TD 9 : Théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus

Exercice 1. Montrer qu'un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable ne peut pas être muni d'une norme qui le rend complet.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E)$. On suppose que pour tout x de E, il existe un entier naturel $n_x \geq 0$ tel que $T^{n_x}x = 0$. Montrer que T est nilpotente, *i.e.* qu'il existe un entier naturel n tel que $T^n = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux si E n'est pas complet.

Exercice 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On appelle *oscillation* de f en $x \in I$ le nombre

$$\omega(f, x) = \lim_{h \to 0} \sup \big\{ |f(u) - f(v)| : |u - x| < h,\ |v - x| < h \big\}.$$

a) Montrer que $\omega(f, x)$ est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour tout $x \in I$.
b) Monter que f est continue en $x \in I$ si et seulement si $\omega(f, x) = 0$.
c) Notons C l'ensemble des points de continuité de la fonction f. Pour tout $a > 0$, on définit $C_a = \{x \in I : \omega(f, x) < a\}$. Montrer que les C_a sont ouverts et que $C = \bigcap_{n>0} C_{1/n}$.
d) Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ne peut pas être écrit comme intersection dénombrable d'ouverts.
e) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que ses points de continuité soient les nombres rationnels.

Exercice 4.

a) Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est complet. On considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F convergeant simplement vers une application f de E dans F.
   (i) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \big\{ x \in E : \forall p \geq n,\ \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon \big\}.$$

   Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \geq 0} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense de E et que pour tout x_0 de Ω_ε, il existe V un voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad \|f(x_0) - f(x)\|_F \leq 3\varepsilon.$$

   (ii) En déduire que f est continue sur un sous-ensemble dense de E.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Exercice 5 (Lemme de Croft). Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \geq 1, \quad f(nx) \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 6. Soit $1 < p, q < +\infty$ des nombres réels tels que $1/p + 1/q = 1$. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que pour toute suite $(b_n)_n$ de $\ell^p(\mathbb{N})$, la série $\sum |a_n b_n|$ converge. Montrer que (a_n) est un élément de $\ell^q(\mathbb{N})$.

Exercice 7. On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions complexes continues 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit

$$\begin{array}{rccc} S_n: & \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \left(t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}\right), \end{array}$$

où $c_k(f)$ désigne le k-ième coefficient de Fourier de f : $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que

$$\sup_{f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty} \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\, \mathrm{d}t,$$

où pour tout $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

b) En déduire qu'il existe un sous-ensemble dense Σ de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in \Sigma$, la série de Fourier de f ne converge pas vers $f(t_0)$ en t_0.

Exercice 8. (Théorème de Sunyer y Balaguer.) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que

$$\forall x \in I, \exists n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

On se propose de montrer que

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) = 0,$$

i.e. f est une fonction polynomiale. On dit que $x \in I$ est *polynomial* s'il existe un voisinage de x dans I sur lequel f coïncide avec un polynôme.

a) Soit $J \subset I$ un intervalle tel que tout $x \in J$ est polynomial. Montrer que f coïncide avec un polynôme sur J.

b) Soit F_n l'ensemble des points x de I tels que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que F_n est fermé dans I.

c) Soit Z l'ensemble des points de I qui ne sont pas polynomiaux. Montrer que Z est un fermé de I sans point isolé.

d) Soit $Z_n = Z \cap F_n$. On suppose que Z est non vide. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert U de I et un entier n_0 tels que $Z \cap U \neq \emptyset$ et $Z \cap U \subset Z_{n_0}$.

e) Montrer que pour tout $x \in Z \cap U$, pour tout $n \geq n_0$, on a $f^{(n)}(x) = 0$.

f) Soit $x \in (I \setminus Z) \cap U$. Montrer qu'il existe a et b tels que $]a, b[$ est un voisinage de x contenu dans $(I \setminus Z) \cap U$ et que a ou b est dans $Z \cap U$. En déduire que f coïncide sur $]a, b[$ avec un polynôme de degré inférieur ou égal à n_0.

g) En déduire que f coïncide avec un polynôme de degré au plus n_0 sur U, puis que Z est vide. Conclure.