École Normale Supérieure de Lyon **Année 2020–2021**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 4 : Topologie générale, Compacité

Exercice 1. Si $(E, <)$ est un ensemble totalement ordonné, la topologie de l'ordre sur E est la topologie obtenue en prenant pour base d'ouverts les intervalles ouverts. Vérifier que la topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la topologie usuelle.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ la *topologie de Zariski* de la manière suivante : les ouverts sont exactement les complémentaires des ensembles finis, et l'ensemble vide.

a) Prouver que la topologie de Zariski est effectivement une topologie.

b) Montrer que les fermés de cette topologie sont les ensembles $\{\text{racines de } P, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

c) Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles $[0,1]$ et $\mathbb{Z}$ pour cette topologie.

d) Montrer que les polynômes et l'exponentielle sont des fonctions continues dans la topologie de Zariski, contrairement au sinus.

e) La topologie de Zariski est-elle séparée ? (on dit qu'une topologie est *séparée* si pour tout couple de points distincts, il existe un couple d'ouverts disjoints contenant chacun un des points.)

Exercice 3. (Topologie Quotient) Soit X un espace topologique. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note $X/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence. On note $\pi : x \in X \mapsto [x] \in X/\mathscr{R}$ l'application qui à un élement de X associe sa classe d'équivalence. On dit que $U \subset X/\mathscr{R}$ est un ouvert de $X/\mathscr{R}$ si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

a) Montrer qu'on définit ainsi une topologie sur $X/\mathscr{R}$. Montrer que cette topologie est celle avec le plus d'ouverts qui rende π continue.

b) Le saturé d'un sous-ensemble A de X est l'ensemble des points de X en relation avec un élément de A. Montrer que π est une application ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert de X est ouvert.

c) Soit Z un espace topologique. Montrer qu'une application $g : X/\mathscr{R} \longrightarrow Z$ est continue si et seulement si $g \circ \pi : X \longrightarrow Z$ est continue.

d) Soit $f : X \longrightarrow Z$ une application continue telle que $(x\mathscr{R}y \implies f(x) = f(y))$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\bar{f} : X/\mathscr{R} \longrightarrow Z$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$.

e) Montrer que la propriété ci-dessus caractérise la topologie quotient.

f) Soit $A \subset X$. On appelle écrasement de X sur A l'espace $X/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \mathscr{R} y$ pour tout couple $(x, y) \in A^2$. Décrire la sphère S^2 comme l'écrasement d'un espace sur un sous-espace convenable.

Exercice 4.

a) Montrer que la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ correspond à la topologie associée à la distance induite sur le tore. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact.

b) Montrer que l'espace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de sa topologie quotient est homéomorphe au cercle S^1.

c) Montrer que la topologie quotient pour $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ correspond à la topologie grossière.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace (X, d) est séparable.

(ii) X a une base dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n\geq 1}$ de X telle que tout ouvert U de X s'écrive comme la réunion d'ouverts U_n.

En déduire que si $A \subset E$, $(A, d_{|A})$ est séparable si (E, d) l'est.

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. Montrer que s'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j\in J}$ d'ouverts de E, non vides et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable. En déduire que l'espace $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas séparable.

Exercice 7. a) Soit X un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Soient X et Y deux espaces métriques compacts, et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $g(x) = \inf_{y\in Y} f(x, y)$. Montrer que la fonction $g : X \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 8.

a) Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ. Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un compact.

b) On considère l'espace métrique $C = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(x, y) = \sum 2^{-n}|x_n - y_n|$. Nous avons déja vu que la convergence d'une suite d'éléments de C est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée (on peut même vérifier que cette distance induit la topologie produit). Montrer que C est compact par extraction diagonale.

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Soient $K \subset E$ un compact et $F \subset E$ un fermé. Montrer que $K + F$ est fermé. Est-ce encore vrai si K est seulement supposé fermé ?

b) Soient $K, K' \subset E$ des compacts. Montrer que $K + K'$ est compact.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 11. (Connexité et compacité) On se place dans un espace métrique E.

a) Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes non vides est non-vide.

b) Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes et connexes $(K_i)_{i\geq 1}$ est connexe. *Indication : pour U et V deux ouverts disjoints de E, supposons que $\bigcap_{i\geq 1} K_i \subset U \cup V$. Considérer alors la suite $K_i \setminus (U \cup V)$.*

c) L'affirmation est-elle vraie si on remplace compact par fermé ?

Exercice 12. Soient E un espace vectoriel normé de dimension infinie et K une partie compacte de E. Montrer que $E \setminus K$ est connexe. Est-ce toujours le cas si E est de dimension finie ?