TD 1 : Topologie des espaces métriques

Exercice 1. Lesquelles des fonctions suivantes donnent une métrique sur $\mathbb{R}$?

a) $d(x,y) = (x-y)^2$,

b) $d(x,y) = |x-2y|^2$,

c) $d(x,y) = |x-y|^{1/2}$,

d) $d(x,y) = |x^2-y^2|$.

Exercice 2. Montrer que dans tout espace métrique les boules fermées sont fermées.

Exercice 3. Montrer que dans le monde des espaces métriques, l'adhérence de $B(x,\rho)$ peut être différente de $BF(x,\rho)$. Qu'en est-il dans le monde des espaces vectoriels normés ?

Exercice 4. Soient (E,d) et (F,δ) des espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie A de E.

Exercice 5. Soient (E,d) et (F,δ) des espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue.

a) Soit $A \subset E$. Si A est ouvert, $f(A)$ est-il ouvert ? Si A est fermé, $f(A)$ est-il fermé ? Si $f^{-1}(A)$ est ouvert, A est-il ouvert ?

b) Soit $B \subset F$. Montrer que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\big(\overline{B}\big)$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

c) Soit $B \subset F$. Montrer que $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \widehat{f^{-1}(B)}^{\circ}$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

Exercice 6 (Métrique SNCF). On note d la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$. Pour x, y les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ nous définissons $d'(x,y) = d(x,y)$ si x, y sont colinéaires et $d'(x,y) = d(x,0) + d(0,y)$ sinon.

a) Montrer que d' définit une métrique

b) Décrire les boules ouvertes de $(\mathbb{R}^2, d')$.

c) Quelles sont l'adhérence du haut demi-plan $H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\big\}$ et l'intérieur de l'axe des ordonnées Y ?

d) En quels points de $\mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et les translations sont-elles continues ?

Exercice 7. Soit (E,d) un espace métrique. On dit que la distance d est ultramétrique si pour tous $x, y, z \in E$,

$$d(x,z) \le \max\left(d(x,y), d(y,z)\right).$$

a) Si d est une distance, montrer qu'elle est ultramétrique si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la relation R_ε définie par $xR_\varepsilon y \iff d(x,y) < \varepsilon$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que dans un espace ultramétrique, tout triangle est isocèle.

c) Montrer que dans un espace ultramétrique, tout point dans une boule en est le centre : $\forall a \in B(x,\rho), B(x,\rho) = B(a,\rho)$. De même pour les boules fermées. Que dire de deux boules d'intersection non vide ?

d) Montrer que les boules ouvertes sont fermées et que les boules fermées de rayon strictement positif sont ouvertes. Quelle est la frontière d'une boule ouverte ?

e) Connaissez-vous des exemples de distances ultramétriques ?

Exercice 8. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$d(f,g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} \min\left(1, \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right|\right).$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une distance.

b) Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, si et seulement si pour chaque $k \geq 0$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$.

Exercice 9. On munit $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ de $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$.

a) Montrer que d est une distance sur C.

b) On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $p_{n_0} : (C,d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $p_{n_0}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_{n_0}$ est continue.

c) Soit (E,d) un espace métrique et $f : E \to C$. Montrer que f est continue si et seulement si $p_n \circ f$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) On note $\Omega = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \{0,1\}\}$. Montrer que Ω est fermé dans C.

Exercice 10. Montrer que si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est une application continue entre deux espaces métriques, alors le graphe de f est fermé dans $E \times F$ pour la distance $d_{E\times F}$ donnée par

$$d_{E\times F}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_E(x_1,x_2), d_F(y_1,y_2)), \quad (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times F.$$

Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 11. Soit (E,d) un espace métrique, et F une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose $d_F(x) = \inf_{y\in F} d(x,y)$.

a) Montrer que $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{F}$.

b) Montrer que d_F est une fonction 1-Lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que tout fermé de E est l'ensemble des zéros d'un fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$.

d) Lemme d'Urysohn : soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0,1]$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.

e) Soit $A \subset E$ un fermé. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in E$:

— $x \in A \iff f(x) \geq 0$

— $x \in \partial A \iff f(x) = 0$.