TD 7 : Dérivées d'ordre supérieur, difféomorphismes

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ et $\phi : E \to E$ deux applications de classe C^2. Exprimer $\mathrm{d}^2(f \circ \phi)$ à l'aide des différentielles première et seconde de f et ϕ.

Exercice 2. Montrer que si $f : E \to F$ est une fonction n fois différentiable et que $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de E, alors $\mathrm{d}^n f_a(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(a)$.

Exercice 3. Après avoir justifié leur existence, donner l'expression de la différentielle seconde des applications $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Inv} : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = 0$ si $xy = 0$ et sinon

$$f(x,y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}.$$

Montrer que la fonction f n'est pas de classe C^2.

Exercice 5 (Inégalité de Glaeser). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et positive. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\|\mathrm{d}^2 f_x\| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathrm{d} f_x\|^2 \leq 2Mf(x).$$

Que dire si l'on ne suppose plus que la fonction f à valeurs positives mais qu'elle est bornée ?

Exercice 6 (Formule de Taylor-Young). Soient E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application. En admettant que l'inégalité des accroissements finis vue en cours reste vraie pour des applications différentiables, montrer que pour tout $n \geq 1$ et $a \in U$, si f est n fois différentiable en a, alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \mathrm{d}^j f_a(\underbrace{h, \dots, h}_{j \text{ termes}}) + o(\|h\|^n).$$

Dans le cas $n = 2$, écrire cette égalité à l'aide du gradient et de la hessienne.
Application : calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x - (1+x)\cos(y)}{(x^2+y^2)\cos(y)},$$

en considérant la fonction $f(x,y) = e^x / \cos(y)$.

Exercice 7. Discuter la nature des extrema des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 3x^3 + xy^2 - xy, \quad g_\lambda(x,y) = y(x^2 + y^2 - \lambda y) \text{ en fonction de } \lambda.$$

Exercice 8. On considère la fonction $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Donner des ouverts V et W maximaux tels que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 9. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts. Montrer que s'il existe un difféomorphisme entre U et V, alors $n = m$.

Exercice 10. Soient $k > 0$ une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 supposée k-dilatante, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

a) Montrer que f est injective et d'image fermée.
b) Montrer que $\mathrm{d}f_x$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
c) Montrer par inversion locale que l'image de f est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et conclure.

Exercice 11. Soit A_0 une matrice symétrique inversible. On considère $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ par $\phi(A) = A^T A_0 A$.

a) Montrer que $\mathrm{d}\phi_{I_n}$ est surjective et préciser son noyau.
b) Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que
$$\forall A \in V, \quad A = \psi(A)^T A_0 \psi(A).$$
c) En déduire que l'ensemble des matrices symétriques de signature (p,q), avec $p+q = n$, est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.
d) En particulier, en déduire que si $Q : U \to L^2(E, \mathbb{R})$ est une famille continue de formes quadratiques, et si $Q(x)$ est définie positive pour un certain x dans U, alors Q est définie positive sur un voisinage de x.

Exercice 12 (Lemme de Hadamard). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k et $a \in U$. Montrer qu'il existe des fonctions $f_1, \cdots, f_n : U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} telles que pour tout x dans U,

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) f_i(x).$$

Exercice 13 (Lemme de Morse). Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, i.e. $\mathrm{d}f_0 = 0$ et la différentielle seconde en ce point $\mathrm{d}^2 f_0$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Montrer qu'il existe un C^1-difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{p} u_j^2 - \sum_{j=p+1}^{n} u_j^2.$$

Indications : on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et l'exercice 11.