, montrer que (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(u_{2n} - 2u_n)_n$ converge vers 0.
c) On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
Application : soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue et (u_n) définie par récurrence par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0.

Exercice 9 (Suite de Cauchy). Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est dite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
b) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
c) Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

Exercice 10. a) Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^\star$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux. En quels points est-elle continue ?

b) (**) Est-ce qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont les points de continuité sont exactement les nombres rationnels ?

Exercice 11. On rappelle les propriétés suivantes de l'adhérence et de l'intérieur

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}, \qquad \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$$

a) Donner des exemples dans $\mathbb{R}$ justifiant que les inclusions peuvent être strictes.
b) Qu'en serait-il pour des unions ou des intersections infinies ?

Exercice 12. Prenons un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. Combien au maximum d'ensembles différents on peut obtenir à partir de A en utilisant les opérations $\mathring{\cdot}$ et $\bar{\cdot}$ d'intérieur et d'adhérence ? et si on ajoute l'opération $fr \cdot$ de frontière ?