Leçons Agrégation
Préparation Agrégation Externe de Mathématiques

Paul Alphonse

2015-2016

Table des matières

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

Première partie

Algèbre

Leçon 101

Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

Il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche, plus subtile, via le morphisme qui relie le groupe agissant et le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des fonctions, voire des polynômes. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide). Certains candidats décrivent les actions naturelles de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. Enfin, on pourra noter que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations dont il est facile de déterminer le caractère.

Squelette du plan

1. Notion d'action de groupe.
   1.1 Action d'un groupe sur un ensemble.
   - Action d'un groupe sur un ensemble [Cal14] p.195 ou [Per96] p.13.
   - Point de vue du morphisme entre le groupe et le groupe des permutations de l'ensemble [Cal14] p.196 ou [Per96] p.13.
   - ⋆ Les éléments du groupe diédral D_n sont par définition les isométries de $\mathbb{R}^2$ préservant les sommets d'un polygone régulier à n cotés [Ulm12] p.8.
   - Noyau d'une action de groupe [Cal14] p.196.
   - Actions k-transitives et simplement k-transitives [Cal14] p.207 ou [Per96] p.14.
   - ⋆ $\mathfrak{A}_n$ agit $(n-2)$-transitivement sur $[\![1, n]\!]$ [Per96] p.16.
   - Action fidèle [Cal14] p.208 ou [Per96] p.14.
   - Représentation par permutation induite par une action de groupes [CG15] p.458.

   1.2 Orbites et stabilisateurs.
   - Stabilisateurs et orbites d'un élément [Cal14] p.200 ou [Per96] p.14.
   - Cas particulier : Normalisateur pour l'action d'un groupe sur l'ensemble de ses parties par conjugaison [Cal14] p.201.
   - ⋆ Les orbites de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ dans son action sur $\mathbb{R}^n$ sont les sphères centrées en l'origine [Per96] p.14.
   - ⋆ Dans l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$, le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ [Per96] p.14.
   - Relation orbite-stabilisateur [Cal14] p.203.
   - Formule des classes [Cal14] p.205.
   - Formule de Burnside [CG13] p.413.
   - ⋆ Colliers de perle [Com98] p.44.

   1.3 Quelques actions remarquables.
   - *i* Action d'un groupe sur lui-même par translation [Cal14] p.197.
   - Cette action est simplement transitive [Cal14] p.208 et p.209 ou [Per96] p.15.
   - Théorème de Cayley [Per96] p.15.

ii Action d'un groupe sur lui-même par conjugaison. Un groupe opère sur l'ensemble de ses parties par conjugaison [Cal14] p.198.

- L'action n'est pas transitive [Cal14] p.208.
- Les stabilisateurs et les orbites s'appellent dans ce cadre centralisateurs et classes de conjugaison [Cal14] p.200 et [Per96] p.15.
- ⋆ Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ [Per96] p.15 et [Ulm12] p.46.
- ⋆ Conjugaison des 3-cycles dans $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ [Per96] p.15.
- Le centralisateur d'un élément d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}_n$ contient un sous-groupe distingué d'ordre une puissance de 2 [Per96] p.32.
- Remarque : Le résultat précédent permet de montrer que les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs pour n entier distinct de 6 [Per96] p.32.

iii Action d'un groupe par translation sur son quotient par un de ses sous-groupes [Cal14] p.197 ou [Per96] p.17.

- Cette action est transitive mais non fidèle en général, expression de son noyau [Per96] p.17.
- ⋆ Tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ [Per96] p.30.
- Un groupe infini possédant un sous-groupe d'indice fini est non simple [Per96] p.17.

iv Action d'un groupe sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison [Per96] p.18.

- Sous cette action, le stabilisateur est appelé normalisateur [Per96] p.18.
- Théorème de Sylow [Per96] p.19.

1.4 Premières applications aux p-groupes.

- Le centre d'un p-groupe est non trivial [Cal14] p.206.
- Tout groupe d'ordre p^2 est abélien [Cal14] p.207.
- ⋆ Q_8 est d'ordre 2^3 mais n'est pas abélien.
- Nombre de points fixes de l'action d'un p-groupe sur un ensemble [Cal14] p.210.
- Application : Théorème de Cauchy [Ulm12] p.69.
- Remarque : Ce théorème est un corollaire des théorèmes de Sylow.

2. Actions sur les espaces de matrices.

2.1 Action par équivalence.

- Action de $\mathrm{GL}(m,k) \times \mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{M}(m,n,k)$ par équivalence [CG13] p.4.
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang [CG13] p.3.
- Cardinal d'un stabilisateur dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.8 et p.49.
- Cardinal d'une orbite dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.9.
- Intérieur de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
- Adhérence de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
- Connexité de l'ensemble des matrices de rang fixé [CG13] p.31.

2.2 Action par conjugaison : Réduction de Jordan.

- Diagramme de Young d'une orbite nilpotente [CG13] p.89.
- Bloc de Jordan [CG13] p.91.
- Existence d'une réduite de Jordan [CG13] p.92.
- Classification des orbites nilpotentes [CG13] p.92.
- Les matrices nilpotentes sont les matrices dont la classe de similitude est adhérente à la matrice nulle [FGN09a] p.237.

2.3 Action par conjugaison : Réduction de Frobenius.

- Sous-espaces cycliques [CG13] p.102.

- Caractérisations de cyclicité [CG13] p.103.
- Décomposition de Frobenius [CG13] p.105.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes facteurs invariants [CG13] p.107.
- Matrices semblables et extensions de corps [CG13] p.107.
- ⋆ Réduction de Frobenius d'une matrice de taille 5 [CG13] p.109.
- Remarque : Pour cette action, le stabilisateur est appelé commutant.
- Les matrices diagonalisables sont les matrices dont la classe de similitude est fermé [CG13] p.86 ou [FGN09a] p.236.
- Les matrices scalaires sont les matrices dont la classe de similitude est bornée [FGN09a] p.235.
- Le commutant d'une matrice de taille n est au moins de dimension n [FGN09a] p.135.

2.4 Action par congruence.

- Mise en place : On s'intéresse à l'action de $\mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{S}(n,k)$ pour k valant $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps fini de caractéristique différente de 2.
- Lorsque $k = \mathbb{R}$, les orbites sont caractérisées par la signature. C'est le théorème d'inertie de Sylvester [CG13] p.182.
- ♮ Stabilisateur des matrices $I_{(p,q)}$. Isomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.155 et p.211.
- Adhérence des orbites des matrices $I_{(p,q)}$ [CG13] p.155.
- Lorsque $k = \mathbb{C}$, les orbites sont caractérisées par le rang [CG13] p.151.
- Lorsque $k = \mathbb{F}_q$, les orbites sont caractérisées par le discriminant [CG13] p.151.
- ⋆ Matrices intervenant dans la démonstration de la loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.
- ♮ Loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.

3. Actions des groupes de matrices et géométrie.

3.1 Actions du groupe orthogonal.

- Action de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
- Stabilisateur du pôle nord [CG13] p.71.
- $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
- Application : $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe [CG13] p.71.
- Remarque : On montre de la même façon que les groupes $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ sont connexes [CG13] p.72.
- $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ agissent sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ [CG13] p.159.
- $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ s'identifie aux angles orientés et $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ aux angles non orientés [CG13] p.159.
- Action d'un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ sur l'ensemble de ses pôles [CG13] p.414.
- Signature d'un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ [CG13] p.415.
- Equation caractéristique [CG13] p.415.
- Cardinaux possibles pour de tels sous-groupes [CG13] p.416.
- Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ [CG13] p.426.

3.2 Actions des groupes projectifs.

- Le noyau de l'action de $\mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ se réduit aux homothéties [CG13] p.41.
- $\mathrm{PGL}(n,k)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ [CG13] p.41.
- $\mathrm{PGL}(2,k)$ agit 3-transitivement sur $\mathbb{P}^1(k)$ [CG13] p.295.
- Cardinaux de $\mathrm{GL}(n,k)$ et de $\mathrm{PGL}(n,k)$ lorsque k est un corps fini [CG13] p.250.

- ⋆ $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ tandis que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ [CG13] p.257.
- ⋆ $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ ce qui entraîne que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ [CG13] p.257.
- Remarque : Cette dernière action donne un plongement de $\mathfrak{S}_5$ dans $\mathfrak{S}_6$ et cette action s'identifie à l'action les 6 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$ [CG13] p.258.

Développements

1. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
2. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.
3. Loi de réciprocité quadratique.

Leçon 102

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Professeur encadrant : Alexandre Bellis.

Remarques du Jury

Cette leçon est encore abordée de façon élémentaire sans réellement expliquer où et comment les nombres complexes de modules 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations). Il ne faut pas non plus oublier la partie groupe de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent (par exemple l'alternative "sous-groupes denses versus sous-groupes monogènes"). On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbb{Q}[i]$, et les racines de l'unité qui y appartiennent.

Squelette du plan

1. Nombres complexes de module 1.
   1.1 Propriétés algébriques.
   - Groupe $\mathbb{S}^1$ des nombres complexes de module 1 comme noyau du morphisme module [AF87] p.226.
   - Isomorphisme de groupes entre $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{C}^*$ [AF87] p.226.
   - Morphisme de groupes entre $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec l'exponentielle [AF87] p.226.
   - Remarque : L'exponentielle servira par la suite à définir les fonctions sin et cos.
   - $\mathbb{S}^1$ est un sous-groupe compact et connexe de $\mathbb{C}^*$.

   1.2 Paramétrisations.
   - Fonctions cos et sin [AF87] p.227.
   - Formule de De Moivre [AF87] p.227.
   - Formules d'Euler [AF87] p.227.
   - Applications : Linéarisation de $\cos^n$, expression de $\cos(n.)$ comme polynôme en cos [AF87] p.228 et p.229.
   - Paramétrisation rationnelle de $\mathbb{S}^1$ [Com98] p.273.
   - Application : Résolution de l'équation de Diophante [Com98] p.273.

   1.3 Angles orientés.
   - Action de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ [CG13] p.159.
   - Relation d'équivalence sur les éléments de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ [Aud06] p.74.
   - Angles Orientés et non orientés [Aud06] p.74 et [CG13] p.159.
   - Mesure des angles orientés [Aud06] p.78.
2. Sous-groupes de $\mathbb{S}^1$.
   2.1 Sous-groupes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{S}^1$.
   - Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ [FGN03] p.29.
   - Application : Les sous-groupes de $\mathbb{S}^1$ sont monogènes ou denses [FGN03] p.29.

   2.2 Racines de l'unité.
   - Groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-èmes de l'unité [Com98] p.59.
   - Isomorphisme avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.60.
   - Racines primitives n-èmes de l'unité [Com98] p.59.

- Ordre des éléments de $\mathbb{U}_n$, générateurs et nombre de générateurs [Com98] p.59.
- ⋆ Générateurs de $\mathbb{U}_{18}$ [Com98] p.60.
- Sous-groupes de $\mathbb{U}_n$ [Com98] p.62.
- ⋆ Eléments d'ordre 6 dans $\mathbb{U}_{30}$ [Com98] p.62.
- Application : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ [Per96] p.81.
- Racines de l'unité dans les $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ [Ort04] p.169.

3. Cyclotomie.

3.1 Polynômes cyclotomiques.

- Polynôme cyclotomique [Per96] p.80.
- Remarque : le degré du n-ième polynôme cyclotomique est $\varphi(n)$ [Per96] p.80.
- Lien entre $X^n - 1$ et les polynômes cyclotomiques [Per96] p.80.
- Remarque : On retrouve la relation $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ en considérant les degrés [Per96] p.81.
- ⋆ $\phi_3 = X^2 + X + 1$ et $\phi_4 = X^2 + 1$ [Per96] p.81.
- Les polynômes cyclotomiques sont à coefficients entiers [Per96] p.81.
- Théorème de Kronecker [FGN01] p.213.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques. [Per96] p.82.
- Remarque : Les polynômes cyclotomiques peuvent être réductibles sur tous les corps finis comme le montre par exemple $\phi_8 = X^4 + 1$ [Per96] p.84 et [FG97] p.187.
- ⋆ Construction du pentagone régulier [Ort04] p.166.

3.2 Corps cyclotomiques.

- Degré d'un corps cyclotomique [Per96] p.83.
- Intersection des corps cyclotomiques [Per96] p.83.

4. Nombres complexes de module 1 et caractères.

3.1 Groupe dual.

- Caractère d'un groupe abélien fini et groupe dual [Pey04] p.2.
- Les éléments du dual sont à valeurs dans le groupe des racines de l'unité [Pey04] p.2.
- Application : Le groupe dual est un groupe fini [Pey04] p.3.
- Un groupe et son bidual sont canoniquement isomorphes [Col11] p.251.
- Structure des groupes abéliens de type fini [Col11] p.252.

3.2 Transformée de Fourier discrète.

- Echantillon d'un signal temporel [Pey04] p.64.
- Transformée de Fourier discrète [Pey04] p.64.
- Liens avec la transformée de Fourier sur un groupe abélien fini [Pey04] p.64.
- Transformée de Fourier inverse [Pey04] p.65.
- Isomorphisme d'espaces vectoriels [Pey04] p.65.
- Principe de diviser pour régner : Séparation des indices pairs et impaires [Pey04] p.66.
- Parties gauche et droite du vecteur transformé par transformée de Fourier [Pey04] p.67.
- Remarque : L'algorithme naïf de calcul de la transformée de Fourier d'un échantillon de taille n est en $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ tandis qu'avec la transformée de Fourier rapide, elle est en $\mathcal{O}\left(n \lg(n)\right)$ [Pey04] p.68.
- Multiplication rapide de polynômes [CLRS10] p.835.

Développements

1. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
2. Multiplication rapide de polynômes.
3. Structure des groupes abéliens finis.
4. Théorème de Gauss-Wantzel.

Leçon 103

Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple). On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions.

Remarques

1. Le théorème de Lagrange est hors-sujet dans le plan.
2. Eviter de faire une partie sur le produit direct.
3. Ne pas parler de la simplicité de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ sans parler des autres $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et des $\mathrm{PSO}(n,\mathbb{R})$. On peut par exemple démontrer que $\mathrm{PSO}(4,\mathbb{R})$ est isomorphe au produit direct $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Exercices et questions

1. Démontrer qu'un sous-groupe d'indice 2 est distingué.

   Réponse : Avec des notations classiques, on montre $gH = Hg$ facilement.

2. Expliquer le rapport entre les groupes diédraux et la géométrie. Ces groupes sont ils simples ?

   Réponse : D_n est le groupe des isométries qui conserve les sommets d'un polygone régulier à n sommets. Il n'est pas simple car le sous-groupe des rotations est distingué. Si s est une symétrie, $\langle s \rangle$ n'est distingué que pour $n = 2$ car rsr^{-1} est distinct de s et de l'identité, r étant une rotation.

3. Montrer qu'un groupe cyclique d'ordre n est isomorphe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   Réponse : On considère un générateur de G et on regarde le noyau du morphisme $\mathbb{Z} \to G$.

4. Simplicité des $\mathfrak{A}_n$ pour $n \in \{3,4\}$.

   Réponse : $\mathfrak{A}_3$ est simple car isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. C'est le groupe des isométries positives qui préservent les sommets d'un triangle. Comme V_4 est distingué dans $\mathfrak{A}_4$, ce dernier n'est pas simple. V_4 est le groupe des isométrie qui préservent les sommets d'un rectangle.

5. Un groupe infini simple n'a pas de sous-groupe d'indice fini.

   Réponse : On raisonne par contraposée. Soit G un groupe infini admettant un sous-groupe H d'indice fini n. On fait agir G sur G/H par translation ce qui induit un morphisme $G \to \mathfrak{S}_n$. Soit K le noyau de ce morphisme. Si $K = G$, alors G agit trivialement sur G/H ce qui absurde et si K est trivial, alors le morphisme est injectif ce qui est également absurde. En conclusion, K est un sous-groupe distingué non trivial de G, donc G n'est pas simple.

6. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$.

   Réponse : On démontre facilement par l'absurde que ce centre est réduit au singleton $\{\mathrm{id}\}$.

7. Déterminer les entiers n tels que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est simple.

   Réponse : Par théorème de classification des groupes abéliens de type fini, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est simple que si n est un nombre premier.

8. Démontrer que les $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ avec n pair sont simples. Une précision pour $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$?

   Réponse : Si n est pair, alors $\{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ qui n'est donc pas simple. Remarquons également que $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ est abélien.

9. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On considère $H_0 \leq H$ la composante connexe par arcs en l'identité dans H. Montrer que H_0 est distingué dans H.

   Réponse : Soit $g \in H$. Considérons le morphisme de groupes $\phi_g : h \in H_0 \mapsto ghg^{-1} \in H$. Alors ϕ_g est continue sur le connexe par arcs H_0 donc $\phi_g(H_0)$ est une partie connexe par arcs de H. De plus, $\phi_g(H_0)$ contient l'identité donc ϕ_g est à valeurs dans H_0. C'est vrai pour tout $g \in H$ donc H_0 est distingué dans H.

Squelette du plan

1. Notions de sous-groupes distingué et de groupe quotient.

   1.1 Sous-groupes distingués.

   - Sous-groupe distingué [Per96] p.11.
   - ⋆ $\{\mathrm{id}\} \lhd V_4 \lhd \mathfrak{A}_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Int}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$ [Cal14] p.156.
   - ⋆ $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ n'est pas distingué dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [BMP04] p.234.
   - Remarque : Tout les sous-groupes d'un groupe abélien sont distingués [Cal14] p.136.
   - ⋆ Les sous-groupes de Q_8 sont tous distingués mais Q_8 n'est pas abélien [FG97] p.4 ou [Ort04] p.22.
   - Stabilité de $\lhd$ par intersection [Cal14] p.157.
   - ⋆ $\langle(12)(34)\rangle \lhd V_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ mais $\langle(12)(34)\rangle$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_4$.
   - L'image directe de tout sous-groupe distingué par un morphisme de groupe subjective est distingué [Cal14] p.144.
   - L'image réciproque de tout sous-groupe distingué par un homomorphisme est un sous-groupe distingué [Cal14] p.144 ou [Per96] p.35.
   - Application : Un p-groupe a des sous-groupes distingués de tous les ordres admissibles [FG97] p.5.
   - Remarque : La simplicité peut servir à déterminer facilement des noyaux de morphismes [CG13] p.235.

   1.2 Groupes quotients.

   - Classe, ensemble quotient et indice [Cal14] p.71.
   - Si $H \lhd G$, il existe une unique structure de groupe sur G/H [Cal14] p.150.
   - Un sous-groupe est distingué si et seulement si c'est le noyau d'un homomorphisme [Cal14] p.151.
   - ⋆ $\mathfrak{A}_n \lhd \mathfrak{S}_n$ avec la signature [Cal14] p.138.
   - ⋆ $\mathrm{SL}(n,k) \lhd \mathrm{GL}(n,k)$ avec le déterminant [Cal14] p.138.
   - ♮ $Z(G) \lhd G$ avec les automorphismes intérieurs. Par exemple, les automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ sont tous intérieurs pour n entier naturel distinct de 6 [Cal14] p.141.
   - Un sous-groupe d'ordre le plus petit nombre premier divisant l'ordre du groupe est distingué [FG97] p.6.
   - ⋆ Dans D_n, le sous-groupe des rotations est d'indice 2 donc est distingué [Cal14] p.130.
   - Sous-groupes des groupes quotients [Cal14] p.164.
   - Les groupes quotients permettant de déterminer des représentations [Rau00] p.43.

2. Sous-groupes distingués remarquables - Groupes simples.

   2.1 Sous-groupes caractéristiques.

   - Sous-groupe caractéristique [Cal14] p.172.
   - ⋆ Le sous-groupe de Frattini d'un groupe fini est un sous-groupe caractéristique [Deb16] p.28.
   - ⋆ Le sous-groupe de Frattini de $\mathfrak{S}_n$ est trivial [Zav13] p.13.
   - Caractéristique implique distingué [Cal14] p.173.

- ⋆ Réciproque fausse avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- • $\sqsubset$ est transitif et si $H \sqsubset K \lhd G$, alors $H \lhd G$ [Cal14] p.174.

2.2 Le centre d'un groupe.

- • Centre d'un groupe [Cal14] p.27.
- • Le centre est un sous-espace caractéristique [Cal14] p.173.
- ⋆ Le centre d'un groupe abélien est total [Per96] p.13.
- ⋆ Les centres de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ sont triviaux [Per96] p.13.
- ⋆ Centre de D_n selon la parité de n [Ort04] p.22.
- ⋆ Le centre de Q_8 est $\{-1, 1\}$ [Ort04] p.22.
- ⋆ Le centre de $\mathrm{GL}(E)$ est composé des homothéties. Celui de $\mathrm{SL}(E)$ est composé des homothéties de déterminant 1 [Per96] p.98.
- ⋆ Le centre de $O(n, \mathbb{R})$ est $\{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$ et celui de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est trivial ou $\{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$ selon la parité de n [Per96] p.142.
- • Si le quotient d'un groupe par son centre est abélien, ce groupe est monogène [Cal14] p.142.

2.3 Le groupe dérivé d'un groupe.

- • Groupe dérivé [Cal14] p.171.
- • Le groupe dérivé est un sous-groupe caractéristique [Cal14] p.173.
- • L'abélianisé $G/D(G)$ plus grand quotient abélien de G [Cal14] p.171.
- ⋆ Le groupe dérivé d'un groupe abélien est trivial [Per96] p.13.
- ⋆ Le groupe dérivé de D_n est le groupe engendré par le carré de la rotation [Ort04] p.22.
- ⋆ Le groupe dérivé de Q_8 est $\{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$ et son abélianisé est isomorphe à V_4 [Ort04] p.22.
- ⋆ Le groupe dérivé de $\mathrm{GL}(n, k)$ est $\mathrm{SL}(n, k)$ sauf si $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$. Celui de $\mathrm{SL}(n, k)$ est $\mathrm{SL}(n, k)$ sauf si $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$ ou si $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_3$. Leurs abélianisé seront déterminés par la suite [Per96] p.101.
- ⋆ Le groupe dérivé de $O(n, \mathbb{R})$ est $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ pour n entier supérieur à 2 tandis que celui de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ pour n entier supérieur à 3 [Per96] p.144.
- ♮ Théorème de Frattini [Deb16] p.240.
- • Remarque : Les sous-groupes distingués permettent le dévissage des groupes. Pour étudier un groupe, on se ramène à étudier un sous-groupe distingué et le groupe quotient associé, d'où l'utilité de la notion de groupe simple que l'on verra par la suite [Per96] p.12.

2.4 Groupes simples.

- • Groupe simple [Cal14] p.151.
- ⋆ Les $\mathfrak{A}_n$ sont simples pour n distinct de 5 [Per96] p.28.
- ⋆ Le seul sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ non trivial est $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ [Per96] p.28.
- ⋆ Les groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$ sont $\mathfrak{A}_n$ pour n supérieur à 2 et n supérieur à 5 respectivement [Per96] p.28.
- ⋆ Si n est pair, $\{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\} \lhd \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ qui n'est donc pas simple.
- • Les groupes simples abéliens sont les cycliques d'ordre premier [Cal14] p.15.
- ⋆ Les $\mathrm{PSL}(n, k)$ sont simples sauf pour $n = 2, k = \mathbb{F}_2$ et $n = 2, k = \mathbb{F}_3$ [Per96] p.102.
- ⋆ $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ est simple [CG13] p.239.
- ⋆ Les $\mathrm{PSO}(n, \mathbb{R})$ sont simples pour $n = 3$ ou n entier supérieur à 5 [Per96] p.150.

3. Les théorèmes d'isomorphisme.

3.1 Le premier théorème d'isomorphisme.

- • Propriété universelle du quotient [Cal14] p.162.

- Corollaire : premier théorème d'isomorphisme [Cal14] p.163.
- ⋆ $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec la signature.
- ⋆ $\mathrm{GL}(n,k)/\mathrm{SL}(n,k) \simeq k^*$ avec le déterminant.
- ⋆ $G/\mathrm{Z}(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$ avec les automorphismes intérieurs.
- ⋆ Pour n entier naturel distinct de 6, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ [Per96] p.30.
- Tout morphisme d'un groupe dans un groupe abélien se factorise par l'abélianisé [BMP04] p.236.
- Application : Théorème de Frobenius-Zolotarev [BMP04] p.251.

3.2 Le deuxième théorème d'isomorphisme et les théorèmes de Sylow.

- Deuxième théorème d'isomorphisme [Tau99] p.72.
- Applications : les théorèmes de Sylow [Tau99] p.73.
- Un p-Sylow unique est distingué [Per96] p.19.
- ⋆ Tout groupe d'ordre $p^\alpha q$ avec p et q des nombres premiers et α un entier naturel non nul est non simple [Ort04] p.57.

3.3 Le troisième théorème d'isomorphisme.

- Troisième théorème d'isomorphisme [Cal14] p.170.
- ⋆ N'importe quel exemple avec des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. Tables de caractères et sous-groupes distingués.
   - ♮ Sous-groupes distingués et noyaux de caractères [Pey04] p.231.
   - Corollaire : Critère de simplicité [Pey04] p.232.
   - ⋆ Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ sont $\mathfrak{A}_4$ et $\langle (12)(34) \rangle$ [Pey04] p.232.

Développements

1. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
2. Sous-groupes distingués et noyaux de caractères.
3. Théorème de Frattini.

Leçon 104
Groupes finis. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

On attend des candidats de savoir manipuler correctement les éléments de quelques structures usuelles ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.). Par exemple, proposer un générateur simple de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ voire tous les générateurs, calculer aisément un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples.
Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. On peut par exemple étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place. Il est utile de connaître les groupes diédraux, et pour les candidats aguerris, les spécificités de groupes plus exotiques comme le groupe quaternionique. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

Remarque

Mettre des exemples assez variés.

Exercices et questions

1. $\mathfrak{S}_4$ est-il simple ?

   Réponse : Non puisque $\{\mathrm{id}\} \lhd V_4 \lhd \mathfrak{A}_4 \lhd \mathfrak{S}_4$. On a même $V_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ car deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même type. De plus, $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$.

2. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ agit sur un ensemble à 3 éléments.

   Réponse : $\mathfrak{S}_4$ contient 3 2-Sylow et $\mathfrak{S}_4$ agit dessus par conjugaison. Il y a 8 3-cycles donc au moins 2 2-Sylow. Un 2-Sylow unique de $\mathfrak{S}_4$ a 8 éléments et contient tous les éléments d'ordre 2 et d'ordre 4. On obtiendrait en tout 17 éléments ce qui est impossible. Les ordres des éléments de $\mathfrak{S}_4$ sont 1, 2, 3 et 4.

3. Construire un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$.

   Réponse : Soit g un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$. Par classification des groupes d'ordre 8, G est isomorphe à D_4 car il n'est pas abélien et pas isomorphe à Q_8. Alors $G = \langle (13), (1234) \rangle$ convient.

4. Y a t-il des groupes cycliques qui ne sont pas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *a priori* ?

   Réponse : Les $\mathbb{F}_q^*$ et le groupe des racines de l'unité par exemple.

Squelette du plan

1. Généralités sur les groupes finis - Premiers exemples.

   1.1 Groupe fini - Notion d'ordre.

   - Un groupe fini est un groupe dont l'ensemble sous-jacent est de cardinal fini [Cal14] p.9.
   - ⋆ Le groupe des inversibles d'un anneau fini est un groupe fini.
   - ⋆ Groupe des quaternions. Tous ses sous-groupes sont distingués mais il n'est pas abélien car son centre est $\{-1, 1\}$ [Rau00] p.60 et [FG97] p.5.
   - ⋆ Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [CG13] p.206.
   - Ordre d'un élément comme ordre du sous-groupe qu'il engendre.

   1.2 Théorème de Lagrange.

   - Classes à droite et à gauche modulo un sous-groupe [Cal14] p.72.

- Equipotence des classes à gauche et des classes à droite. De plus, si le sous-groupe mis en jeu est fini, les classes à gauche et à droites sont finies de même cardinal que ce sous-groupe [Cal14] p.75.
- Théorème de Lagrange [Cal14] p.77.
- Corollaire : l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.
- Remarque : On verra que la réciproque est fausse.

1.3 Les groupes diédraux.

- Groupe diédral comme groupe des isométries du plan qui préserve un polygone régulier [Cal14] p.121.
- Les D_n sont finis d'ordre $2n$ [Cal14] p.121.
- Représentation par générateurs et relations.
- $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [Per96] p.23.
- Centre de D_n selon la parité de n [Ort04] p.16.
- Groupe dérivé des D_n [Ort04] p.16.
- Remarque : D_4 n'est pas isomorphe à Q_8 car Q_8 n'a qu'un élément d'ordre 2 alors que D_4 en a 5 [Cal14] p.126.
- ⋆ Table de caractère de D_6 [Ser98] p.52.

2. Groupes abéliens finis.

2.1 Groupes cycliques.

- Groupe cyclique [Com98] p.59.
- ⋆ Le groupe des racines de l'unité est cyclique [Com98] p.59.
- Tout groupe cyclique est isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.60.
- Isomorphismes entre les groupes cycliques [Cal14] p.95.
- Ordre des éléments d'un groupe cyclique [Com98] p.59.
- Générateurs des groupes cycliques [Cal14] p.103.
- Fonction indicatrice d'Euler [Cal14] p.104 ou [Com98] p.59.
- Nombre de générateurs d'un groupe cyclique [Cal14] p.104 ou [Com98] p.59.
- ⋆ Tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif est cyclique. C'est vrai en particulier pour le groupe multiplicatif de tout corps fini [Per96] p.74.
- ⋆ $\mathbb{F}_{31}^*$ admet 8 générateurs qui sont $3, 11, 12, 13, 17, 21, 22$ et 24 [Ort04] p.135.
- Application : Théorème de Frobenius-Zolotarev [BMP04] p.251.
- Sous-groupes des groupes cycliques [Com98] p.62.
- Application : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ [Com98] p.63.
- ⋆ Table de caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ [Ser98] p.51.

2.2 Produit de groupes cycliques.

- Théorème chinois [Cal14] p.107.
- ⋆ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
- Un produit de deux groupes est cyclique si et seulement si les deux groupes sont cycliques d'ordre premiers entre eux [Cal14] p.109 ou [Com98] p.63.
- ⋆ Le groupe de Klein n'est pas cyclique [Cal14] p.107.
- Générateurs d'un produit de groupes cycliques lorsque ce produit est cyclique [Cal14] p.110 et [Com98] p.63.
- Application : La fonction indicatrice d'Euler est semi-multiplicative [Cal14] p.110[Com98] p.64.
- Expression de la fonction indicatrice d'Euler [Cal14] p.111.

2.3 Automorphismes des groupes cycliques.

- Les générateurs du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Cal14] p.105.
- $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ [Per96] p.24.
- Structure de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ avec $p \geq 3$ premier et $\alpha \geq 2$ entier [Per96] p.25.
- Structure des $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^*$ avec α un entier non nul [Per96] p.26.
- Remarque : Grâce au lemme chinois, on a établi la structure de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ [Per96] p.27.

2.4 Structure des groupes abéliens finis.

- Structure des groupes finis abéliens [Com98] p.66.
- Suite des invariants d'un groupe abélien fini [Cal14] p.360 ou [Com98] p.67
- Dans tout groupe fini abélien, il existe un élément dont l'ordre est le PPCM des ordres des éléments de ce groupe [Com98] p.67.
- Sous-groupes des groupes abéliens finis [Com98] p.67.
- ⋆ A isomorphisme près, il y a 6 groupes abéliens finis d'ordre 600 [Com98] p.68.
- ⋆ Table de caractères du groupe de Klein [Ser98] p.47.

3. Les groupes symétriques et alternés.

3.1 Groupes symétriques.

- Groupe symétrique [Com98] p.79.
- Le centre de $\mathfrak{S}_n$ est trivial [Com98] p.84.
- Support d'une permutation. Deux permutations commutent quand leurs supports sont disjoints [Cal14] p.106.
- Décomposition en produit de cycles à supports disjoints [Com98] p.79.
- Ordre des éléments de $\mathfrak{S}_n$ [Cal14] p.113.
- Décomposition en produit de transpositions [Cal14] p.113.
- $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(1,i)$ [Cal14] p.115.
- $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(i,i+1)$ [Cal14] p.115.

3.2 Quelques interprétations du groupe symétrique.

- $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe des automorphismes de Q_8 [Ort04] p.53.
- En géométrie affine : $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe des isométries positives d'un cube [CG13] p.363 et p.364.
- Isométries du simplexe régulier [FGN10a] p.313.
- ⋆ Application : Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ [Ser98] p.58 et [Rau00] p.47.
- En géométrie projective : $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3)$ [CG13] p.257.

3.3 Signature - Groupes alternés.

- Signature d'une permutation [Cal14] p.115.
- La signature est l'unique morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ [Com98] p.81 ou [Pey04] p.11.
- Groupe alterné comme noyau de la signature [Cal14] p.120.
- $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [Per96] p.23.
- Remarque : Ceci montre que les $\mathfrak{S}_n$ sont non simples pour $n \geq 3$.
- ⋆ Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.
- Le centre de $\mathfrak{A}_n$ est trivial.
- $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$ [Com98] p.82.

- Application : $\mathfrak{A}_4$ est isomorphe au groupe des isométries positives du tétraèdre [CG13] p.363.
- Les $\mathfrak{A}_n$ sont simples pour $n \geq 5$ [Per96] p.28.
- Corollaire : Groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ [Per96] p.28.
- Remarque : $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple car $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$ est distingué dans ce groupe. On a de plus $V_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ [Per96] p.30
- Corollaire : Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 5$ [Per96] p.30.
- Groupe des automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ pour n entier distinct de 6 [Per96] p.30.

4. Sous-groupes de Sylow.

- Mise en place : Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier.

4.1 p-groupes.

- Notion de p-groupe [Cal14] p.210.
- Relation entre l'ordre d'un p-groupe et l'ordre de son centre [Per96] p.17.
- Corollaire : le centre d'un p-groupe est non trivial [Per96] p.16.
- Application : Tout groupe d'ordre d'ordre p^2 est abélien [Cal14] p.185.
- ⋆ Q_8 est un groupe d'ordre 2^3 mais n'est pas abélien.
- ⋆ Sous-groupe de Frattini d'un groupe fini [Deb16] p.5.
- ⋆ Le sous-groupe de Frattini d'un p-groupe est engendré les puissances et les commutateurs.
- Théorème de Frattini [Deb16] p.243.

4.2 Théorèmes de Sylow.

- p-sous-groupe d'un groupe fini [Cal14] p.210.
- Sous-groupes de Sylow d'un groupe fini [Per96] p.18.
- ⋆ Cardinal des $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$. L'ensemble des matrices unipotentes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ est un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ [Per96] p.18.
- ⋆ $\langle (13), (1234) \rangle$ est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$. Il est isomorphe à D_4.
- Théorèmes de Sylow [Per96] p.18 et p.19 ou [Cal14] p.207.
- ⋆ Tout groupe d'ordre $p^\alpha q$ avec p et q des nombres premiers et α un entier naturel non nul est non simple [Ort04] p.57.
- Tout groupe abélien est produit direct de ses sous-groupes de Sylow [Ort04] p.14.

4.3 Classification des groupes d'ordre pq.

- Deux types de groupes d'ordre pq avec p et q deux nombres premiers distincts [Per96] p.28 ou [Com98] p.94.
- ⋆ $\mathfrak{S}_5$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 15 bien que 15 divise 120 [Com98] p.96.

Développements

1. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
2. Sous-groupes distingués et table de caractères.
3. Structure des groupes abéliens finis.
4. Théorème de Frattini.

Leçon 105

Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Professeur encadrant : Felix Ulmer.

Remarques du Jury

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, et, pour les candidats confirmés, dominer les problèmes de dénombrement qui en résultent.
Des dessins ou des graphes illustrent de manière commode ce que sont les permutations.
Par ailleurs, un candidat qui se propose de démontrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ devrait savoir donner des applications à la simplicité d'un groupe.
L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.
Comme pour toute structure algébrique, il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes d'un groupe, par exemple, à ceux du groupe symétrique. On note que les candidats connaissent en général les applications du groupe symétrique aux polyèdres réguliers de l'espace.

Exercices et questions

Existe t-il un sous-groupe d'ordre 6 dans $\mathfrak{A}_4$?

Réponse : Supposons qu'un tel sous-groupe G existe. Comme il est d'indice 2, il est distingué dans $\mathfrak{A}_4$. De plus, $\mathfrak{A}_4/G$ est d'ordre 2 donc est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il est abélien. Ainsi, $D(\mathfrak{A}_4) < G$, c'est absurde à cause des ordres.

Squelette du plan

Groupe symétrique $\mathfrak{S}(E)$ et bijection avec $\mathfrak{S}_n$ [Com98] p.79.

1. Actions de groupes.

   2.1 Notion d'action de groupe.
   - Action d'un groupe sur un ensemble, définitions équivalentes [Per96] p.13.
   - Orbite et stabilisateur d'un point [Per96] p.14.
   - Noyau du morphisme associé à cette action.
   - Action transitive, fidèle [Per96] p.14.

   2.2 Exemples d'actions.
   - Action simplement transitive d'un groupe sur lui-même par translation à gauche [Per96] p.15.
   - Application : Théorème de Cayley [Per96] p.15.
   - Action d'un groupe sur lui-même par conjugaison [Per96] p.15.
   - Centralisateur et classe de conjugaison d'un élément [Per96] p.15.
   - Action d'un groupe sur son quotient par un sous-groupe quelconque par translation [Per96] p.17.
   - Remarque : L'action est non fidèle non général [Per96] p.17.
   - On illustrera l'utilisation de ces différentes actions avec le groupe symétrique.

   2.3 Isomorphismes exceptionnels.
   - ⋆ $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3)$ [CG13] p.257.
   - ⋆ $\mathfrak{S}_5$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$ [CG13] p.257.

2. Structure des groupes symétriques et alternés.
   2.1 Génération de $\mathfrak{S}_n$.
   - Support d'une permutation [Cal14] p.106.
   - Commutation des cycles à supports disjoints [Cal14] p.106.
   - Orbite d'un point suivant une permutation. Lien avec l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1,n]\!]$ [Cal14] p.114.
   - Cycle et transposition [Cal14] p.108 et p.109.
   - Ordre d'un cycle [Cal14] p.109.
   - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints [Per96] p.14 et [Com98] p.79.
   - Ordre des éléments de $\mathfrak{S}_n$ [Cal14] p.113.
   - Décomposition en produit de transpositions [Cal14] p.113.
   - Isométries du simplexe régulier [FGN10a] p.313.
   - $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe d'isométries positives d'un cube [CG13] p.363 et p.364.
   - $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(1,i)$ [Cal14] p.115.
   - $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(i,i+1)$ [Cal14] p.115.
   - $\mathfrak{S}_n$ est engendré par une transposition et un n-cycle.

   2.2 Signature - Groupe alterné.
   - Signature d'une permutation [Cal14] p.115.
   - La signature est l'unique morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ [Com98] p.81.
   - ⋆ Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ [Ser98] p.58 et [Rau00] p.47.
   - Groupe alterné comme noyau de la signature [Cal14] p.120.
   - $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [Per96] p.23.
   - $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les doubles transpositions [Per96] p.11.
   - $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles [Per96] p.11.
   - $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les $(i,i+1,i+2)$ [Com98] p.84.

   2.3 Classes de conjugaison.
   - Classe de conjugaison d'un cycle dans $\mathfrak{S}_n$ [Per96] p.15.
   - Classe de conjugaison d'un élément de $\mathfrak{S}_n$ [Ulm12] p.46.
   - $\mathfrak{A}_n$ agit $(n-2)$-transitivement sur $[\![1,n]\!]$ [Per96] p.16.
   - Classe de conjugaison d'un 3-cycle dans $\mathfrak{A}_n$ pour n entier supérieur à 5 [Per96] p.15.
   - Classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$ [Ulm12] p.73.
   - Remarque : $\mathfrak{A}_3$ est abélien et $\mathfrak{A}_4$ contient 8 3-cycles qui ne sont pas tous conjugués dans $\mathfrak{A}_4$ car ils formeraient une orbite dont le cardinal diviserait 12 [Per96] p.16.

3. Etude des sous-groupes et des automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.
   3.1 Les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$.
   - Tout sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ [Per96] p.30.
   - $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$ [Com98] p.82.
   - Application : $\mathfrak{A}_5$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_4)$ et à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_5)$ [CG13] p.257.
   - Application : $\mathfrak{A}_4$ est isomorphe au groupe d'isométries positives d'un tétraèdre régulier [CG13] p.363.
   - Le sous-groupe de Frattini de $\mathfrak{S}_n$ est trivial [Zav13] p.13.
   - ⋆ Dans $\mathfrak{S}_5$, il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 15 bien que 15 divise 120 [Com98] p.96.
   - ⋆ Treillis des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ [Zav13] p.9.

   3.2 Simplicité.

- Les $\mathfrak{A}_n$ sont simples pour $n \geq 5$ [Per96] p.28.
- Corollaire : Groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ [Per96] p.28.
- Corollaire : Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 5$ [Per96] p.30.
- Remarque : $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple car $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$ est distingué dans ce groupe. On a de plus $V_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ [Per96] p.30.
- Table de caractère de $\mathfrak{A}_4$.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev [BMP04] p.251.
- $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60 [Ort04] p.91.

3.3 Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

- Groupe des automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ pour n entier distinct de 6 [Per96] p.30.
- Conjugaison des stabilisateurs [Per96] p.32.
- Les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués si et seulement si $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ [Per96] p.33.
- $\mathfrak{S}_5$ possède 6 5-Sylow [Per96] p.33.
- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$ et $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$ sont distincts [Per96] p.33.

4. Utilisations en algèbre linéaire.

4.1 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble des polynômes à n variables.

- Définition des polynômes symétriques [RDO93a] p.200 ou [Esc00] p.23.
- ⋆ Le polynôme $X^2 + Y^2 + Z^3$ est symétrique [Gou08] p.79.
- L'ensemble des polynômes symétriques forme une sous-algèbre de $A[X_1, \ldots, X_n]$ [RDO93a] p.200 ou [Esc00] p.23.
- Polynômes symétriques élémentaires [RDO93a] p.201 ou [Esc00] p.24.
- Relations coefficients racines [Gou94] p.78 ou [Esc00] p.24.
- Formules de Newton [FG97] p.184.

4.2 Etude des formes linéaires alternées.

- Formes multi-linéaires alternée antisymétriques [Gou94] p.134.
- Antisymétrie et permutations [Gou94] p.134.
- Remarque : En caractéristique différente de 2, une forme multi-linéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée [Gou94] p.135.
- Espace des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n [Gou94] p.135.
- Déterminant dans une base d'un espace vectoriel [Gou94] p.135.
- Déterminant d'un endomorphisme dans une base [Gou94] p.136.
- Déterminant d'une matrice carrée [Gou94] p.136.
- ⋆ Déterminant de Vandermonde [Gou94] p.137.

Développements

1. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
2. Isométries du simplexe régulier.

Leçon 106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Professeur encadrant : Basile Pillet.

Remarques du Jury

Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $\mathrm{GL}(E)$. Il serait bien que les candidats unifient la présentation de la leçon en faisant correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.).
À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $\mathrm{GL}(E)$? Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral. Certains candidats affirment que $\mathrm{GL}(n,K)$ est dense (et ouvert) dans $\mathcal{M}(n,K)$. Il est judicieux de préciser les hypothèses nécessaires sur le corps K ainsi que la topologie sur $\mathcal{M}(n,K)$.
La présentation du pivot de Gauss et de ses applications se justifient pleinement.
Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n,K)$ et faire le lien entre signature et déterminant. Dans le même ordre d'idée, la théorie des représentations permet d'illustrer, dans les leçons plus robustes, l'omnipotence de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Squelette du plan

Soit k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension n.

1. Le groupe linéaire et le groupe spécial linéaire.

   1.1 Le groupe linéaire.

   - Groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ [Per96] p.95.
   - Isomorphisme à base fixée entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}(n,k)$ [Per96] p.95.
   - Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul [Gri11] p.121.
   - $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sont ouverts et denses dans $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ respectivement.
   - Groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,k)$ comme noyau du déterminant [Per96] p.95.
   - Suite exacte grâce au déterminant [Per96] p.95.
   - Cardinaux de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ et de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F}_q)$ [Per96] p.105 ou [CG13] p.250 et p.251.
   - p-Sylow de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ [Per96] p.18.
   - Remarque : Ce p-Sylow permet de démontrer le premier théorème de Sylow [Per96] p.19.
   - Isomorphisme entre les groupes linéaires [FGN09a] p.182.

   1.2 Génération de $\mathrm{GL}(n,k)$.

   - Dilatations et transvections [Per96] p.96 et p.97.
   - Comportement des transvections par conjugaison [Per96] p.98.
   - Conjugaison des dilatations [Per96] p.100.
   - Conjugaison des transvections [Per96] p.100.
   - Principe du pivot de Gauss [Com98] p.34.
   - Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,k)$ [Per96] p.99.
   - ⋆ Décomposition en produit de transvections d'une matrice de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ [Com98] p.31.
   - Les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(n,k)$ [Per96] p.99.
   - $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ sont connexes par arcs tandis que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a deux composantes connexes [Com98] p.31.

1.3 Centres et groupes dérivés de $\mathrm{GL}(n,k)$.

- Centres de $\mathrm{GL}(n,k)$ et de $\mathrm{SL}(n,k)$ [Per96] p.98.
- Groupes $\mathrm{PGL}(n,k)$ et $\mathrm{PSL}(n,k)$ [Per96] p.99.
- Cardinaux de $\mathrm{PGL}(n,k)$ et de $\mathrm{PSL}(n,k)$ dans le cas où k est fini [Per96] p.105 ou [CG13] p.250.
- Groupes dérivés non pathologiques de $\mathrm{GL}(n,k)$ et de $\mathrm{SL}(n,k)$ [Per96] p.101.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev [BMP04] p.251.

1.4 Sous-groupes de $\mathrm{GL}(n,k)$.

- Matrices de permutation et diagramme commutatif associé [BMP04] p.187.
- Théorème de Burnside [FGN09a] p.185.
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits [Mne06] p.59.
- Remarque : Un rayon optimal est donné par $\sqrt{3}$ [FGN09a] p.186.
- Théorème de Von-Neumann [GT98] p.83.
- ⋆ $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ [Rou09] p.284.

2. Actions sur les espaces de matrices.

2.1 Action par équivalence.

- Action de $\mathrm{GL}(m,k) \times \mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{M}(m,n,k)$ par équivalence [CG13] p.4.
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang [CG13] p.3.
- Cardinal d'un stabilisateur dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.8 et p.49.
- Cardinal d'une orbite dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.9.
- Intérieur de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
- Adhérence de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
- Connexité de l'ensemble des matrices de rang fixé [CG13] p.31.

2.2 Action par conjugaison : Réduction de Frobenius.

- Sous-espaces cycliques [CG13] p.102.
- Caractérisations de cyclicité [CG13] p.103.
- Décomposition de Frobenius [CG13] p.105.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes facteurs invariants [CG13] p.107.
- ⋆ Réduction de Frobenius d'une matrice de taille 5 [CG13] p.109.

2.3 Action par congruence.

- Mise en place : On s'intéresse à l'action de $\mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{S}(n,k)$ pour k valant $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps fini de caractéristique différente de 2.
- Lorsque $k=\mathbb{R}$, les orbites sont caractérisées par la signature. C'est le théorème d'inertie de Sylvester [CG13] p.182.
- Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.206.
- Le stabilisateur de l'identité est appelé groupe orthogonal est noté $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.155.
- Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ [Per96] p.141.
- $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est compact de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est compact connexe [CG13] p.237.
- Réduction des éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ [Gou94] p.256.
- Centres de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ [Per96] p.142.
- Reflexions orthogonales et renversements [Per96] p.125.
- Générations de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ [Per96] p.143 ou [CG13] p.237.
- Simplicité de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ [CG13] p.239.

- Les stabilisateurs des matrices $I_{(p,q)}$ sont notés $\mathrm{O}(p,q)$ [CG13] p.210.
- Les $\mathrm{O}(p,q)$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n(n-1)/2$ [Rou09] p.284.
- ⋆ Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.274.
- Lorsque $k=\mathbb{C}$, les orbites sont caractérisées par le rang [CG13] p.151.
- Lorsque $k=\mathbb{F}_q$, les orbites sont caractérisées par le discriminant [CG13] p.151.
- Remarque : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ agit également par congruence sur $\mathcal{H}(n,\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes [CG13] p.157.

3. Décompositions polaires.
   3.1 Décompositions polaires réelles et hermitiennes.
   - Existence d'une unique racine k-ème pour les matrices symétriques réelles positives et les matrices hermitiennes positives [FGN10a] p.107 et p.173.
   - Décompositions polaires réelles et complexes [CG13] p.202 et [FGN10a] p.179.
   - Extension aux matrices non inversibles [FGN10a] p.128.
   - Application : Norme 2 des matrices inversibles [CG13] p.204.
   - Extension du résultat précédent par densité [CG13] p.205
   - Application : Maximalité du groupe orthogonal [CG13] p.205.
   - ⋆ Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)\times\mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.211.
   - Remarque : On peut établir un homéomorphisme de même nature pour $\mathrm{U}(p,q)$ [CG13] p.216.

   3.2 Décompositions polaires et exponentielle.
   - $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.
   - $\mathcal{H}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}^{++}(n,\mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.
   - Application : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ sont homéomorphes [CG13] p.210.
   - Application : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})\times\mathbb{R}^{n^2}$ sont homéomorphes [CG13] p.210.
4. Actions des groupes de matrices et géométrie.
   4.1 Actions du groupe orthogonal.
   - Action de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
   - Stabilisateur du pôle nord [CG13] p.71.
   - $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
   - Application : $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe [CG13] p.71.
   - Remarque : On montre de la même façon que les groupes $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ sont connexes [CG13] p.72.
   - $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ agissent sur $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ [CG13] p.159.
   - $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)/\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ s'identifie aux angles orientés et $(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)/\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ aux angles non orientés [CG13] p.159.

   4.2 Actions des groupes projectifs.
   - Le noyau de l'action de $\mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ se réduit aux homothéties [CG13] p.41.
   - $\mathrm{PGL}(n,k)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ [CG13] p.41.
   - $\mathrm{PGL}(2,k)$ agit 3-transitivement sur $\mathbb{P}^1(k)$ [CG13] p.295.
   - ⋆ $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ tandis que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ [CG13] p.257.
   - ⋆ $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ ce qui entraîne que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ [CG13] p.257.
   - Remarque : Cette dernière action donne un plongement de $\mathfrak{S}_5$ dans $\mathfrak{S}_6$ et cette action s'identifie à l'action les 6 5-Sylow de $\mathfrak{S}_5$ [CG13] p.258.

Développements

1. Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)\times\mathbb{R}^{pq}$.
2. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$.
3. Théorème de Von-Neumann.

Leçon 107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit, d'une part, savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit, d'autre part, savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et savoir également trouver la table de caractères de certains sous-groupes.
On voit souvent dans les développements qu'un candidat qui sait manier les techniques de base sur les caractères ne sait pas forcément relier ceux-ci aux représentations. Le caractère est un outil puissant, mais il reste un outil, ce n'est pas l'intérêt ultime de la leçon.
Dans le même ordre d'idée, le lemme de Schur est symptomatique d'une confusion : dans le cas où les deux représentations V et V' sont isomorphes, on voit que les candidats confondent isomorphisme de V dans V' avec endomorphisme de V. Par exemple, diagonaliser une application linéaire de V dans V' est une faute avérée, il faut pour cela identifier V et V', ce que le candidat devrait faire de façon consciente et éclairée.

Remarque

Ne pas oublier de parler de transformation de Fourier.

Exercices et questions

1. Quelle est l'intérêt de la notion de caractère ?

   Réponse : Deux représentation sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère. Les caractères caractérisent les représentations.

2. Les caractères sont-ils des morphismes ?

   Réponse : Seulement en dimension 1.

3. Y-a t'il unicité de la décomposition en sous-représentations irréductibles ?

   Réponse : C'est faux pour un espace vectoriel (pas unicité de la décomposition en droites) donc c'est également faux pour la représentation triviale.

4. Que dire d'un groupe dont la table de caractère est à coefficients réels ?

   Réponse : Soit G un tel groupe. Montrons que tous les éléments de G sont conjugués à leur inverse. Soit g un élément de G. $\mathbf{1}_{C(g)}$ est une fonction centrale donc est à valeurs réelles par hypothèse car les caractères forment une base de l'espace des fonctions centrales. Alors

   $$\mathbf{1}_{C(g)}(g^{-1}) = \overline{\mathbf{1}_{C(g)}(g)} = \mathbf{1}_{C(g)}(g) = 1$$

   donc g et g^{-1} sont conjugués.

Squelette du plan

1. Représentations linéaires des groupes finis.

   1.1 Notion de représentation.

   - Représentation d'un groupe par un espace vectoriel. degré d'une représentation. Représentation fidèle [CG15] p.443 ou [Rau00] p.39 ou [Ser98] p.15.
   - Remarque : Les représentations de degré 1 de G sont des morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$ [Ser98] p.16.
   - Représentation triviale [CG15] p.444.
   - ⋆ Représentations de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [CG15] p.444 et [Col11] p.235 et p.236.

- ⋆ $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe des isométries du tétraèdre et au groupe des isométries positives du cube, ce qui en donne une représentation [CG13] p.363 et p.364.
- Remarque : Lorsque G est un groupe fini et ρ une représentation de G, les $\rho(g)$ sont diagonalisables et leurs racines sont des racines de l'unité [Col11] p.237.
- Sous-représentation [CG15] p.443 ou [Rau00] p.41 ou [Ser98] p.17.
- Représentations irréductibles [CG15] p.443 ou [Rau00] p.42.
- ⋆ La représentation de $\mathfrak{S}_3$ par action sur un triangle équilatéral est irréductible [Col11] p.242.
- Remarque : On s'intéressera aux représentations irréductibles dans la partie consacrée à la décomposition des représentations.

1.2 Fabrication de représentations.

- Somme de représentations [CG13] p.444 ou [Rau00] p.42 ou [Col11] p.238.
- Représentation produit [Ser98] p.41.
- Représentation par permutation [CG15] p.458 ou [Col11] p.239.
- ⋆ Représentation régulière [CG15] p.444.
- Représentation duale [CG15] p.445 ou [Col11] p.240.
- Représentation par morphismes [CG15] p.445.
- Représentation par formes bilinéaires [CG15] p.445.
- Utilisation d'un sous-groupe distingué [Rau00] p.41 et p.43.

1.3 Morphismes de représentations.

- Morphismes de représentations [CG15] p.443 ou [Rau00] p.77 ou [Col11] p.240.
- Représentation isomorphes [Rau00] p.41 ou [Col11] p.241.
- Espace des invariants d'une représentation [CG15] p.446.
- Opérateur de moyenne [CG15] p.452 ou [Col11] p.241.
- L'opérateur de moyenne est un morphisme de représentations et un projecteur [CG15] p.452.
- Lemme de Schur [CG15] p.447 ou [Ser98] p.25.

2. Caractère d'une représentation.

2.1 Espace hermitien des fonctions centrales.

- Espace des fonctions centrales [CG15] p.455 ou [Col11] p.246.
- Les fonctions centrales forment une algèbre dont la dimension et le nombre de classes de conjugaison [CG15] p.455.
- Produit sur l'espace des fonctions complexes définies sur un groupe [CG15] p.455 ou [Rau00] p.49.
- Espace vectoriel hermitien des fonctions centrales [CG15] p.455 ou [Rau00] p.49 [Ser98] p.24.
- Caractère d'une représentation [CG15] p.453 ou [Rau00] p.45 ou [Ser98] p.23.
- ⋆ Le seul caractère non trivial de $\mathfrak{S}_n$ est la signature [Pey04] p.11.
- Les caractères sont des fonctions centrales [CG15] p.455.
- Deux représentations isomorphes ont même caractères [CG15] p.453.
- Produit scalaire des caractères [CG15] p.456.
- Orthogonalité des caractères irréductibles [CG15] p.456.

2.2 Caractères des représentations remarquables.

- Caractère de la représentation somme directe [CG15] p.454 ou [Ser98] p.24.
- Caractère de la représentation produit [Ser98] p.41.

- Caractère de la représentation morphisme [CG15] p.454 ou [Col11] p.240.
- Caractère de la représentation duale [CG15] p.454 ou [Col11] p.240.

2.3 Structure des groupes abéliens finis.

- Caractère d'un groupe abélien fini et groupe dual [Pey04] p.2.
- Les éléments du dual sont à valeurs dans le groupe des racines de l'unité [Pey04] p.2.
- Application : Le groupe dual est un groupe fini [Pey04] p.3.
- Un groupe et son bidual sont canoniquement isomorphes [Col11] p.251.
- Structure des groupes abéliens de type fini [Col11] p.252.

3. Décomposition des représentations en somme de représentations irréductibles.

3.1 Représentations irréductibles - Théorème de Maschke.

- Le degré d'une représentation irréductible divise l'ordre du groupe [Col11] p.265 ou [Rau00] p.66.
- Représentations irréductible d'un produit de groupes [Ser98] p.41.
- Les représentations irréductibles d'un groupe sont toutes de degré 1 si et seulement si ce groupe est abélien [Ser98] p.40.
- $\star$ Représentations irréductibles des groupes cycliques [Pey04] p.4.
- Remarque : On obtient les représentations irréductibles des groupes finis abéliens grâce au théorème de classification de ces groupes [Ser98] p.41.
- $\star$ L'abélianisé du groupe des quaternions fournit quatre représentations irréductibles de degré 1 car il est isomorphe au groupe de Klein [Rau00] p.60.
- Corollaire : Majoration du degré d'une représentation connaissant l'indice d'un sous-groupe abélien [Ser98] p.40.
- $\star$ Les groupes diédraux contiennent un sous-groupe cyclique d'indice 2 donc leurs représentations irréductibles sont de degré 1 ou 2 [Ser98] p.40.
- Théorème de Maschke [CG15] p.448 ou [Rau00] p.42.
- Remarque : Il n'y a pas unicité de cette décomposition, par exemple pour la représentation triviale.

3.2 Décomposition en somme de représentations irréductibles.

- Décomposition d'une représentation en somme de représentations irréductibles [CG15] p.450 et p.456 ou [Ser98] p.28.
- $\star$ Décomposition de la représentation de $\mathfrak{S}_3$ sur l'ensemble des polynômes à trois variables homogènes de degré 2.
- Corollaire : Deux représentations de même caractère sont isomorphes [Ser98] p.29 ou [Col11] p.248.
- Norme d'un caractère [CG15] p.457.
- Critère d'irréductibilité par le produit scalaire [Ser98] p.29 ou [Col11] p.248.
- Cas particulier où la norme vaut 2 ou 3 [CG15] p.457.

3.3 Décomposition de la représentation régulière.

- Caractère de la représentation régulière [CG15] p.465 ou [Col11] p.239.
- Décomposition de la représentation régulière [CG15] p.465 ou [Col11] p.249.
- Formule de Burnside [CG15] p.467 ou [Col11] p.249.
- Les caractères irréductibles forment une base de l'espace des fonctions centrales [CG15] p.467.
- Il y autant de caractères irréductibles à isomorphisme près que de classes de conjugaison [CG15] p.467.

4. Table de caractère.

4.1 Caractères irréductibles et classes de conjugaison.

- Rappel : Il y autant de classes de conjugaison que de caractères irréductibles [Rau00] p.49 ou [Ser98] p.32.
- Table de caractère d'une représentation [CG15] p.469 ou [Col11] p.252.
- Orthogonalité des lignes (en affectant le nombre d'éléments de la classe de conjugaison) et des colonnes [Pey04] p.226.

⋆ Table de caractères de $\mathfrak{S}_3$ [Ser98] p.33.

⋆ Table de caractères de Q_8 [Rau00] p.60.

⋆ Table de caractère de D_4. Elle est identique à celle de Q_8 mais ces groupes ne sont pas isomorphes [Rau00] p.59 et p.60.

4.2 Exemples de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.

⋆ Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ [Rau00] p.47.

⋆ Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$ [Rau00] p.58.

4.3 Application aux sous-groupes distingués.

- Sous-groupes distingués et noyaux de caractères [Pey04] p.231.
- Corollaire : Critère de simplicité [Pey04] p.232.

⋆ Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ sont $\mathfrak{A}_4$ et $\langle (12)(34) \rangle$ [Pey04] p.232.

Développements

1. Sous-groupes distingués et table de caractère.
2. Structure des groupes abéliens finis.

Leçon 108
Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

C'est une leçon qui demande un minimum de culture mathématique. Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.
Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable.

Remarques

1. Faire une partie sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ peut être bien.
2. Parler de l'action sur le demi plan de Poincaré.
3. Mettre le groupe circulaire peut-être dangereux si on n'est pas au point.
4. Les réseaux ont toute leur place.

Exercices et questions

1. Montrer que $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

   Réponse : L'image de 1 doit être un inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Le sous-groupes d'un groupe de type fini sont-ils de type fini ?

   Réponse : $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est de type fini mais contient des groupes libres à une infinité de générateurs.
3. Donner l'exemple d'un sous-groupe dense et de type fini.

   Réponse : $\langle 1, \sqrt{2}\rangle$ est de type fini et dense dans $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

   Réponse : Non car $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas monogène.
5. Montrer que le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

   Réponse : On restreint l'action du groupe des isométries sur les sommets.
6. Montrer que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est engendré par les transvections.

   Réponse : On procède par récurrence sur la dimension.

Squelette du plan

1. Génération d'un groupe - Groupes diédraux.
   1.1 Parties génératrices d'un groupe.
   - Partie génératrice d'un groupe [Per96] p.10.
   - Remarque : Les parties génératrices permettent de déterminer les morphismes de groupes.
   - ⋆ Groupe dérivée [Per96] p.13.
   - Groupe de type fini [Cal14] ou [Rau00] p.23.
   - ⋆ Le sous-groupe de Frattini d'un p-groupe est engendré par les puissances p-ièmes et les commutateurs [Deb16] p.5.
   - Théorème de Frattini [Deb16] p.243.

   1.2 Exemple de représentation par générateurs et relations : Les groupes diédraux.
   - Groupe diédral comme groupe des isométries du plan qui préserve un polygone régulier [Cal14] p.121.

- Les D_n sont finis d'ordre $2n$ [Cal14] p.121.
- Représentation par générateurs et relations.
- Centre de D_n selon la parité de n [Ort04] p.16.
- Groupe dérivé des D_n [Ort04] p.16.

2. Groupes abéliens de type fini.

   2.1 Groupes monogènes.

   - Groupe monogène [Cal14] p.29 ou [Rau00] p.17.
   - Un groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Cal14] p.94.
   - ⋆ Le groupe des racines de l'unité est cyclique [Com98] p.59.
   - Isomorphismes entre les groupes monogènes infinis et les groupes cycliques respectivement [Cal14] p.95.
   - Ordre des éléments d'un groupe cyclique [Com98] p.59.
   - Générateurs des groupes monogènes [Cal14] p.103.
   - Fonction indicatrice d'Euler [Cal14] p.104 ou [Com98] p.59.
   - Nombre de générateurs d'un groupe cyclique [Cal14] p.104 ou [Com98] p.59.
   - ⋆ Tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif est cyclique. C'est vrai en particulier pour le groupe multiplicatif de tout corps fini [Per96] p.74.
   - ⋆ $\mathbb{F}_{31}^*$ admet 8 générateurs qui sont $3, 11, 12, 13, 17, 21, 22$ et 24 [Ort04] p.135.
   - Application : Théorème de Frobenius-Zolotarev [BMP04] p.251.
   - Les générateurs du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Cal14] p.105.
   - ⋆ $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ [Per96] p.24.

   2.2 Produit direct de groupes cycliques.

   - Théorème chinois [Cal14] p.107.
   - ⋆ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
   - Un produit de deux groupes est cyclique si et seulement si les deux groupes sont cycliques d'ordre premiers entre eux [Cal14] p.109 ou [Com98] p.63.
   - ⋆ Le groupe de Klein n'est pas cyclique [Cal14] p.107.
   - Générateurs d'un produit de groupes cycliques lorsque ce produit est cyclique [Cal14] p.110 et [Com98] p.63.
   - Application : La fonction indicatrice d'Euler est semi-multiplicative [Cal14] p.110[Com98] p.64.
   - Expression de la fonction indicatrice d'Euler [Cal14] p.111.

   2.3 Structure des groupes abéliens de type fini.

   - Structure des groupes abéliens de type fini [Cal14] p.360.
   - Corollaire : Structure des groupes finis abéliens [Com98] p.67.
   - Suite des invariants d'un groupe abélien fini [Cal14] p.360 ou [Com98] p.67.
   - Dans tout groupe fini abélien, il existe un élément dont l'ordre est le PPCM des ordres des éléments de ce groupe [Com98] p.67.
   - Sous-groupes des groupes abéliens finis, composantes primaires [Com98] p.68.
   - ⋆ A isomorphisme près, il y a 6 groupes abéliens finis d'ordre 600 [Com98] p.68.

3. Groupes symétriques et alternés.

   3.1 Générateurs du groupe symétrique.

   - Groupe symétrique [Com98] p.79.
   - Décomposition en produit de cycles à supports disjoints [Com98] p.79.

- Décomposition en produit de transpositions [Cal14] p.113.
- ⋆ $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe des isométries d'un tétraèdre régulier et au groupe des isométries positives d'un cube [CG13] p.363 et p.364.
- $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(1, i)$ [Cal14] p.115.
- $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(i, i+1)$ [Cal14] p.115.

3.2 Signature d'une permutation - Groupe alterné.

- Signature d'une permutation [Cal14] p.115.
- La signature est l'unique morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ [Com98] p.81.
- Groupe alterné comme noyau de la signature [Cal14] p.120.
- Remarque : Ceci montre que les $\mathfrak{S}_n$ sont non simples pour $n \geq 3$.
- $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les doubles transpositions [Per96] p.11.
- $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles [Per96] p.11.
- $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les $(i, i+1, i+2)$ [Com98] p.84.
- Les $\mathfrak{A}_n$ sont simples pour $n \geq 5$ [Per96] p.28.
- Corollaire : Groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$ [Per96] p.28.
- Remarque : $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple car $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$ est distingué dans ce groupe. On a de plus $V_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ [Per96] p.30
- Corollaire : Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 5$ [Per96] p.30.
- Groupe des automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ pour n entier distinct de 6 [Per96] p.30.

4. Générateurs du groupe linéaire et de ses sous-groupes.

4.1 Transvections et Dilatations.

- Mise en place : On considère E un espace vectoriel.
- Caractérisations des dilatations [Per96] p.96.
- Caractérisations des transvections [Per96] p.97.
- Méthode du pivot de Gauss [Com98] p.34.
- Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$ [Per96] p.99.
- ⋆ Génération de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ [FGN09a] p.195.
- $\mathrm{SL}(E)$ est connexe par arcs [Com98] p.31 ou [FGN09a] p.177.
- Corollaire : $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs [FGN09a] p.238.
- Les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$ [Per96] p.99.
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs [Com98] p.31.
- Groupes dérivés non pathologiques de $\mathrm{SL}(E)$ et $\mathrm{GL}(E)$ [Per96] p.101.

4.2 Retournements et Renversements.

- Mise en place : On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
- Espaces propres d'une symétrie [Per96] p.125.
- Reflexion orthogonale [Per96] p.125.
- Renversement orthogonal [Per96] p.125.
- Tout élément de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est produit d'au plus n reflexions [Per96] p.143.
- Tout élément de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est produit d'au plus n renversements [Per96] p.143.
- Groupes dérivés de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ [Per96] p.145.
- Simplicité de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ [CG13] p.239.

Développements

1. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.
2. Théorème de Frattini.

Leçon 109
Représentations de groupes finis de petit cardinal.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une leçon où le matériel théorique doit figurer, pour ensuite laisser place à des exemples. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal... Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes et non réelles, a priori. Pour prendre un exemple ambitieux, la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ demande des renseignements sur l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

Remarque

Utiliser un quotient pour déterminer une table de caractère est plus utile qu'un sous-groupe car il donne toute une ligne et pas seulement une sous-matrice.

Exercices et questions

1. Pourquoi a t-on orthogonalité des colonnes dans une table de caractère ?

   Réponse : Vient du fait que les caractère forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.
2. La table de caractère de $\mathfrak{S}_4$ est à coefficients entiers. Est-ce une généralité ?
   Réponse : Pour les $\mathfrak{S}_n$ oui mais c'est faux en général.
3. Donner la table de caractère de $\mathfrak{A}_4$.
   Réponse : On commence par s'intéresser à $\mathfrak{A}_4/D(\mathfrak{A}_4)$. Comme $D(\mathfrak{A}_4)$ est isomorphe au groupe de Klein, ce quotient est de cardinal 3 et il est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Or la table de caractère de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0	1	2
$\mathbf{1}$	1	1	1
$\overline{\chi}_1$	1	j	j^2
$\overline{\chi}_1'$	1	j^2	j

   et les caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donnent des représentation de degré 1 de $\mathfrak{A}_4$. De plus, il y a 4 classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_4$, donc on en déduit la table suivante :

$\mathfrak{A}_4$	id	(123)	(132)	$(12)(34)$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1
$\overline{\chi}_1$	1	j	j^2	1
$\overline{\chi}_2$	1	j^2	j	1
$\overline{\chi}_3$	3	0	0	-1

4. Les représentations irréductibles d'un quotient donnent-elles des représentations irréductibles du groupe ?

   Réponse : Oui, c'est assez immédiat.
5. On considère l'action par permutation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Elle induit une action sur A_d l'ensemble des polynômes homogènes de degré d. Donner la décomposition de cette représentation en somme de représentations irréductibles pour $n = 3$ et $d \in \{1, 2, 3\}$.

   Réponse : On cherche des sous-représentations puis sur chacune de d'entre elles, on cherche une représentation remarquable.

Squelette du plan

1. Eléments de théorie des représentations.

- Mise en place : Dans cette première partie, on introduit la théorie que l'on illustre par des exemples dans les sections suivantes.

1.1 Notion de représentation.

- Représentation d'un groupe par un espace vectoriel. degré d'une représentation. Représentation fidèle [CG15] p.443 ou [Rau00] p.39 ou [Ser98] p.15.
- Représentation triviale [CG15] p.444.
- Sous-représentation [Rau00] p.41 ou [Ser98] p.17.
- Représentations irréductibles [Rau00] p.42.
- Théorème de Maschke [CG15] p.448 ou [Rau00] p.42.
- Le degré d'une représentation irréductible divise l'ordre du groupe [Col11] p.265 ou [Rau00] p.66.
- Somme de représentations [CG13] p.444 ou [Rau00] p.42 ou [Col11] p.238.
- Représentation produit [Ser98] p.41.
- Représentation par permutation [CG15] p.458 ou [Col11] p.239.
- ⋆ Représentation régulière [CG15] p.444.
- Représentation duale [CG15] p.445 ou [Col11] p.240.
- Représentation par morphismes [CG15] p.445.
- Représentation par formes bilinéaires [CG15] p.445.
- Utilisation d'un sous-groupe distingué [Rau00] p.41 et p.43.
- Morphismes de représentations [CG15] p.443 ou [Rau00] p.77 ou [Col11] p.240.
- Représentation isomorphes [Rau00] p.41 ou [Col11] p.241.
- Lemme de Schur [CG15] p.447 ou [Ser98] p.25.

1.2 Caractères.

- Les caractères sont des fonctions centrales [CG15] p.455.
- Deux représentations isomorphes ont même caractères [CG15] p.453.
- Produit scalaire des caractères [CG15] p.456.
- Orthogonalité des caractères irréductibles [CG15] p.456.
- Caractère de la représentation somme directe [CG15] p.454 ou [Ser98] p.24.
- Caractère de la représentation produit [Ser98] p.41.
- Caractère de la représentation morphisme [CG15] p.454 ou [Col11] p.240.
- Caractère de la représentation duale [CG15] p.454 ou [Col11] p.240
- Caractère de la représentation régulière [CG15] p.465 ou [Col11] p.239.

1.3 Décomposition des représentations.

- Décomposition d'une représentation en somme de représentations irréductibles [CG15] p.450 et p.456 ou [Ser98] p.28.
- Décomposition de la représentation régulière [CG15] p.465 ou [Col11] p.249.
- Formule de Burnside [CG15] p.467 ou [Col11] p.249.
- Les caractères irréductibles forment une base de l'espace des fonctions centrales [CG15] p.467.
- Il y autant de caractères irréductibles à isomorphisme près que de classes de conjugaison [CG15] p.467.

1.4 Tables de caractère.

- Table de caractère d'une représentation [CG15] p.469 ou [Col11] p.252.

- Orthogonalité des lignes (en affectant le nombre d'éléments de la classe de conjugaison) et des colonnes [Pey04] p.226.

⋆ Sous-groupes distingués et noyaux de caractères [Pey04] p.231.

- Remarque : On déduit d'une table de caractères tous les sous-groupes distingués d'un groupe.
- Applications : Sous-groupes distingués de D_6.

2. Le cas des groupes abéliens.

2.1 Représentations des groupes abéliens finis.

- Les représentations d'un groupe sont toutes de degré 1 si et seulement si ce groupe est abélien [Ser98] p.39.
- Représentations des groupes cycliques [Pey04] p.226.

2.2 Tables de caractères des groupes abéliens finis.

- Structure des groupes finis abéliens [Rau00] p.19.
- Le théorème caractérisant les représentations irréductibles d'un produit de groupe et le théorème de structure des groupes abéliens finis permettront de dresser la table de caractères de tous les groupes abéliens finis.

⋆ Table de caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ [Pey04] p.226.

⋆ Table de caractères du groupe de Klein.

2.3 Application au groupe des quaternions.

- Groupe Q_8 des quaternions qui possède 5 classes de conjugaison [Rau00] p.60.
- Le groupe dérivé de Q_8 est égale à $\{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$ et l'abélianisé est isomorphe au groupe de Klein. On en déduit donc 4 représentations de degré 1 [Rau00] p.60.
- La représentation par les matrices de taille 2 donne une représentation irréductible de degré 2 [Rau00] p.60.
- Table de caractères de Q_8 [Rau00] p.60.

3. Utilisation des sous-groupes de Sylow.

- Mise en place : Les sous-groupe de Sylow sont conjugués ce qui permet de construire des représentations par permutations. On illustre cela sur un exemple.
- Groupe dicyclique d'ordre 12 : $\langle a, b | a^3, b^4, bab^{-1}a^{-2} \rangle$ [Rau00] p.61.
- Il possède 5 classes de conjugaison [Rau00] p.61.
- Son abélianisé est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ce qui fournit 4 représentations irréductibles d'ordre 1 [Rau00] p.61.
- Il possède 3 2-Sylow ce qui fournit une représentation de degré 3. Elle n'est pas irréductible mais possède une sous-représentation irréductible de degré 2 [Rau00] p.61.
- Table de caractères du groupe dicyclique d'ordre 12 [Rau00] p.62.

4. Utilisation de la géométrie.

3.1 Groupes diédraux.

- Nombre de classes de conjugaisons des groupes D_n [Ort04] p.17.
- D_n est le groupe des isométries d'un polygone régulier à n cotés, ce qui fournit une représentation de degré 2 des groupes diédraux [Rau00] p.59.
- L'abélianisé de D_4 est isomorphe au groupe de Klein, ce qui fournit 4 représentations de degré 1. Leurs valeurs peuvent se retrouver grâce aux relations entre les générateurs [Rau00] p.59.
- Table de caractères de D_4 [Rau00] p.59.
- Remarque : D_4 et Q_8 ont même table de caractères mais sont non isomorphes [Rau00] p.60.

3.2 Le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

- Nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$ [Ort04] p.24.
- V_4 distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{A}_4/V_4$ est de cardinal 3 donc est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La table de caractère de ce dernier groupe donne donc deux représentations de degré 1 non triviales [Rau00] p.58.
- Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$ [Rau00] p.58.
- Remarque : $\mathfrak{A}_4$ est isomorphe au groupe des isométries positives d'un tétraèdre régulier, ce qui fournit une représentation de degré 3 de $\mathfrak{A}_4$ [CG13] p.363.

3.3 Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

- Remarque : Etant donné que $\mathfrak{S}_3 \simeq D_3$, on a déjà vu le cas de $\mathfrak{S}_3$.
- Nombre de classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$ [Ort04] p.27.
- La signature est la seul morphisme de groupes non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ [Rau00] p.38.
- $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe des isométries du tétraèdre et au groupe des isométries positives du cube [CG13] p.363 et p.364.
- ⋆ Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ [Ser98] p.58 et [Rau00] p.47.
- Une représentation d'ordre 2 peut-être trouvée en remarquant que V_4 est distingué dans $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$ donc la table de caractères de $\mathfrak{S}_3$ donne une représentation de degré 2 de $\mathfrak{S}_4$ [Rau00] p.47.

Développements

1. Sous-groupes distingués et tables de caractères.
2. Structure des groupes finis abéliens.

Leçon 110

Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

Professeur encadrant : Alexandre Bellis.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une nouvelle leçon qui n'a pas encore trouvé l'affection des candidats.
Pourtant, le sujet et abordable, par exemple : le théorème de structure des groupes abéliens finis, qui a bien entendu une place de choix dans cette leçon. On pourra en profiter pour montrer l'utilisation de la dualité dans ce contexte. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. D'ailleurs, des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Pour les candidats chevronnés, les sommes de Gauss permettent de constater toute l'efficacité de ces objets.
L'algèbre du groupe est un objet intéressant, surtout sur le corps des complexes, où il peut être muni d'une forme hermitienne. On peut l'introduire comme une algèbre de fonctions, munie d'un produit de convolution, mais il est aussi agréable de la voir comme une algèbre qui prolonge la multiplication du groupe.
La transformée de Fourier discrète pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, incontournables en analyse de Fourier.
On pourra y introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien d'ordre une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

Squelette du plan

1. Groupe dual d'un groupe abélien fini.
   1.1 Caractères - Dual des groupes cycliques.
   - Caractère d'un groupe abélien fini [Pey04] p.2.
   - Groupe dual d'un groupe abélien fini [Pey04] p.2.
   - Les caractères sont à valeurs dans le groupe des racines de l'unité [Pey04] p.2.
   - Application : Le groupe dual est un groupe fini [Pey04] p.3.
   - Le dual d'un groupe cyclique est isomorphe à ce groupe [Pey04] p.4.
   - ⋆ $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Pey04] p.5.

   1.2 Caractères des groupes finis abéliens.
   - Prolongement des caractères [Pey04] p.6.
   - Un groupe fini abélien est isomorphe à son dual [Pey04] p.8.
   - Remarque : Cet isomorphisme n'est pas canonique [Pey04] p.8.
   - Un groupe fini abélien est isomorphe de façon canonique à son bidual [Pey04] p.9.
   - Structure des groupes abéliens finis [Col11] p.252.
   - Orthogonalité des caractères [Pey04] p.10.

   1.3 Tables de caractères.
   - Table de caractère [Pey04] p.10.
   - Orthogonalité des colonnes [Pey04] p.10.
   - Remarque : L'orthogonalité des lignes est donnée par l'orthogonalité des caractères [Pey04] p.10.
   - ⋆ Table de caractère de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [Pey04] p.226.
   - Caractères d'un produit de groupes abéliens finis [Ser98] p.41.

  - ⋆ Table de caractères du groupe de Klein.

2. Transformée de Fourier sur un groupe abélien fini.

   2.1 Espace vectoriel des fonctions d'un groupe abélien.

   - Espace des fonctions sur un groupe [Pey04] p.3.
   - Structure d'espace hermitien [Pey04] p.3.
   - Base de l'espace des fonctions [Pey04] p.3.
   - Les éléments du dual d'un groupe abélien fini forment une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions de ce groupe [Pey04] p.6.

   2.2 Algèbre d'un groupe abélien.

   - Multiplication terme à terme [Pey04] p.18.
   - Structure d'algèbre avec le produit terme à terme [Pey04] p.18.
   - Produit de convolution [Pey04] p.16.
   - Structure d'algèbre avec le produit de convolution [Pey04] p.17.

   2.3 Transformée de Fourier sur un groupe abélien.

   - Coefficients de Fourier [Pey04] p.14.
   - Transformée de Fourier [Pey04] p.14.
   - Formule d'inversion [Pey04] p.15.
   - Isomorphisme d'espaces vectoriels [Pey04] p.15.
   - Formule de Plancherel [Pey04] p.15.
   - Isomorphisme d'algèbres [Pey04] p.18.

3. Transformée de Fourier discrète.

   3.1 Notion de transformée de Fourier discrète.

   - Echantillon d'un signal temporel [Pey04] p.64.
   - Transformée de Fourier discrète [Pey04] p.64.
   - Liens avec la transformée de Fourier sur un groupe abélien fini [Pey04] p.64.
   - Transformée de Fourier inverse [Pey04] p.65.
   - Isomorphisme d'espaces vectoriels [Pey04] p.65.
   - Formule de Plancherel [Pey04] p.65.

   3.2 Transformée de Fourier rapide.

   - Mise en place : On considère dans cette partie des échantillons de taille des puissances de 2 [Pey04] p.66.
   - Principe de diviser pour régner : Séparation des indices pairs et impaires [Pey04] p.66.
   - Parties gauche et droite du vecteur transformé par transformée de Fourier [Pey04] p.67.
   - Equations de Danielson-Lanczos, décimation temporelle [Pey04] p.67.
   - Remarque : L'algorithme naïf de calcul de la transformée de Fourier d'un échantillon de taille n est en $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ tandis qu'avec la transformée de Fourier rapide, elle est en $\mathcal{O}\left(n\lg(n)\right)$ [Pey04] p.68.

   3.3 Multiplication rapide de polynômes.

   - Représentation des polynômes [CLRS10] p.835.
   - Multiplication rapide de polynômes [CLRS10] p.835.

Développements

1. Multiplication rapide de polynômes.
2. Structure des groupes abéliens finis.

Leçon 120

Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

Cette leçon, souvent choisie par les candidats, demande toutefois une préparation minutieuse. Tout d'abord, n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et, plus généralement, les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
Il est nécessaire de bien maîtriser le lemme chinois et sa réciproque. Et pour les candidats plus étoffés, connaître une généralisation du lemme chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, faisant apparaître le pgcd et le ppcm de ces éléments.
Il faut bien sûr savoir appliquer le lemme chinois à l'étude du groupe des inversibles, et ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du lemme chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux, de connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents...
Enfin, les candidats sont invités à rendre hommage à Gauss en présentant quelques applications arithmétiques des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

Squelette du plan

1. Différentes structures de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   1.1 Structure de groupe.
   i Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   - Groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.59.
   - Ordre des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Ort04] p.15.
   - Nombre d'éléments d'ordre donné [Com98] p.15.
   - Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.59.
   - Nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.59.
   - ⋆ Générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ [Com98] p.60.
   - Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Ort04] p.15 ou [Com98] p.62.
   - ⋆ Sous-groupes de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ [Com98] p.62.
   - Quotients de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Ort04] p.15.

   ii Morphismes entre les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   - Morphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ [Com98] p.61.
   - Nombres de morphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ [Com98] p.71.
   - ⋆ Morphismes de groupes entre $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ [Com98] p.71.
   - Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.61.
   - ⋆ Automorphismes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ [Com98] p.71.

   iii Structure des groupes abéliens finis.
   - Structure des groupes finis abéliens [Com98] p.66.
   - ⋆ A isomorphisme près, il y a 6 groupes abéliens finis d'ordre 600 [Com98] p.68.
   - ⋆ Calcul des tables de caractères des groupes abéliens finis [Ser98] p.47.

   1.2 Structure d'anneau.
   i Eléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   - Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.263.

- Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.263.
- Nilpotents et idempotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier.

ii Théorème chinois et inversibles.

- Endomorphismes et automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.206.
- Théorème chinois [Com98] p.249.
- ⋆ Système de deux congruences [Com98] p.249.
- Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Per96] p.25 ou [Com98] p.263.
- Nombre d'inversibles [FG97] p.81.
- Théorème de Fermat-Euler [FG97] p.81.
- Multiplicativité de l'indicatrice d'Euler [Com98] p.25.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ selon les valeurs de n [Per96] p.25 et p.26.
- Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Per96] p.24.
- Détermination des groupes d'ordre pq [Per96] p.27.

iii Idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Idéaux de $\mathbb{Z}$ [Com98] p.199.
- Idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.199.
- Idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Com98] p.199.

1.3 Structure de corps.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
- Test de Fermat [Hin08] p.41.
- Nombres de Carmichael [Gou94] p.35.
- Forme des nombres de Carmichael [Gou94] p.35.
- Morphisme de Frobenius [Per96] p.83.
- Aut $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est le groupe engendré par le Frobenius [Com98] p.61.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques [Per96] p.83.
- Cloture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.142.
- Automorphismes de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ [Ort04] p.50.
- Cardinal de Aut $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ [CG13] p.250.
- Théorème de Sophie Germain [FGN01] p.167.
- Théorème de Chevalley-Warning [Zav13] p.32.
- Sous-corps premier d'un corps de caractéristique positive [Per96] p.72.
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et polynômes $X^{p^n} - X$ [FG97] p.189.
- Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.190.
- Equivalent quand le degré tend vers $+\infty$ [FG97] p.190.
- Existence et unicité des corps finis [Tau07] p.106.
- Construction des corps finis [Tau07] p.119.
- ⋆ Construction de $\mathbb{F}_4$ et de $\mathbb{F}_9$ [Tau07] p.121 et p.122.

2. Arithmétique.

2.1 Carrés dans les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

- Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.85.
- ⋆ Résolution de $ax^2 + by^2 = 1$ [Per96] p.130.
- Symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Valeur du symbole de Legendre [CG13] p.183.

- Une équation dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [CG13] p.184.
- -1 comme carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.85.
- Théorème de Wilson [FG97] p.82.
- ⋆ Résolution de $x^2 + y^2 = pz^2$ [Com98] p.275.
- 2 comme carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.86.
- Loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.
- ⋆ Un symbole de Legendre [FG97] p.88.
- ⋆ $y^2 = 37x + 7$ n'a pas de solution entière.

2.2 Carrés dans les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Application du théorème chinois.
- Recherche de carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.3 Tests de primalité.

- Test de Solvay Strassen [Hin08] p.41.
- Test de Miller-Rabin [Hin08] p.42.

3. Utilisation des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3.1 Irréductibilité des polynômes à coefficients entiers.

- Critère de réduction modulo un nombre premier [FG97] p.177.
- ⋆ Irréductibilité de $X^3 + 4X^2 - 5X + 7$ sur $\mathbb{Z}$ [Ort04] p.147.
- La réciproque du théorème précédent est fausse [FG97] p.187.
- ⋆ $X^4 + 1$ réductible sur tous les $\mathbb{F}_p$ [FG97] p.187.

3.2 Algorithme RSA.

- Système de chiffrement RSA [Gou94] p.34.
- Chiffrement et déchiffrement [Gou94] p.35.
- Clé publique et clé secrète [Gou94] p.35.
- Robustesse de l'algorithme [Gou94] p.35.

3.3 Transformée de Fourier discrète.

- Groupe dual de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Pey04] p.5.
- Transformée de Fourier de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [Pey04] p.14.
- Transformée de Fourier discrète [Pey04] p.64.
- Transforme de Fourier inverse [Pey04] p.15 et p.65.
- Multiplication rapide de polynômes [CLRS10] p.828.

Développements

1. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
2. Loi de réciprocité quadratique.
3. Théorème de Sophie Germain.

Leçon 121
Nombres premiers. Applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une leçon pouvant être abordée à divers niveaux.
Il y a tant à dire sur la question que le candidat devra fatalement faire des choix. Attention toutefois à celui des développements, ils doivent être pertinents ; l'apparition d'un nombre premier n'est pas suffisant !
La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation. Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

Exercices et questions

1. On considère la suite récurrente définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $u_{n+1} = u_{n-2} + u_{n-2}$. Montrer que pour tout nombre premier p, p divise u_p.

   Réponse : Le polynôme caractéristique de la suite est $X^3 - X - 1$. En travaillant dans $\mathbb{F}_p$, il vient $u_n = a^n + b^n + c^n$ avec a, b et c des éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Alors par propriété du morphisme de Frobenius, $u_p = (a+b+c)^p = 0$ avec les relations coefficients-racines. Ainsi, p divise u_p. Il faut savoir que la réciproque est fausse.

2. Soit n un entier naturel. Montrer que n est un carré si et seulement si n est un carré modulo tous les nombres premiers.

   Réponse : Le sens direct est immédiat mais la réciproque est difficile. En supposant que n n'est pas un carré, on le développe en produit de facteurs premiers, on utilise ensuite le théorème chinois dans les deux sens et on conclut avec la théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

Squelette du plan

1. Arithmétique de $\mathbb{Z}$.
   1.1 Structure de $\mathbb{Z}$.
   - Nombre premier [Gou94] p.8.
   - Tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier [Gou94] p.8.
   - Factorialité de $\mathbb{Z}$ [Gou94] p.8.
   - ⋆ $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.
   - Factorialité et PPCM, PGCD [Gou94] p.9.
   - Lemme d'Euclide [Gou94] p.9.
   - Lemme de Gauss [Gou94] p.9.
   - Idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ [Com98] p.199.

   1.2 Utilisation de la factorialité de $\mathbb{Z}$.
   - Mise en place : étude des fonctions arithmétiques.
   - Fonction μ de Möbius [FG97] p.93.
   - μ est multiplicative [FG97] p.93.
   - Formule d'inversion de Möbius [FG97] p.93.
   - Indicatrice d'Euler φ [Gou94] p.31.
   - $\varphi(n)$ est le nombre d'inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Théorème Chinois [Gou94] p.31.
- φ est multiplicative [Gou94] p.31.
- Somme des diviseurs σ d'un entier [FG97] p.83.
- σ est multiplicative [Gou94] p.14.
- Nombres de Mersenne [FG97] p.83.
- Nombre de Mersenne premier [FG97] p.83.
- Nombre parfait [FG97] p.83.
- Nombres de Mersenne et nombres parfait [FG97] p.83.

1.3 Répartition des nombres premiers.

- L'ensemble des nombres premiers est infini [Gou94] p.9.
- Crible d'Eratosthène.
- Divergence de $\sum \frac{1}{p}$ et comportement asymptotique [FG97] p.97 et p.104.
- Postulat de Bertrand [FG97] p.105.
- Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet [FG97] p.113.
- Polynômes à valeurs premières [FG97] p.90.
- Théorème des nombres premiers [FG97] p.120.

2. Corps et nombres premiers.

2.1 Généralités sur les corps.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier [Gou94] p.9.
- Petit théorème de Fermat [FG97] p.81.
- Système de chiffrement RSA [Gou94] p.34.
- Nombres de Carmichael [Hin08] p.41.
- Test de Fermat [Hin08] p.41.
- Théorème de Wilson [FG97] p.82.
- Théorème de Sophie Germain [FGN01] p.167.
- Sous-corps premier [Per96] p.72.
- Caractéristique d'un corps [Per96] p.72.
- Morphisme de Frobenius [Per96] p.73.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques [Per96] p.82.
- Cardinal d'un corps fini [Per96] p.72.
- Existence et unicité des corps finis [Per96] p.73.
- $\star$ Construction de $\mathbb{F}_4$ et de $\mathbb{F}_9$ [Tau07] p.121 et p.122.
- Nombre de polynômes irréductibles sur le corps finis [Tau07] p.120.
- Théorème de Chevalley-Warning [Zav13] p.32.

2.2 Carrés dans les corps finis.

- Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.85.
- Symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Valeur du symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Test de Solovay-Strassen [Hin08] p.41.
- Test de Miller-Rabin [Hin08] p.42.
- Une équation dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [CG13] p.184.
- -1 comme carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.85.
- Le théorème de Wilson donne une racine carrée de -1 [FG97] p.82.
- $\star$ Résolution de $x^2 + y^2 = pz^2$ [Com98] p.275.

- 2 comme carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.86.
- Loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.
- ⋆ Un symbole de Legendre [FG97] p.88.
- ⋆ $y^2 = 37x + 7$ n'a pas de solution entière.

2.3 Critère d'irréductibilité des polynômes.

- Critère d'irréductibilité d'un polynôme par réduction modulo un nombre premier [FG97] p.177.
- ⋆ $X^3 + 4X^2 - 5X + 7$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ [Ort04] p.147.
- Le théorème suivant ne concerne pas les corps finis mais l'irréductibilité des polynômes.
- Critère d'Eisenstein [FG97] p.177.
- ⋆ $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ [FG97] p.187.
- La réciproque du théorème d'irréductibilité par réduction est fausse [FG97] p.187.
- ⋆ $X^4 + 1$ réductible sur tous les $\mathbb{F}_p$ [FG97] p.187.

3. Nombres premiers en théorie des groupes.

3.1 p-groupes.

- Notion de p-groupe [Cal14] p.210.
- Relation entre l'ordre d'un p-groupe et l'ordre de son centre [Per96] p.17.
- Corollaire : le centre d'un p-groupe est non trivial [Per96] p.16.
- Application : Tout groupe d'ordre d'ordre p^2 est abélien [Cal14] p.185.
- ⋆ Q_8 est un groupe d'ordre 2^3 mais n'est pas abélien.
- ⋆ Sous-groupe de Frattini d'un groupe fini [Deb16] p.5.
- ⋆ Le sous-groupe de Frattini d'un p-groupe est engendré les puissances et les commutateurs [Deb16] p.243.
- Théorème de Frattini [Deb16] p.243.

3.2 Théorèmes de Sylow.

- p-sous-groupe d'un groupe fini [Cal14] p.210.
- Sous-groupes de Sylow d'un groupe fini [Per96] p.18.
- ⋆ Cardinal des $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$. L'ensemble des matrices unipotentes à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ est un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ [Per96] p.18.
- ⋆ $\langle (13), (1234) \rangle$ est un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$. Il est isomorphe à Q_8.
- Théorèmes de Sylow [Per96] p.18 et p.19 ou [Cal14] p.207.
- ⋆ Tout groupe d'ordre $p^\alpha q$ avec p et q des nombres premiers et α un entier naturel non nul est non simple [Ort04] p.57.
- Tout groupe abélien est produit direct de ses sous-groupes de Sylow [Ort04] p.14.

3.3 Classification des groupes d'ordre pq.

- Deux types de groupes d'ordre pq avec p et q deux nombres premiers distincts [Per96] p.28 ou [Com98] p.94.
- ⋆ $\mathfrak{S}_5$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 15 bien que 15 divise 120 [Com98] p.96.

Développements

1. Loi de réciprocité quadratique.
2. Théorème de Chevalley-Warning.
3. Théorème de Sophie Germain.

Leçon 122
Anneaux principaux. Applications.

Professeur encadrant : Félix Ulmer.

Remarques du Jury

C'est une leçon où les candidats ont tendance à se placer sur un plan trop théorique. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'Eisenstein), accompagnés d'une description de leurs irréductibles.
Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent. Par exemple, il est étonnant de ne pas voir apparaître la notion de polynôme minimal parmi les applications. Le candidat plus cultivé peut donner des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. A ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers.
On a pu noter dans cette leçon l'erreur répandue que $1+i$ et $1-i$ sont des irréductibles premiers entre eux dans l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[i]$.

Squelette du plan

1. Notion d'anneau principal.
   1.1 Idéal d'un anneau.
   - Idéal d'un anneau [Com98] p.195.
   - Morphismes d'anneaux et idéaux [Com98] p.196.
   - Intersection et somme d'idéaux [Com98] p.196.
   - Quotient par un idéal bilatère [Com98] p.198.
   - Théorème chinois [Com98] p.249.
   - Idéal premier et idéal maximal [Per96] p.43.
   - Un idéal maximal est premier [Per96] p.43.
   - ⋆ $(X) \subset k[X,Y]$ est premier non maximal.
   - Idéal principal [Com98] p.237.
   - Idéaux et corps [Com98] p.200.

   1.2 Anneaux principaux.
   - Anneau principal [Com98] p.237.
   - ⋆ Principalité de $A[X]$ [FG97] p.48.
   - ⋆ $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal [Com98] p.252.
   - ⋆ Si $d \equiv 3 \mod (4)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(i\sqrt{d})}$ n'est pas principal [Com98] p.252.
   - Théorème chinois dans les anneaux principaux [FG97] p.50.
   - Idéaux premiers d'un anneau principal [Per96] p.49.
   - Idéaux et anneaux principaux [Com98] p.250.

   1.3 Anneaux euclidiens.
   - Anneau euclidien [Com98] p.238.
   - Tout anneau euclidien est principal [Com98] p.239.
   - ⋆ Un anneau principal non euclidien [Per96] p.53.
   - ⋆ $\mathbb{Z}$ est euclidien. Ses inversibles sont -1 et 1 [Com98] p.239.
   - ⋆ $k[X]$ est euclidien [Com98] p.239.
   - ⋆ $\mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ est principal [FG97] p.70.

- ⋆ $k[[X]]$ est euclidien et même local [FG97] p.68.
- ⋆ $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ est euclidien pour la norme pour de petites valeurs de d [Com98] p.240.
- • Localisation et anneau euclidien [FG97] p.55.
- ⋆ L'anneau des décimaux est euclidien [FG97] p.55.
- ⋆ $\mathbb{C}[T, 1/T]$ est euclidien [FG97] p.55.

2. Arithmétique dans les anneaux principaux.

2.1 Divisibilité.

- • Division dans un anneau [Com98] p.241 ou [Per96] p.46.
- • Division et idéaux [Per96] p.46.
- • Eléments irréductibles d'un anneau [Com98] p.241.
- ⋆ Irréductibles de $\mathbb{Z}$ [Per96] p.49.
- ⋆ Irréductibles de $k[[X]]$ [FG97] p.65.
- ⋆ Irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ [FG97] p.68.
- ⋆ Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ [Per96] p.76.
- • Eléments premiers entre eux [Com98] p.241.
- • Eléments premiers entre eux dans leur ensemble [Com98] p.241.
- • PPCM et PGCD dans un anneau intègre [Ort04] p.109.
- ⋆ PPCM et PGCD dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ [Ort04] p.109.

2.2 Factorialité.

- • Anneau factoriel [Com98] p. 307 ou [Per96] p.47.
- • Décomposition en irréductibles dans un anneau factoriel [Com98] p.308.
- • PGCD et PPCM dans un anneau factoriel [Com98] p.308.
- • Existence du PPCM et factorialité [FG97] p.53.
- • Caractérisation des anneaux factoriels [Per96] p.48.
- • Théorème de Gauss sur la factorialité de $A[X]$ [Per96] p.51.

2.3 Anneaux principaux et anneaux factoriel.

- • Un anneau principal est factoriel [Per96] p.49.
- • Théorème de Bézout [Per96] p.49.
- • Lemme des noyaux [Cog00] p.273.
- ⋆ $k[X, Y]$ n'est pas principal [Com98] p.252.
- • Un anneaux factoriel vérifiant le théorème de Bézout est principal [FG97] p.54.
- ⋆ $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est un anneau de Bézout non factoriel [FG97] p.65.

3. Utilisation des anneaux principaux.

3.1 Eléments algébriques.

- • Extensions de corps algébriques et extensions de corps transcendantes [Tau07] p.79.
- • Polynôme minimal d'un élément algébrique [Tau07] p.79.
- ⋆ Polynôme minimal de $\sqrt[3]{7} + \sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$ [Ort04] p.123.
- • Polynôme minimal d'un endomorphisme [Cog00] p.271.
- • Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres [Cog00] p.298.
- • Calcul de puissance d'une matrice. Application aux chaines de Markov.

3.2 Corps de rupture et de décomposition.

- • Corps de rupture d'un polynôme irréductible [Tau07] p.99.
- • Unicité du corps de rupture [Tau07] p.99.
- • Construction du corps de rupture.

- Corps de décomposition [Tau07] p.103.
- Unicité à isomorphisme près du corps de décomposition [Tau07] p.104.
- Existence et unicité des corps finis [Tau07] p.106.
- Construction des corps finis [Tau07] p.119.

⋆ $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$ [Tau07] p.121.

⋆ Construction de $\mathbb{F}_4$ [Tau07] p.121.

⋆ $X^2 + 2$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$ [Tau07] p.122.

⋆ Construction de $\mathbb{F}_9$ [Tau07] p.122.

3.3 Equations diophantiennes.

i Théorème des deux carrés.

- Anneau des entiers de Gauss [Per96] p.56.
- $\mathbb{Z}[i]$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(i)$ [FG97] p.166.
- $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien [Com98] p.240.
- Inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ [Per96] p.56.
- Ensemble des entiers comme de deux carrés [Per96] p.56.
- Stabilité par multiplication [Per96] p.56.
- Nombres premiers somme de deux carrés [Per96] p.57.
- Théorème des deux carrés [Per96] p.58.
- Irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ [Per96] p.58.

⋆ $1 + 3i = (1 + i)(2 + i)$ dans $\mathbb{Z}[i]$ [Ort04] p.117.

⋆ $70 + i = i(5 - 2i)(3 - 2i)^2$ dans $\mathbb{Z}[i]$ [Ort04] p.117.

ii Equation de type Ramanujan-Nagell.

- Anneau des entiers de Eisenstein [Hin08] p.84.
- L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ est $\mathbb{Z}[j]$ [FG97] p.166.
- $\mathbb{Z}[j]$ est euclidien [Hin08] p.84.

⋆ Une équation de type Ramanujan-Nagell [FG97] p.170.

Développements

1. Equation de type Ramanujan-Nagell.
2. Un anneau principal non euclidien.

Leçon 123
Corps finis. Applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une leçon comportant un certain nombre d'attendus. En premier lieu, une construction des corps finis doit être connue. Ensuite, les constructions des corps de petit cardinal doivent avoir été pratiquées. Les injections des divers $\mathbb{F}_q$ doivent être connues. Enfin, les applications des corps finis (y compris pour $\mathbb{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées : citons par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité.
Il sera bon de comprendre l'utilisation des degrés des extensions, et leurs petites propriétés arithmétiques amenées par le théorème de la base télescopique. Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir aussi résoudre les équations de degré 2. Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.
Les applications sont nombreuses. S'ils sont bien maîtrisées, alors les codes correcteurs peuvent être mentionnés.

Exercices et questions

1. 5 est-il un carré modulo 91 ?

   Réponse : Le théorème chinois fournit un isomorphisme $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ donc 5 est un carré modulo 91 si et seulement s'il l'est modulo 7 et modulo 13. Or, les carrés de $\mathbb{F}_7$ sont 0, 1, 2 et 4 donc 5 n'est pas un carré modulo 91.

2. Résoudre l'équation $y^2 = 41x + 3$ dans $\mathbb{Z}^2$.

   Réponse : Si (x, y) est une solution de cette équation, alors en réduisant modulo 41, il vient $y^3 \equiv 3 \mod (41)$. Or :
   $$\left(\frac{3}{41}\right) = \left(\frac{41}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$
   donc 3 n'est pas un carré modulo 41 et l'équation n'a pas de solution.

3. Donner un générateur de $\mathbb{F}_{31}^*$.

   Réponse : Montrons que 3 convient. Comme $|\mathbb{F}_{31}^*| = 30 = 2 \times 3 \times 5$, les calculs suivants donnent le résultat :

   - $3^2 \equiv 9 \mod (31)$.
   - $3^3 \equiv 27 \mod (31)$.
   - $3^5 \equiv -5 \mod (31)$.
   - $3^6 \equiv 16 \mod (31)$.
   - $3^{10} \equiv -6 \mod (31)$.
   - $3^{15} \equiv -1 \mod (31)$.

4. Construire de deux façons le corps $\mathbb{F}_8$ et donner un isomorphisme entre les deux.

   Réponse : De façon classique, il vient $\mathbb{F}_8 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1) \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$. De plus, un isomorphisme est donné par
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1) & \to & \mathbb{F}_2[X]/(X^3+X^2+1) \\ \overline{X} & \mapsto & \alpha \end{array},$$
   où α est une racine de $X^3 + X + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$.

Squelette du plan

1. Construction des corps finis.
   - 1.1 Construction comme corps de décomposition.
     - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier [Gou94] p.9.
     - Caractéristique et sous-corps premier [Tau07] p.7 ou [Per96] p.72.

- Morphisme de Frobenius [Per96] p.73.
- Corps finis comme corps de décomposition [Tau07] p.106 ou [Per96] p.73.
- Unicité des corps finis [Tau07] p.106.
- On verra que qu'il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre deux corps finis.
- Un corps fini n'est pas algébriquement clos [FG97] p.134.
- Une cloture algébrique des corps finis de caractéristique p est $\bigcup_{n\geq 0} \mathbb{F}_{p^{n!}}$ [FG97] p.142.

1.2 Structure du groupe des inversibles.

- Somme et indicatrice d'Euler [Per96] p.74.
- Structure des groupes $\mathbb{F}_p^*$ [Per96] p.74.
- 3 est un générateur de $\mathbb{F}_{31}^*$ [Ort04] p.135.

1.3 Sous-corps et extension de corps des corps finis.

- Sous-corps d'un corps fini [Tau07] p.117.
- ⋆ Treillis des sous-corps de $\mathbb{F}_{20}$.
- Extensions finies des corps finis [Tau07] p.117.
- Théorème de l'élément primitif pour les corps finis [Tau07] p.117.
- Groupe de Galois d'un corps finis par rapport à un sous-corps [FG97] p.146 ou [Tau07] p.118.

2. Etude des carrés.

2.1 Nombre de carrés.

- Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.85.
- ⋆ Résolution de $ax^2 + by^2 = 1$ [Per96] p.130.
- Résultat utile pour réduire les formes quadratiques.

2.2 Recherche des carrés.

- Symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Valeur du symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Une équation dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [CG13] p.184.
- -1 comme carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.85.
- Théorème de Wilson [FG97] p.82.
- ⋆ Résolution de $x^2 + y^2 = pz^2$ [Com98] p.275.
- 2 comme carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ [FG97] p.86.

2.3 Formes quadratiques sur les corps finis.

- Deux matrices sont dans la même orbites sous l'action par congruence sur un corps fini si et seulement si elles ont même discriminant [Per96] p.130.
- ⋆ Matrices intervenant dans la démonstration de la loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.
- Loi de réciprocité quadratique [dSP10] p.802.
- ⋆ Un symbole de Legendre [FG97] p.88.
- ⋆ $y^2 = 37x + 7$ n'a pas de solution entière.

3. Polynômes et corps finis.

3.1 Etude quantitative des polynômes irréductibles.

- Introduction des notations $A(n,q)$ et $I(n,q)$ désignant l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n du corps $\mathbb{F}_q[X]$ et son cardinal [Tau07] p.119 et [FG97] p.189.
- Théorème d'existence des polynômes irréductibles dans les corps finis [Tau07] p.119.

- Lien entre le polynôme $X^{q^n} - X$ et les polynômes de $A(d,q)$ où d est un diviseur de n [Tau07] p.120 et [FG97] p.189.
- Corollaire utilisant la fonction de Möbius pour exprimer $I(n,q)$ puis équivalent en n [Tau07] p.120 et [FG97] p.189.

⋆ Polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de petit degré [FG97] p.190.

- Quotient d'un corps fini par un polynôme irréductible [Tau07] p.119.

⋆ $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$, mettre la table de multiplication [FG97] p.135.

⋆ $\mathbb{F}_9 \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2+X+2) \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2+2X+2)$ [FG97] p.134.

3.2 Racines dans les corps finis.

- Théorème de Chevalley-Warning [Zav13] p.32.
- Théorème d'Erdös-Ginzburg-Ziv [Zav13] p.32.

3.3 Critère d'irréductibilité des polynômes à coefficients entiers.

- Critère d'irréductibilité des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ [Per96] p.77.

⋆ Le polynôme $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ [Per96] p.77.

- Lien entre l'irréductibilité et l'existence de racines dans des extensions de corps [Per96] p.78 ou [FG97] p.187.

⋆ Le polynôme X^4+1 est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais réductible dans tout corps fini [Per96] p.78 ou [FG97] p.187.

4. Algèbre linéaire sur les corps finis.

- Bases et groupe linéaire d'un espace vectoriel sur un corps fini [CG13] p.250.
- Dénombrement de $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{F}_q)$ et de $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{F}_q)$ [CG13] p.250.
- Endomorphismes nilpotent sur un corps fini [CG15] p.213.
- p-Sylow de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ [CG13] p.254.
- Application aux théorèmes de Sylow [Per96] p.18

Développements

1. Endomorphismes nilpotents sur les corps finis.
2. Polynômes irréductibles sur les corps finis.
3. Loi de réciprocité quadratique.
4. Théorème de Chevalley-Warning.

Leçon 124
Anneau des séries formelles. Applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications, souvent en lien avec les séries génératrices ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, nombre de partitions, représentations et séries de Molien, etc.
A ce propos, on note que les candidats qui choisissent de présenter en développement les séries de Molien ne savent que rarement interpréter les séries obtenues sur des exemples simples. Ces séries ne font pas que calculer les dimensions de sous-espaces d'invariants, elles suggèrent aussi des choses plus profondes sur la structure de l'algèbre d'invariants.

Squelette du plan

On se donne k un corps et A un anneau commutatif non nul.

1. Anneau des séries formelles.
   1.1 Notion de série formelle.
   - Série formelle [Tau99] p.325.
   - Somme et produit de séries formelle [Tau99] p.325.
   - Structure de A-algèbre pour $A[[X]]$ [Tau99] p.325.
   - Coefficients des séries formelles, coefficient constant [Tau99] p.325.
   - Valuation d'une série formelle [Tau99] p.325.
   - Valuation d'une somme ou d'u produit de séries formelles [Tau99] p.325.
   - Intégrité de $A[[X]]$ [Tau99] p.325.
   - Inversibles de $A[[X]]$ [Tau99] p.326.
   - ⋆ $1 - X$ est inversible dans $A[[X]]$ d'inverse $\sum X^n$.
   - Séries formelles usuelles [Tau99] p.337.

   1.2 Idéaux de $A[[X]]$.
   - $k[[X]]$ est un anneau principal [Tau99] p.327.
   - $A[[X]]$ est principal si et seulement si A est un corps [Tau99] p.327.
   - Si A est principal, $A[[X]]$ est factoriel [Tau99] p.327.
   - Pas de résultat de factorialité en général [Tau99] p.327.
   - $k[[X]]$ est un anneau local [Tau99] p.326.

   1.3 Corps des fractions de $A[[X]]$.
   - Corps des fractions de $A[[X]]$ [Tau99] p.334.
   - Série formelle rationnelle [Tau99] p.335.
   - Caractérisation des séries formelles rationnelles [Tau99] p.335.
   - ⋆ $\dfrac{1}{(1-X)^{k+1}} = \sum \binom{n+k}{k} X^n$ [Tau99] p.335.
   - ⋆ $\dfrac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{0\leq 2k\leq N} \binom{N-k}{k} (-1)^k 2^{N-2k} \cos^{N-2k}\theta$ [Tau99] p.336.

   1.4 Substitution.
   - Condition suffisante de substitution [Tau99] p.331.
   - Valuation d'une substitution [Tau99] p.331.
   - Associativité de la substitution [Tau99] p.331.

- Reversion d'une série formelle [Tau99] p.333.
- Morphismes de la k-algèbre $k[[X]]$ [Tau99] p.334.
- ⋆ $e^{\text{Log}(1+X)} = 1 + X$ [Tau99] p.338.
- ⋆ $\text{Log}((1+\lambda X)(1+\mu X)) = \text{Log}(1+\lambda X) + \text{Log}(1+\mu X)$ [Tau99] p.338.

2. Anneau topologique des séries formelles.

   2.1 Structure d'espace métrique complet.
   - Valeur absolue d'une série formelle [Tau99] p.328.
   - Propriétés de la valeur absolue sur $A[[X]]$ [Tau99] p.328.
   - Distance ultramétrique sur $A[[X]]$ [Tau99] p.328.
   - Structure d'anneau topologique pour $A[[X]]$ [Tau99] p.328.
   - $A[X]$ est dense dans $A[[X]]$ [Tau99] p.328.
   - Critère de convergence [Tau99] p.328.
   - $A[[X]]$ est complet [Tau99] p.328.
   - Convergence des séries d'éléments de $A[[X]]$ [Tau99] p.329.

   2.2 Sommabilité.
   - Famille sommable [Tau99] p.321.
   - Critère de Cauchy [Tau99] p.322.
   - Sommation par paquets [Tau99] p.324.
   - Critère de sommabilité d'une famille de $A[[X]]$ [Tau99] p.329.
   - Justification de la notation $\sum a_n X^n$ [Tau99] p.330.
   - Sommabilité d'un produit [Tau99] p.330.
   - Limite des puissance d'une série formelle [Tau99] p.330.

   2.3 Dérivation.
   - Dérivation des séries formelles [Tau99] p.336.
   - La dérivation est continue [Tau99] p.337.
   - Dérivée de la composée de séries formelles [Tau99] p.336.
   - ⋆ Résolution de $\alpha A = (1+X)A'$ [Tau99] p.338.

3. Equations différentielles et séries formelles.

   3.1 Séries formelles Δ-finies.
   - Série formelle Δ-finie [SP99] p.120.
   - ⋆ exp est une série formelle Δ-finie [SP99] p.120.
   - Caractérisation des séries formelles Δ-finies [SP99] p.120.
   - Séries formelles Δ-finies et suites P-récurrentes [SP99] p.121.

   3.2 Algèbre des séries formelles Δ-finies.
   - Séries dérivées et séries Δ-finies [SP99] p.125.
   - L'ensemble des séries formelles Δ-finies est une $k(X)$-algèbre [SP99] p.126.
   - ⋆ Nombres de Catalan [SP99] p.128.

4. Séries génératrices.

- Série génératrice [Tau99] p.339.
- ⋆ Partitions d'un entier en parts fixées [FGN01] p.197.
- ⋆ Nombre de dérangements [FGN01] p.9.
- ⋆ Sommes de Newton [FGN01] p.194.

Développements

1. Nombres de Catalan.
2. Partitions d'un entier en parts fixées.

Leçon 125
Extensions de corps. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

Très peu de candidats ont choisi cette leçon. On doit y voir le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis. Une version dégradée de la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) est très naturelle dans cette leçon.

Squelette du plan

1. Notion d'extension de corps.
   1.1 Extensions de corps.
   - Extension de corps [Per96] p.66.
   - ⋆ $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ [Per96] p.66.
   - Structure d'espace vectoriel [Per96] p.66.
   - Degré d'une extension de corps [Per96] p.66.
   - Corps finis et extensions de corps [Per96] p.66.
   - Théorème de la base télescopique [Per96] p.66.
   - Multiplicativité du degré [Per96] p.66.

   1.2 Trace et norme.
   - Multiplication par un élément [Tau07] p.90.
   - Norme et trace d'un élément [Tau05] p.90.
   - Linéarité et multiplicativité de la norme et de la trace [Tau05] p.90.
   - Equation de type Ramanujan-Nagell [FG97] p.170.

   1.3 Extension engendrée.
   - Extension de corps engendrée par une partie [Per96] p.66.
   - Extension monogène [Per96] p.66.
   - Corps engendré et sous-anneau engendré [Tau07] p.79.
   - Extension engendrée et union [Tau07] p.78.
   - ⋆ Une extension finie non monogène [Ort04] p.124.
2. Racines de polynômes et extensions de corps.
   2.1 Extensions algébriques.
   - Pour K une extension de k et $a \in K$, on note $k(a)$ le plus petit corps qui contient a et K [Cal06b] p.4 ou [Tau07] p.77.
   - Un élément $a \in K$ est algébrique sur k si ev_a est non injectif, transcendant sinon [Cal06b] p.11 ou [Tau07] p.79.
   - Polynôme minimal [Tau07] p.79.
   - Extension algébrique [RDO93a] p.185 ou [Tau07] p.79.
   - Toute extension de degré finie est algébrique [Cal06b] p.18 ou [Tau07] p.80.
   - ⋆ Contre exemple au théorème précédent : on note p_n le n-ième nombre premier, $F_n = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ et $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p_n} : n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ et F est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré infini sur $\mathbb{Q}$ [Cal06b] p.31.
   - Si $a \in K$ est algébrique, alors $k(a) \simeq k[a]$ et $k(a)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie appelée le degré de a et une base de $k(a)$ est alors $(1, a, \dots, a^{n-1})$ [Cal06b] p.12 ou[RDO93a] p.183 ou [Tau07] p.30.

- ⋆ Polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de $\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}$ [Ort04] p.123.

2.2 Corps de rupture et de décomposition.

- • Corps de rupture d'un polynôme irréductible [Tau07] p.99.
- • Existence d'un corps de rupture [Tau07] p.99.
- ⋆ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ est un corps de rupture de X^3-2 [Tau07] p.99.
- • Unicité à isomorphe près du corps de rupture [Tau07] p.100.
- • Polynômes irréductibles et extensions de corps [Tau07] p.100.
- • Corps de composition [Tau07] p.103.
- • Existence et unicité à isomorphisme près d'un corps de décomposition [Tau07] p.104.
- • Degré d'un corps de décomposition [Tau07] p.104.
- ⋆ $\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2})$ est un corps de décomposition de X^3-2.
- ⋆ Irréductibilité des polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Z}$ [Per96] p.82.
- ⋆ Degré des corps cyclotomiques [Per96] p.83.
- ⋆ Intersection de corps cyclotomiques [Ort04] p.152.
- • Polygones réguliers constructibles [Mer04] p.433.

2.3 Clôture algébrique.

- • Corps algébriquement clos [Cal06a] p.90 ou [RDO93a] p.177.
- • Un corps k est algébriquement clos si et seulement si les polynômes irréductibles de $k[X]$ sont de degré 1 [Cal06b] p.67.
- ⋆ $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos [Cal06a] p.90 et [Cal06b] p.68.
- • Théorème de d'Alembert-Gauss [Cal06b] p.67 ou [AM03] p.150.
- • Clôture algébrique comme extension algébrique et algébriquement close [Cal06b] p.73.
- • Théorème de Steinitz [Car81] p.198 ou [Tau07] p.102.
- • Deux clôtures algébriques sont isomorphes [Cal06b] p.76.
- ⋆ Une clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^n}$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\mathbb{F}_{p^{k!}}$ [Cal06b] p.77.

3. Corps finis.

3.1 Existence et construction des corps finis.

- • Caractéristique et sous-corps premier [Tau07] p.7 ou [Per96] p.72.
- • Morphisme de Frobenius [Per96] p.73.
- • Corps finis comme corps de décomposition [Tau07] p.106 ou [Per96] p.73.
- • Unicité des corps finis [Tau07] p.106.
- • On verra que qu'il n'y a pas d'isomorphisme canonique entre deux corps finis.
- • Un corps fini n'est pas algébriquement clos [FG97] p.134.
- • Une cloture algébrique des corps finis de caractéristique p est $\bigcup_{n\geq 0}\mathbb{F}_{p^{n!}}$ [FG97] p.142.

3.2 Sous-corps et extension de corps des corps finis.

- • Sous-corps d'un corps fini [Tau07] p.117.
- ⋆ Treillis des sous-corps de $\mathbb{F}_{20}$.
- • Extensions finies des corps finis [Tau07] p.117.
- • Théorème de l'élément primitif pour les corps finis [Tau07] p.117.
- • Groupe de Galois d'un corps finis par rapport à un sous-corps [FG97] p.146 ou [Tau07] p.118.

3.3 Polynômes irréductibles sur les corps finis.

- • Introduction des notations $A(n,q)$ et $I(n,q)$ désignant l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n du corps $\mathbb{F}_q[X]$ et son cardinal [Tau07] p.119 et [FG97] p.189.

- Théorème d'existence des polynômes irréductibles dans les corps finis [Tau07] p.119.
- Lien entre le polynôme $X^{q^n} - X$ et les polynômes de $A(d,q)$ où d est un diviseur de n [Tau07] p.120 et [FG97] p.189.
- $I(n,q)$ puis équivalent en n [Tau07] p.120 et [FG97] p.189.

⋆ Polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de petit degré [FG97] p.190.

- Quotient d'un corps fini par un polynôme irréductible [Tau07] p.119.

⋆ $\mathbb{F}_4 \simeq \mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$, mettre la table de multiplication [FG97] p.135.

⋆ $\mathbb{F}_9 \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2+X+2) \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2+2X+2)$, mettre un isomorphisme entre les deux [FG97] p.134.

Développements

1. Equation de type Ramanujan-Nagell.
2. Polygones réguliers constructibles.
3. Polynômes irréductibles sur les corps finis.

Leçon 126
Exemples d'équations diophantiennes.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une leçon nouvelle, ou plus exactement d'une renaissance. On y attend les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = c$ (identité de Bezout, lemme de Gauss), les systèmes de congruences, mais aussi bien entendu la méthode de descente et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p.
La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain).

Squelette du plan

Equation diophantienne [Com98] p.274.

1. Equations linéaires.
   1.1 Equation de Bézout.
   - Equation $AX = B$ avec A et B des matrices à coefficients entiers.
   - Théorème de Bézout [Per96] p.49.
   - Résolution de $ax + by = c$ [Com98] p.264 ou [Gou94] p.10.
   - ⋆ Résolution de $522x + 2214y = 36$ [Com98] p.264.
   - ⋆ Résolution de $47x + 111y = 1$ [Gou94] p.10.
   - ⋆ Nombre de solutions de $x + 2y + 5z = n$ [FGN09b] p.199.
   - ⋆ Nombre de solutions de $x_1 + \ldots + x_n = p$ [FF12] p.33.
   - Partition d'un entier en parts fixées [FGN09b] p.197.
   - Mise sous forme normale de Smith [BMP04] p.285.
   - Résolution de $AX = B$ avec la forme normale de Smith.

   1.2 Systèmes de congruence.
   - Résolution de systèmes aux congruences $x \equiv a_i \mod (n_i)$.
   - Théorème chinois [Gou94] p.31.
   - Inverse de l'isomorphisme chinois [Gou94] p.31.
   - ⋆ Solution d'un système aux congruences [Com98] p.249.
   - Théorème mandarin.
   - ⋆ Résolution du système $x \equiv 3 \mod (4)$ et $x \equiv 5 \mod (6)$.
2. Nombres premiers et équations diophantiennes.
   2.1 Structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   - $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
   - Petit théorème de Fermat [FG97] p.81..
   - Théorème de Sophie Germain [FGN01] p.167.
   - Equation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ [Hin08] p.81.

   2.2 Carrés modulo un nombre premier.
   - Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_p$ [FGN01] p.162.
   - Equation $ax^2 + by^2 = c$ dans $\mathbb{F}_p$ [Com98] p.278.
   - ⋆ Equation $5x^2 + 3y^2 = 11$ dans $\mathbb{F}_{13}$ [Com98] p.278.
   - ⋆ Equation $x^2 + xy + 8y^2 = 10$ dans $\mathbb{F}_{13}$ [Com98] p.278.

- Théorème des quatre carrés [Hin08] p.81 ou [FGN01] p.162.

2.3 Loi de réciprocité quadratique.

- Symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Valeur du symbole de Legendre [CG13] p.183.
- Equation $ax^2 = 1$ dans $\mathbb{F}_p$ [CG13] p.184.
- Equation $x^2 = -1$ dans $\mathbb{F}_p$ [FG97] p.85.
- Equation $x^2 = 2$ dans $\mathbb{F}_p$ [FG97] p.86.
- Loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.
- ⋆ Equation $y^2 = 37x + 7$.

3. Factorialité de corps de nombres.

3.1 Corps quadratique et anneau des entiers.

- Corps de nombres [Hin08] p.96.
- Anneau des entiers d'un corps de nombres [Hin08] p.96.
- d entier sans facteur carré et $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ [Hin08] p.96.
- $\mathcal{O}_k$ est euclidien pour la norme pour de petites valeurs négatives de d [Com98] p.240.
- ⋆ Equation de Mordell $y^2 = x^3 - 2$ [Hin08] p.124.

3.2 Anneau des entiers de Gauss.

- Anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss [Per96] p.56.
- $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien [Per96] p.56.
- Inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ [Per96] p.56.
- Ensemble des entiers somme de deux carrés [Per96] p.56.
- Stabilité par multiplication [Per96] p.56.
- Nombres premiers somme de deux carrés [Per96] p.57.
- Irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$ [Per96] p.58.
- ⋆ Equation de Mordell $y^2 = x^3 - 1$ [Duv07] p.56.
- Théorème des deux carrés [Per96] p.58.
- ⋆ Equation par descente infinie $x^3 + y^3 = pz^3$ [Com98] p.275.
- ⋆ Equation de Mordell $y^2 = x^3 + 7$.

3.3 Anneau des entiers d'Eisenstein.

- Anneau $\mathbb{Z}[j]$ des entiers d'Eisenstein [Hin08] p.84.
- $\mathbb{Z}[j]$ est euclidien [Hin08] p.84.
- ⋆ Equation de Fermat $x^3 + y^3 = z^3$ [Hin08] p.84.
- ⋆ Equation de type Ramanujan-Nagell $x^2 - 3 = 2^n$ [FG97] p.170.

4. Courbes et équations diophantiennes.

4.1 Paramétrage rationnel de courbes.

- Utilité paramétrage rationnel des courbes [Com98] p.274.
- Paramétrage rationnel du cercle [Com98] p.273.
- ⋆ Equation de Fermat $x^2 + y^2 = z^2$ [Com98] p.273.
- ⋆ Equation $x^4 + y^4 = z^2$ [Com98] p.273.
- ⋆ Equation de Fermat par descente infinie $x^4 + y^4 = z^4$ [Com98] p.275.
- Paramétrage rationnel du folium de Descartes [Com98] p.276.
- ⋆ Equation $x^3 + y^3 = xyz$ [Com98] p.276.

4.2 Loi de groupe sur les coniques.

- Structure de groupe pour les coniques [CG15] p.383 et p.384.

- ⋆ Structure pour une hyperbole équilatère [CG15] p.384.
- d entier sans facteur carré [CG13] p.388.
- ⋆ Equation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$ [CG15] p.388.
- Expression des solutions [Hin08] p.86.
- Recherche de la solution fondamentale [Hin08] p.95.
- Solution minimale de $x^2 - dy^2 = -1$ [Hin08] p.95.
- ⋆ Solution fondamentale de $x^2 - 61y^2 = 1$ [Hin08] p.95.
- ⋆ Solution minimale de $x^2 - 61y^2 = -1$ [Hin08] p.94.
- Inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ [Hin08] p.87.

Développements

1. Equation de Pell-Fermat.
2. Equation de type Ramanujan-Nagell.
3. Théorème de Sophie Germain.

Leçon 127
Droite projective et birapport.

Professeur encadrant : Alexandre Bellis

Remarques du Jury

Il s'agit également d'une leçon récemment introduite et reprenant un titre ancien. Le birapport peut être vu comme un invariant pour l'action du groupe linéaire $\mathrm{GL}(2, K)$ (ou plus finement son quotient projectif $\mathrm{PGL}(2, K)$) sur l'ensemble $P^1(K)$ des droites du plan vectoriel K^2.
Lorsque le corps K est le corps des complexes, il ne faudra pas manquer d'en voir les applications à la cocyclicité, et à l'étude des droites et cercles du plan affine euclidien.
On peut s'aider du birapport, sur des corps finis, pour construire des isomorphismes classiques entre groupes finis de petit cardinal.
L'ensemble des droites du plan contenant un point fixe est naturellement une droite projective. Cela permet enfin d'identifier une conique à une droite projective : c'est l'idéal d'une preuve classique du théorème de l'hexagramme de Pascal. Par ailleurs, on pourra remarquer le birapport dans l'expression de la distance hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré.

Squelette du plan

1. La droite projective.
   - 1.1 Construction de la droite projective.
     - Droite projective [Boy15] p.422.
     - Dimension de la droite projective [Aud06] p.177.
     - Cardinal de $\mathrm{P}^1(\mathbb{F}_q)$ [CG13] p.250.
     - Sphère de Riemann [CG13] p.309.
     - Lien entre affine et projectif [Aud06] p.181.
   - 1.2 Topologie de la droite projective.
     - La topologie de la droite projective est celle de la topologie quotient
     - $\mathrm{P}^1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^1/\sim$ sont homéomorphes [Aud06] p.178.
     - $\mathrm{P}^1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^1$ sont homéomorphes.
     - Projection stéréographique [AM03] p.297 ou [CG13] p.309.
     - $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{S}^2$ sont homéomorphes [AM03] p.297 ou [CG13] p.310.
     - $\mathrm{P}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ sont compactes et connexes par arcs [Aud06] p.178.
     - Structure de $\mathrm{P}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ [CG15] p.344.
   - 1.3 Repères projectifs et coordonnées homogènes.
     - Repère projectif [Boy15] p.424.
     - Coordonnées homogènes [Boy15] p.426.
2. Homographies et birapport.
   - 2.1 Groupe projectif.
     - Action de $\mathrm{GL}(2, k)$ sur les droites de k^2 [CG13] p.293.
     - Homographie [Boy15] p.425.
     - Homographies de la droite projective [Boy15] p.426.
     - Homographies et homéomorphismes [CG13] p.294.
     - Groupe linéaire projectif [Boy15] p.425.
     - Cardinal de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q)$ [CG13] p.250.
     - Théorème fondamental de la géométrie projective [Boy15] p.426.
     - Homographies et points fixes [Boy15] p.452.

- Homographies et involutions [Boy15] p.453.
- $\mathrm{Gal}(k(X)/k)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2,k)$ [Tau07] p.96.

2.2 Birapport et droite projective.

- Action de $\mathrm{PGL}(2,k)$ sur les triplets de $\mathrm{P}^1(k)$ [Boy15] p.449 ou [CG13] p.295.
- Injection de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q)$ dans $\mathfrak{S}_{q+1}$ [CG13] p.315.
- ⋆ $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3)$ et $\mathfrak{S}_4$ sont isomorphes [CG13] p.315.
- Birapport d'un quadruplet de points d'une droite projective [Boy15] p.449 ou [CG13] p.296.
- Birapport et droites projectives réelle et complexe [Aud06] p.202.
- Expression du birapport [Boy15] p.450 ou [CG13] p.296.
- Invariance du birapport par homographies [CG13] p.297.
- Stabilité du birapport et homographies.
- Egalité de birapports [CG13] p.297.
- Birapport et permutation des points [Boy15] p.451 ou [CG13] p.300.
- Birapport et alignement, cocyclicité [Aud06] p.202.
- Action de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathrm{P}^1(k) \setminus \{\infty, 0, 1\}$ [Boy15] p.451.
- Théorème des six birapports [Boy15] p.451.
- Théorème des six birapports et cube [CG13] p.302.
- Théorème des six cercles [Boy15] p.347.
- Droite de Simson [Aud06] p.117.
- Théorème du pivot [Boy15] p.344.

2.3 Droites et cercles de la sphère de Riemann.

- Cercles de $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ et projection stéréographique [AM03] p.303.
- Cercles de $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ et homographies [AM03] p.304.
- Division harmonique [Boy15] p.454.
- Condition de division harmonique [Boy15] p.455.
- Groupe circulaire et et divisions harmoniques.
- Groupe circulaire [Boy15] p.356.
- Partie génératrice du groupe circulaire [Boy15] p.358.
- Eléments du groupe circulaire [Boy15] p.358.
- Le groupe circulaire est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [CG13] p.312.

3. Birapport et plan projectif réel.

3.1 Construction du plan projectif réel.

- Plan projectif [Boy15] p.422.
- Sous-espaces projectifs d'un plan projectif [Boy15] p.422.
- Repère projectif d'un plan projectif [Boy15] p.424.
- Théorème de Pappus [Boy15] p.434.
- Théorème de Desargues [Boy15] p.436.
- Droites du plan affine [Boy15] p.427.
- Lemme des trois birapports [Boy15] p.467.
- Théorème de Ménélaüs [Boy15] p.468.

3.2 Birapport de quatre droites.

- Pinceau de droites [Boy15] p.430.
- Pinceau de droites et droite projective [CG13] p.304.

- Invariance du rapport par projection parallèle [CG13] p.305.
- Birapport de 4 droites [CG13] p.304 ou [Boy15] p.452.
- Incidence dans un plan projectif [Boy15] p.430.
- L'incidence est une homographie [Boy15] p.430.

3.3 Coniques projectives.

- Conique projective [Boy15] p.476.
- Structure de droite projective sur une conique projective [Boy15] p.486.
- Birapport de 4 points d'une conique projective [Boy15] p.486.
- Homographies et coniques projectives [Boy15] p.490.
- Théorème de Pascal [Boy15] p.491.

Développements

1. Groupe circulaire.
2. Théorème de Pascal.

Leçon 140

Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du jury

Le bagage théorique est somme toute assez classique, même si parfois le candidat ne voit pas l'unicité de la décomposition en éléments simples en terme d'indépendance en algèbre linéaire. Ce sont surtout les applications qui sont attendues : séries génératrices (avec la question à la clef : à quelle condition une série formelle est-elle le développement d'une fraction rationnelle), automorphismes de $K(X)$, version algébrique du théorème des résidus, action par homographies. Le théorème de Lüroth n'est pas obligatoire et peut même se révéler un peu dangereux si le candidat n'est pas suffisamment préparé aux questions classiques qui l'attendent.

Remarques

1. Une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann est une fraction rationnelle.
2. Présenter la localisation et le passage de $\mathbb{Z}$ au corps des décimaux peut-être bien.
3. Il peut-être judicieux de parler des points rationnels sur une conique, des extensions transcendantes, d'introduire la notion de valuation et de série formelle, des séries de Laurent formelles.
4. Il est possible de parler du corps $k(X)$ en invoquant directement le théorème d'existence du corps des fractions pour tout anneau intègre.

Exercices et questions

1. Justifier la dérivation dans $k(X)$.

   Réponse : La définition permet de prolonger la dérivation sur l'ensemble des polynômes.
2. Qu'est-ce qu'une homographie ?

   Réponse : C'est un élément de $\mathrm{PGL}(n,k)$. En dimension 2, il s'agit des $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.
3. Calculer l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+x+1}\,dx.$$
   Réponse : On décompose en éléments simples pour obtenir le résultat.
4. $k(X)$ est-il algébriquement clos ?

   Réponse : Le polynôme $P = T^2 - X \in k(X)[T]$ n'a pas de racine dans $k(X)$. En effet, il n'y a pas de fraction rationnelle F vérifiant $F^2 = X$ à cause des degrés. Ainsi, $k(X)$ n'est pas algébriquement clos.
5. Soit $F \in k(X) \setminus k$. Montrer que X est algébrique sur $k(F)$.

   Réponse : On écrit $F = A \;/\; B$ où $A, B \in k[X]$. Considérons le polynôme $P(T) = B(T)F - A(T) \in k(F)[T]$. Alors $P(X) = 0$ donc X et algébrique sur $k(F)$.
6. Montrer que les éléments algébriques de $k(X)$ sont les éléments de k.

   Réponse : Le fait que les éléments de k soient algébriques sur k est évident. Soit à présent $F \in k(X) \setminus k$. On suppose par l'absurde que F est algébrique sur k. Alors par théorème de la base télescopique, $[k(X) : k] < +\infty$, car d'après l'exercice précédent, X est algébrique sur $k(F)$. Ainsi, X est algébrique sur k ce qui est absurde.
7. Soient $F, G \in k(X)$. Montrer qu'il existe $P \in k(U,V) \setminus k$ tel que $P(F,G) = 0$.

Squelette du plan

Dans toute la leçon, k désigne un corps.

1. Généralités sur $k(X)$.
   1.1 Le corps $k(X)$.
   - $k[X]$ est un anneau intègre dont on note $k(X)$ le corps des fractions [Tau99] p.257.
   - Conséquence : opérations arithmétiques dans $k(X)$, addition et multiplication [RDO93a] p.214.
   - Conséquence : $k[X]$ comme sous-algèbre de $k(X)$ [RDO93a] p.215.
   - Théorème de prolongement des isomorphismes de corps sur les corps des fractions correspondant [RDO93a] p.215.

   1.2 Eléments de $k(X)$.
   - Définition du degré d'une fraction rationnelle [Tau99] p.257.
   - Propriétés sur le degré [Tau99] p.258.
   - Corollaire : $k(X)$ n'est pas algébriquement clos [Tau99] p.258.
   - Existence d'une forme irréductible pour une fraction rationnelle comme quotient de deux polynômes premiers entre eux [Tau99] p.258 ou [RDO93a] p.215.
   - Définition des racines et des pôles d'une fraction rationnelle respectivement comme racine du numérateur et du dénominateur [Tau99] p.260.
   - Remarque : si k n'est pas algébriquement clos, les pôles de F une fraction rationnelle seront ceux de la cloture algébrique associé à k.
   - Le groupe de Galois de $k(X)$ s'identifie à $\mathrm{PGL}(2, k)$ [FGN01] p.224.

   1.3 Dérivation dans $k(X)$.
   - Définition de la dérivation dans $k(X)$ [RDO93a] p.219.
   - Propriétés de la dérivation [RDO93a] p.220.
   - Résolution de l'équation $F' = 0$ en caractéristique 0 et lien avec les pôles [Tau99] p.262.
   - Théorème équivalent en caractéristique positive sur un corps parfait, *ie* pour lequel le morphisme de Frobenius est surjective : si $P = \sum a_i X^i$ est de dérivée nulle, alors les a_i, avec i premiers à p sont nuls. Les autres sont les a_i avec $i = jp$. On écrit $a_{jp} = b_j^p$ car le corps est parfait et alors $P = (\sum b_j X^j)^p$.
   - ⋆ Il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F' = 1 \,/\, X - a$ pour tout $a \in k$ [Tau99] p.262.

2. Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.
   2.1 Fonctions rationnelles.
   - Définition d'une fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle définie sur le complémentaire dans k des pôles de la fraction rationnelle [RDO93a] p.218.
   - Remarque : ce complémentaire peut-être vide dans le cas où k est un corps fini [RDO93a] p.218.
   - ⋆ Le domaine de définition de la fraction rationnelle associée à la fraction rationnelle $F(X) = 1/X(X-1)\dots(X-p+1) \in \mathbb{F}_p(X)$ est vide.
   - Propriétés algébriques sur les fonctions rationnelles [RDO93a] p.219.
   - Relations d'égalité entre deux fonctions rationnelles et égalité des fractions rationnelles correspondantes [RDO93a] p.219.

   2.2 Application aux équations diophantiennes.
   - Paramétrage rationnel du cercle [Com98] p.274.
   - Résolution de l'équation de Diophante [Com98] p.273.

3. Décomposition en éléments simples et applications.

3.1 Notion de décomposition en éléments simples.

- Théorème de décomposition en éléments simples pour un corps quelconque [Tau99] p.264 ou [LFA78] p.221 ou [RDO93a] p.224.
- Interprétation : dans le k-espace vectoriel $k(X)$, l'ensemble $k[X]$ et l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires [RDO93a] p.221.
- Définition de la partie entière élément de $k[X]$ et de la partie fractionnaire élément de $k(X)$ [Tau99] p.264.
- Remarque : si k est algébriquement clos, alors les dénominateurs de la partie fractionnaire sont tous de la forme $X - a$ et on parle alors de partie polaire relativement à a plutôt que partie fractionnaire. On a également une base de $k(X)$ constituée des polynômes et des parties polaires [RDO93a] p.226.
- Remarque : dans le cas de $\mathbb{R}$, les dénominateurs de la partie fractionnaire sont tous de la forme $X - a$ ou $X^2 + aX + b$ avec $a^2 - 4b$ strictement négatif [Tau99] p.265.

⋆ Exemple de calcul de décomposition [Gou08] p.73.

⋆ Décomposition en éléments simples de P' / P où P est un polynôme [Tau99] p.265.

- Théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P où P est un polynôme [Tau99] p.266.

3.2 Méthodes de calcul des décomposition en éléments simples.

- Présentation de la méthode de division suivant les puissances croissantes [RDO93a] p.227 ou [LFA78] p.224.

⋆ Décomposition en éléments simples de $(1 + 2 + X^3)/X^4(1 + X + 2X^2)$ [LFA78] p.225.

- Calcul d'une partie polaire dans le cas d'un pôle simple [RDO93a] p.227.

⋆ Décomposition en éléments simples de $1/(1 + X^4)$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Présentation de la méthode d'identification.

⋆ Décomposition en éléments simple de l'inverse des polynômes de Tchebytchev [FG97] p.185.

- Explication : la décomposition en éléments simples peut servir à calculer des primitives [LFA78] p.239.

⋆ Primitive de $F(X) = X/(1 + X + X^2)$ [LFA78] p.244.

3.3 Théorème des résidus.

- Définition du résidu d'une fraction rationnelle relativement à un de ces pôles [Tau99] p.266.
- Lien entre le degré d'une fraction rationnelle et la somme des résidus par rapport à un de ses pôles [Tau99] p.266.
- L'image de l'opérateur de dérivation est l'ensemble des fractions rationnelles dont les résidus sont nuls [Tau99] p.266.
- Rappel du calcul d'un résidu dans le cas $A / (X - a)\, C$ d'un pôle simple, [Tau99] p.267.
- Calcul du résidu d'un pôle d'ordre k [AM03] p.241.
- Théorème des résidus [Tau99] p.271.

⋆ Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}+1}$ [Tau99] p.271.

- Il existe un autre moyen d'intégrer les fractions rationnelles donnée par le résultat suivant.
- Théorème de Rothstein-Trager [SP99] p.153.

4. Lien avec les séries formelles.

⋆ Développement en série formelle de $1/(1 - X)^n$ en faisant attention à la caractéristique du corps [LFA78] p.229.

- Une fraction rationnelle de $k(X)$ est développable en série formelle si et seulement si elle n'admet pas 0 comme pôle dans k. Ce développement dans $k[[X]]$ est alors unique [RDO93a] p.240 ou [LFA78] p.229.
- Une série formelle est le développement d'une fraction rationnelle si et seulement s'il existe une relation de dépendance linéaire entre ses coefficients [LFA78] p.230.

⋆ Exemple de $F(X) = 1/(1 - X - X^2)$ [LFA78] p.231.

⋆ Partitions d'un entiers en parts fixées [FGN09b] p.197.

Développements

1. Partitions d'un entier en parts fixées.
2. Théorème de Rothstein-Trager.

Leçon 141

Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du jury

Le jury attend dans cette leçon un bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition (la preuve de l'unicité de ce dernier n'est pas exigée), ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis).
Attention à ne pas croire qu'un polynôme réductible admet forcément des racines (même en dehors du cadre de cette leçon !).
Bien entendu, les corps finis ont une place de choix et il sera instructif de chercher des polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbb{F}_2$, ou $\mathbb{F}_3$.
Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbb{C}$; il est bon se savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos.
Il faut connaître le théorème de la base télescopique ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes.

Squelette du plan

Soient A un anneau commutatif unitaire intègre et k un corps.

1. Notion de polynôme irréductible - Critères d'irréductibilité.
   1.1 Polynômes irréductibles de $A[X]$.
   - Notion de polynôme irréductible [Tau07] p.30.
   - ⋆ Pour tout entier naturel n et $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{Z}$ deux à deux distincts, le polynôme $(X-a_1)\dots(X-a_n)-1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ [FGN01] p.188.
   - La notion d'irréductibilité ne passe pas aux extensions de corps comme le montre le polynôme X^2-2 dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ [Tau07] p.30.
   - Liens entre irréductibilité et anneau quotient [Tau07] p.30.
   - Théorème de transfert de Gauss : si A est factoriel, alors $A[X]$ aussi [Per96] p.51.
   - Il y a une infinité de polynômes irréductibles dans $k[X]$ [Tau07] p.31.

   1.2 Critères d'irréductibilité.
   - Irréductibilité dans $A[X]$ *vs* irréductibilité dans $\mathrm{Frac}(A)[X]$ [Goz09] p.10 ou [Per96] p.51.
   - Critère d'Eisenstein [FGN01] p.188 ou [Tau07] p.43.
   - ⋆ Le polynôme X^4+1 est irréductible sur $\mathbb{Z}$ [Goz09] p.11.
   - Critère d'irréductibilité par réduction modulo un nombre premier [Goz09] p.12 ou [Tau07] p.44.
   - ⋆ Le polynôme $P(X) = X^3 - 127X^2 + 3609X + 19$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ car est primitif et sa réduction modulo 2 est $X^3 - X^2 + 1$ qui est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$ car n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$ [Goz09] p.12.

   1.3 Irréductibilité et racines.
   - Existence de racine implique non irréductibilité dans $k[X]$ [Goz09] p.9.
   - ⋆ La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre le polynôme $(X^2+1)^2$ qui n'a pas de racine réelle mais est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ [Goz09] p.9.
   - Equivalence en degré inférieur à 3 [Goz09] p.9.
2. Extensions de corps et polynômes irréductibles.

2.1 Extensions de corps - Extensions algébriques.

- Extension de corps [Per96] p.65.
- ⋆ $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ [Per96] p.65.
- Structure d'espace vectoriel pour une extension de corps, degré d'une extension [Per96] p.65.
- Théorème de la base télescopique [Per96] p.65.
- Pour K une extension de k et $a \in K$, on note $k(a)$ le plus petit corps qui contient a et K [Cal06b] p.4 ou [Tau07] p.77.
- Un élément $a \in K$ est algébrique sur k si ev_a est non injectif, transcendant sinon [Cal06b] p.11 ou [Tau07] p.79.
- Par définition, le polynôme minimal d'un élément algébrique est irréductible unitaire [Tau07] p.79.
- Extension algébrique [RDO93a] p.185 ou [Tau07] p.79.
- Toute extension de degré finie est algébrique [Cal06b] p.18 ou [Tau07] p.80.
- ⋆ Contre exemple au théorème précédent : on note p_n le n-ième nombre premier, $F_n = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ et $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p_n} : n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ et F est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré infini sur $\mathbb{Q}$ [Cal06b] p.31.
- Si $a \in K$ est algébrique, alors $k(a) \simeq k[a]$. Liens avec un théorème précédent mettant en lien l'irréductibilité et les anneaux quotient [Cal06b] p.12 ou [RDO93a] p.183 ou [Tau07] p.30.

2.2 Racines et extensions de corps.

- Corps de rupture d'un polynôme irréductible [Cal06b] p.17 ou [Tau07] p.99.
- Unicité du corps de rupture [Tau07] p.100.
- ⋆ Un corps de rupture de $X^5 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ est $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$.
- Un polynôme irréductible reste irréductible dans toute extension de degré premier avec son degré [Tau07] p.100.
- Notion de corps de décomposition d'un polynôme irréductible [Cal06b] p.36 et p.37 ou [Tau07] p103.
- Unicité du corps de décomposition [Cal06b] p.38 ou [Tau07] p.104.
- Degré du corps de décomposition [FG97] p.138 ou [Tau07] p.104.
- ⋆ Le corps de décomposition de $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ est $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ [Cal06b] p.39.
- Lien entre irréductibilité et existence de racine dans les extensions de corps [FG97] p.187.
- Remarque : On verra un contre-exemple de ce théorème sur les corps finis.

2.3 Clôtures algébriques.

- Corps algébriquement clos [Cal06a] p.90 ou [RDO93a] p.177.
- ⋆ $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos car -1 n'est pas une racine carrée.
- Un corps k est algébriquement clos si et seulement si les polynômes irréductibles de $k[X]$ sont de degré 1 [Cal06b] p.67 ou [RDO93a] p.178.
- ⋆ Théorème de d'Alembert-Gauss [Cal06b] p.67 ou [AM03] p.150.
- Clôture algébrique [Cal06b] p.73 ou [Tau07] p.102.
- ⋆ $\mathbb{C}$ est une cloture algébrique de $\mathbb{R}$.
- Théorème de Steinitz [Car81] p.198 ou [Tau07] p.102.
- Si K est une extension algébriquement close de k, alors $\overline{k}$ le corps des éléments de K algébriques sur k est une cloture algébrique de k [CL05] p.38.
- ⋆ $\overline{\mathbb{Q}}$ est la cloture algébrique de $\mathbb{Q}$ [CL05] p.38.

3. Polynômes irréductibles dans les corps finis.

3.1 Construction des corps finis.

- Existence et unicité des corps finis [Tau07] p.106.
- ⋆ Construction de $\mathbb{F}_4$ comme quotient de $\mathbb{F}_2[X]$ par le polynôme irréductible $1+X+X^2$ et construction de $\mathbb{F}_9$ comme quotient de $\mathbb{F}_3[X]$ par le polynôme irréductible X^2+1 [Tau07] p.122.
- Les corps finis ne sont pas algébriquement clos.
- Une clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^n}$ est $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\mathbb{F}_{p^{k!}}$ [Cal06b] p.77 ou [FG97] p.142.

3.2 Les polynômes irréductibles dans les corps finis.

- Introduction des notations $A(n,q)$ et $I(n,q)$ désignant l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n du corps $\mathbb{F}_q[X]$ et son cardinal [Tau07] p.119 et [FG97] p.189.
- Théorème d'existence des polynômes irréductibles dans les corps finis [Tau07] p.119.
- Lien entre le polynôme $X^{q^n}-X$ et les polynômes de $A(d,q)$ où d est un diviseur de n [Tau07] p.120 et [FG97] p.189.
- Corollaire utilisant la fonction de Möbius pour exprimer $I(n,q)$ puis équivalent en n [Tau07] p.120 et [FG97] p.189.
- ⋆ Polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de petit degré [FG97] p.190.
- ⋆ Le polynôme X^4+1 est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais dans aucun des $\mathbb{F}_p$. Cet exemple montre que la réciproque du critère d'irréductibilité par réduction est fausse [FG97] p.187.

4. Les polynômes cyclotomiques.

4.1 Racines primitives de l'unité et polynômes cyclotomiques.

- Racines de l'unité dans un corps [Per96] p.80.
- Polynômes cyclotomiques dans un cops quelconque [Per96] p.80.
- ⋆ Quelques exemples dans le cas rationnel [Goz09] p.77.
- Lien entre X^n-1 et les polynômes cyclotomiques [Per96] p.80.

4.2 Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{Q}$.

- Les polynômes cyclotomiques rationnels sont à coefficients entiers [Per96] p.81.
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques [Per96] p.82.
- Application : polynôme minimal d'une racine primitive n-ième de l'unité et degré du corps de rupture (qui est aussi le corps de décomposition) de ϕ_n sur $\mathbb{Q}$ [Per96] p.83.
- Application : intersection des corps cyclotomiques [Per96] p.83.

4.3 Cyclotomie dans les corps finis.

- Théorème de cyclotomie dans les corps finis [Per96] p.84.
- Nombre de facteurs irréductibles des polynômes cyclotomiques sur les $\mathbb{F}_p$ [FG97] p.202.

Développements

1. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
2. Polynômes irréductibles dans les corps finis.

Leçon 142
Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

La leçon ne doit pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ou uniquement sur les polynômes symétriques.
Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés. Il faut savoir montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel.
Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbb{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple. Les applications aux quadriques, aux relations racines/coefficients ne doivent pas être délaissées : on peut faire par exemple agir le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2.

Remarque

Les formes quadratiques sont par définition les polynômes homogènes de degré 2.

Exercice

Soit $f : \mathcal{M}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ polynomiale invariante par conjugaison. Montrer que f et un polynôme en les c_i coefficients du polynôme caractéristique.

Réponse : f est continue car polynomiale. Soit $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables à n valeurs propres distinctes. $D_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$. Comme il suffit de déterminer f sur $D_n(\mathbb{C})$, il suffit de déterminer f sur l'ensemble des matrices diagonales. Soient $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tous distincts. Alors en conjuguant par des matrices de permutations, il vient :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n : f\left(\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, f est un polynôme symétrique en les λ_i donc par théorème, f est un polynômes en les polynômes symétriques associés aux λ_i, qui sont les c_i appliqués aux λ_i. Ainsi, f est un polynôme en les c_i sur $D_n(\mathbb{C})$ donc sur $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ par densité et continuité.

Squelette du plan

Soient A un anneau commutatif unitaire, K un corps et n un entier naturel supérieur à 2.

1. Généralités sur $A[X_1,\ldots,X_n]$.

   1.1 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées.

   - Définition de $A[X_1,\ldots,X_n]$ comme suite presque nulle indexée sur $\mathbb{N}^n$ [RDO93a] p.185 ou [LFA78] p.149.
   - Addition, multiplication de deux polynômes à n variables et multiplication par un scalaire [RDO93a] p.186 ou [LFA78] p.149-150.
   - Structure de A-algèbre [RDO93a] p.187 ou [LFA78] p.150.
   - Introduction des indéterminées et génération des polynômes à n variables en fonction des monômes [RDO93a] p.187.
   - Introduction de la notation usuelle des polynômes de plusieurs variables et notations X, Y et Z pour les indéterminées lorsque n vaut 2 ou 3 [RDO93a] p.188.
   - ⋆ Le déterminant, la trace sont des polynômes de plusieurs variables.
   - Isomorphisme entre $A[X_1,\ldots,X_n]$ et $A[X_1,\ldots,X_{n-1}][X_n]$ [RDO93a] p.188.

- Corollaire : Intégrité et inversibles de $A[X_1, \ldots, X_n]$ [RDO93a] p.188.
- Notion de degré partiel par rapport à une indéterminée [RDO93a] p.189 ou [LFA78] p.151.
- ⋆ $\deg_X(X^3Y + Y^2 + XY) = 3$.
- Propriétés du degré partiel selon que A est intègre ou non [RDO93a] p.189 ou [LFA78] p.151.
- ⋆ $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $\deg_X(2X^2Y + Y^3)\deg_X(2X^2 + Y) \neq \deg_X(2X^2Y + Y^3)(2X^2 + Y)$.
- Notion de degré total [RDO93a] p.189 ou [LFA78] p.152.
- ⋆ $\deg(X^3Y + Y^2 + XY) = 4$.
- Propriétés du degré total [RDO93a] p.189 ou [LFA78] p.152.
- ⋆ $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $\deg(2X^4Y)\deg(2XY) \neq \deg(2X^4Y)(2XY)$.

1.2 Polynômes homogènes.

- Définition des polynômes homogènes [RDO93a] p.190 ou [LFA78] p.153.
- On considère le polynôme nul comme homogène de tout degré [RDO93a] p.190.
- ⋆ Le polynôme $X^2Y^4 - 5XY^3 + 2X^6$ est homogène de degré 6.
- Remarque : un polynôme homogène de degré p est de degré total p [RDO93a] p.190 ou [LFA78] p.153.
- Les polynômes de degré 0 sont les constantes, ceux de degré 1 sont les applications linéaire et aux de degré 2 sont les formes quadratiques.
- La somme d'un polynôme homogène de degré p et d'un polynôme homogène de degré q est un polynôme homogène de degré $p + q$ [RDO93a] p.190 ou [LFA78] p.153.
- L'ensemble des polynômes homogènes de degré p est un sous-A-module de $A[X_1, \ldots, X_n]$ et $A[X_1, \ldots, X_n]$ est somme directe de ces sous-A-modules [RDO93a] p.190 ou [LFA78] p.153.
- Application : si A est intègre, alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ [RDO93a] p.191.

1.3 Propriétés arithmétiques.

- Pour $n \geq 2$, $A[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas principal [RDO93a] p.199.
- Mise en défaut du théorème de Bézout [LFA78] p.156.
- Théorème de transfert : si A est un anneau factoriel, alors $A[X_1, \ldots, X_n]$ est factoriel [RDO93a] p.199.
- ⋆ $X^3 - Y^2 - X$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y]$ factoriel et par conséquent, $\mathbb{C}[X, Y]/(X^3 - Y^2 - X)$ est intègre [FG97] p.71.
- Condition nécessaire de divisibilité [RDO93a] p.198.
- Condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_j - X_i)$ divise un polynôme [RDO93a] p.198.
- ⋆ Calcul du déterminant de Vandermonde.

1.4 Dérivation des polynômes de plusieurs variables.

- Notion de polynôme dérivé partiel [RDO93a] p.193 ou [LFA78] p.153 ou [Tau07] p.247.
- La dérivation est un endomorphisme de A-modules [RDO93a] p.193.
- Dérivation du produit et composition des dérivations [RDO93a] p.193-194 ou [LFA78] p.153.
- Dérivation et degré [RDO93a] p.194 ou [Tau07] p.249.
- Formule de Taylor pour les polynômes de plusieurs variables [RDO93a] p.195 ou [LFA78] p.154 ou [Tau07] p.248.
- Théorème d'Euler sur les polynômes homogènes [RDO93a] p.196 ou [LFA78] p.154 ou [Tau07] p.248.

- Réciproque fausse en général mais vrai en caractéristique nulle [Tau07] p.248.

2. Fonctions polynomiales.

2.1 Notion de fonction polynomiale.

- Définition de la fonction polynomiale associée à un polynôme de plusieurs variables [RDO93a] p.191 ou [LFA78] p.155 ou [Tau07] p.244.
- Arithmétique sur les fonctions polynomiales [RDO93a] p.191.
- Annulation de la fonction polynomiale sur des parties infinies [Tau07] p.245.
- Dans le cas où A est un anneau intègre infini, isomorphisme entre $A[X_1, \dots, X_n]$ et l'algèbre des applications de A^n dans A [RDO93a] p.192 ou [LFA78] p.155 ou [Tau07] p.246.

⋆ C'est faux dans la cas où A est fini. Par exemple, pour $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $P(X, Y) = X(X - 1)Y$ est non nul mais la fonction polynomiale associée est identiquement nulle sur A [Gou08] p.77.

- Borne de Bézout.
- Principe de prolongement des identités algébriques [Tau07] p.246.

2.2 Fonctions polynomiales sur les corps finis.

- Fonction polynomiales sur les corps finis [FG97] p.179.
- Théorème de Chevalley-Warning pour le cas des corps finis [Zav13] p.32.
- Théorème de Erdös-Ginzburg-Ziv [Zav13] p.32.

3. Polynômes symétriques.

3.1 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1, \dots, X_n]$.

- Définition des polynômes symétriques [RDO93a] p.200 ou [Tau07] p.249.

⋆ Le polynôme $X_1^2 + X_2^2 + X_3^3$ est symétrique [Gou08] p.79.

- L'ensemble des polynômes symétriques forme une sous-algèbre de $A[X_1, \dots, X_n]$ [RDO93a] p.200.
- Polynôme symétriques élémentaires [RDO93a] p.201 ou [Tau07] p.249.

⋆ $\Sigma_1 = X_1 + \dots + X_n$ et $\Sigma_n = X_1 \dots X_n$ [RDO93a] p.201.

- Les Σ_p sont homogènes d'ordre p et de degré partiel 1 par rapport à chaque variable [RDO93a] p.201.
- Relations coefficients-racines [Gou08] p.78 ou [RDO93a] p.201.

3.2 Structure des l'ensemble des polynômes symétriques.

- Poids d'un polynôme [Tau07] p.250
- Tout polynôme symétrique est un polynôme fonction du poids du polynôme initial en les polynômes symétriques élémentaires [Gou08] p.78 ou [RDO93a] p.203 et p.204 ou [Tau07] p.250.
- Sommes de Newton [FG97] p.184 ou [Esc00] p.28 ou [Tau07] p.252.

⋆ $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = \Sigma_1^3 - 3\Sigma_1\Sigma_2 + 2\Sigma_3$ en développant $(X_1 + X_2 + X_3)^3$ [Gou08] p.79.

- Calcul pratique de la symétrisation pour un polynôme symétrique homogène par la méthode de Waring [RDO93a] p.205 [Gou08] p.79. Si $(k_1, \dots, k_n)$ est le degré de P pour l'ordre lexicographique, on forme $P - a_k(\Sigma_1)^{k_1-k_2} \dots (\Sigma_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(\Sigma_n)^{k_n}$ et on recommence jusqu'à avoir fini.

⋆ $\sum X_1^2 X_2^2 X_3 = \Sigma_2\Sigma_3 - 3\Sigma_1\Sigma_4 + 5\Sigma_5$ pour $n \geq 5$ [Gou08] p.79.

⋆ Toute fonction $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ polynomiale invariante par conjugaison est un polynôme en les coefficients du polynôme caractéristique [FGN09a] p.172.

Développements

1. Borne de Bezout.
2. Théorème de Chevalley-Warning.

Leçon 143
Résultant. Applications.

Professeur encadrant : Félix Ulmer.

Remarques du Jury

Le caractère entier du résultant (il se définit sur $\mathbb{Z}$) doit être mis en valeur et appliqué.
La partie application doit montrer la diversité du domaine (par exemple en arithmétique, calcul d'intersection/ élimination, calcul différentiel, polynômes annulateurs d'entiers algébriques).
Il ne faut pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $p : (U, V) \mapsto AU + BV$ qui lie le résultant et le pgcd de A et B.

Exercice

1. Donner le polynôme minimal de $\alpha = \sqrt[3]{7}\,\sqrt[15]{2}$.

   Réponse : Le polynôme $\mathrm{Res}_Y(\mathrm{Res}_X(Z - XY, X^3 - 7), Y^{15} - 2)$ s'annule en α d'après les propriétés sur le résultant. On en déduit alors facilement le polynôme minimal de α. On peut procéder de même pour $(\sqrt[3]{7} - 1)/\sqrt{2}$ par exemple.

2. Montrer que l'ensemble de sentiers algébriques forme un anneau.

   Réponse : Soient α et β deux entiers algébriques et π_α, π_β leurs polynômes minimaux respectifs. Alors
   $$\mathrm{Res}_X(\mathrm{Res}_Y(Z - (X + Y), \pi_\alpha(Y)), \pi_\beta(X))$$
   est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui s'annule en $\alpha + \beta$. $\alpha + \beta$ est donc un entier algébrique. On procède de même pour montrer que $\alpha\beta$ est un entier algébrique.

Squelette du plan

On fixe un anneau commutatif unitaire intègre A et k un corps.

1. Notion de résultant.

   1.1 Matrice de Sylvester et Résultant.

   - Introduction de l'application linéaire de Bézout notée $\varphi_{(A,B)}$ et matrice de Sylvester [Mér06] p.377.
   - Résultant de deux polynômes comme déterminant de la matrice de sylvester [Mér06] p.378.
   - Le résultant est une fonction continue étant donné que $\mathrm{Res}(A, B) = \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q]$ [Szp09] p.574.
   - Le résultant est dans l'image de l'application de Bézout grace à la formule de la comatrice [Tau07] p.45 ou [Szp09] p.574.
   - Application : $\varphi : (V, U) \in \mathbb{Z}[X]/(A) \times \mathbb{Z}[X]/(B) \to AU + BV \in \mathbb{Z}[X]/(AB)$ est bijective si et seulement si le résultant de A et B vaut 1 [Szp09] p.575.
   - Le résultant est nul si et seulement si les polynômes ont un multiple commun de degré inférieur à $p + q$ (avec des notations standards) [Mér06] p.378.
   - Corollaire : si A est factoriel, alors le résultant est nul si et seulement si les polynômes ont un facteur commun de degré non nul dans $A[X]$ [Mér06] p.378.
   - $\star$ Le résultat précédent est faux si A n'est pas factoriel [Mér06] p.379.

   1.2 Résultant et racines.

   - Propriétés usuelles du résultant [SP99] p.143.
   - Lien entre le résultant de deux polynômes et la division euclidienne [SP99] p.142.
   - Formule de multiplicativité [Mér06] p.382.
   - Comportement du résultant vis à vis des morphismes d'anneaux [SP99] p.148.

- Lien entre le résultant et les racines des polynômes [Mér06] p.381.
- ⋆ Si p est un nombre premier impair, le résultant des polynômes cyclotomiques ϕ_p et ϕ_{2p} est 2^{p-1} [Szp09] p.587.
- Théorème de Rothstein-Trager [SP99] p.153.

1.3 Discriminant d'un polynôme.

- Discriminant comme résultant d'un polynôme et de son polynôme dérivé à constante multiplicative près [Szp09] p.568.
- ⋆ Discriminant des polynômes de degré 2 et de degré 3 [Cal06a] p.206.
- Dans k et pour un polynôme scindé, le discriminant est nul si et seulement si ce polynôme a une racine d'ordre de multiplicité au moins 2 [Mér06] p.383.
- Application : Condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de degré 3 admette 3 racines réelles [Gou94] p.79.
- Application : Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables [Gou94] p.208.

2. Utilisations du résultant.

2.1 Résultant et systèmes polynomiaux.

- Présentation du problème : éliminer les variables d'un système polynomial une par une pour ne se retrouver qu'avec une équation d'une seule variable, en théorie plus facile à résoudre. Méthode en pratique utilisable seulement pour un petit nombre de variables et un petit nombre d'équations [SP99] p.147.
- Théorème liant la racine commune à deux polynômes de plusieurs variables et racine du résultant [SP99] p.148.
- ⋆ Système illustrant que plusieurs cas sont à distinguer dans le théorème précédent [Szp09] p.149.
- ⋆ Exemple conséquent [SP99] p.150.

2.2 Intersections de courbes.

- Courbe algébrique plane [Szp09] p.588.
- Etant donnée une courbe dont les deux coordonnées sont paramétrées par deux polynômes à un variable, recherche d'un polynôme à deux variables dont cette courbe est exactement le lieu d'annulation [Mér06] p.385.
- Borne de Bezout [Szp09] p.592 ou [Mér06] p.386.
- Application à l'intersection de deux coniques [Szp09] p.589.

2.3 Entiers algébriques.

- Calcul d'un polynôme annulateur d'une somme et produit de nombres ou d'entiers algébriques [Szp09] p.571.
- ⋆ Calculs explicites pour $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ et $\beta = \sqrt{3}$ [Szp09] p.572.
- Les éléments algébriques forment un sous-corps et les entiers algébriques forment donc un sous-anneau.

3. Le résultant en analyse.

- Préliminaire : on identifie l'ensemble des polynômes unitaires de degré n et $\mathbb{R}^n$ *via* une bijection évidente.
- On introduit alors $\mu : (A, B) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mapsto AB \in \mathbb{R}^{p+q}$. μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale et on calcule que $D\mu(A, B) = \varphi(B, A)$. Ainsi, $\text{Res}(A, B)$ est le déterminant jacobien de μ.
- Si A et B sont premiers entre eux, leur résultant est non nul et avec le point précédent et le théorème d'inversion locale, il existe U un voisinage de A dans $\mathbb{R}^p$, V un voisinage de B dans $\mathbb{R}^q$ et W un voisinage de AB dans $\mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\mu : U \times V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Développements

1. Borne de Bezout.
2. Théorème de Rothstein-Trager.

Leçon 144

Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une leçon au spectre assez vaste. On peut y traiter de méthodes de résolutions, de théorie des corps (voire théorie de Galois si affinités), de topologie (continuité des racines) ou même de formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème de d'Alembert-Gauss et des applications des racines (valeurs propres, etc.). On pourra parler des applications de la réduction au calcul d'approximations de racines.
Notons le lien solide entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les valeurs propres de la matrice compagnon d'un polynôme permet d'entretenir ce lien. Les problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin, sont tout à fait appropriés à ce contexte.

Squelette du plan

Soient k un corps commutatif et n un entier naturel non nul. Pour tout $a \in K$, où K est une extension du corps k, on considère l'application $\mathrm{ev}_a : P \in k[X_1, \dots, X_n] \mapsto P(a) \in K$. Alors $a \in K$ est une racine de $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ si et seulement si $P \in \ker(\mathrm{ev}_a)$.

1. Arithmétique - Théorie des corps.
   1.1 Propriétés arithmétiques - Liens avec l'irréductibilité.
   - Relation racine divisibilité [RDO93a] p.173 ou [LFA78] p.139.
   - Notion de multiplicité d'une racine [RDO93a] p.175 ou [LFA78] p.143.
   - Formule de Taylor en caractéristique 0 [LFA78] p.142.
   - Application : lien entre la multiplicité d'une racine et l'évaluation des polynômes dérivés en caractéristique 0 [RDO93a] p.174 ou [LFA78] p.143.
   - ⋆ Contre exemple en caractéristique positive p du théorème précédent pour $(X-1)^p$ [RDO93a] p.175.
   - Notion de polynôme scindé [RDO93a] p.176.
   - ⋆ Si (P_n) est une famille de polynômes orthogonaux associée au poids π sur l'intervalle $]a, b[$, alors P_n admet n racines réelles simples dans $]a, b[$ [Rom05] p.265.
   - Existence de racine et irréductibilité.
   - Equivalence du résultat précédent en petit degré.

   1.2 Extensions algébriques.
   - Pour K une extension de k et $a \in K$, on note $k(a)$ le plus petit corps qui contient a et K [Cal06b] p.4 ou [Tau07] p.77.
   - Un élément $a \in K$ est algébrique sur k si ev_a est non injectif, transcendant sinon [Cal06b] p.11 ou [Tau07] p.79.
   - Extension algébrique [RDO93a] p.185 ou [Tau07] p.79.
   - Toute extension de degré finie est algébrique [Cal06b] p.18 ou [Tau07] p.80.
   - ⋆ Contre exemple au théorème précédent : on note p_n le n-ième nombre premier, $F_n = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ et $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p_n} : n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ et F est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré infini sur $\mathbb{Q}$ [Cal06b] p.31.
   - Si $a \in K$ est algébrique, alors $k(a) \simeq k[a]$ et $k(a)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie appelée le degré de a et une base de $k(a)$ est alors $(1, a, \dots, a^{n-1})$ [Cal06b] p.12 ou[RDO93a] p.183 ou [Tau07] p.30.

   1.3 Corps de rupture et de décomposition.

- Corps de rupture d'un polynôme irréductible [Cal06b] p.17 ou [Tau07] p.99.
- ⋆ Un corps de rupture de $X^5 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ est $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$.
- Notion de corps de décomposition d'un polynôme irréductible [Cal06b] p.36 et p.37 ou [Tau07] p103.
- Unicité du corps de décomposition [Cal06b] p.38 ou [Tau07] p.104.
- Degré du corps de décomposition [FG97] p.138 ou [Tau07] p.104.
- ⋆ Le corps de décomposition de $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ est $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ [Cal06b] p.39.
- ⋆ Les corps cyclotomiques sont des corps de décomposition et de rupture [Cal06b] p.88.
- Application : existence et unicité des corps finis [Tau07] p.106.
- Irréductibilité et existence de racines dans les extensions de corps [FG97] p.187.
- ⋆ Le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais sur aucun des $\mathbb{F}_p$ [FG97] p.187.

1.4 Clôtures algébriques.

- Corps algébriquement clos [Cal06a] p.90 ou [RDO93a] p.177.
- Un corps k est algébriquement clos si et seulement si les polynômes irréductibles de $k[X]$ sont de degré 1 [Cal06b] p.67 ou [RDO93a] p.178.
- ⋆ $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos, tout corps fini non plus [Cal06a] p.90 et [Cal06b] p.68.
- Théorème de d'Alembert-Gauss [Cal06b] p.67 ou [AM03] p.150.
- Clôture algébrique comme extension algébrique et algébriquement close [Cal06b] p.73.
- Théorème de Steinitz [Car81] p.198 ou [Tau07] p.102.
- Deux clôtures algébriques sont isomorphes [Cal06b] p.76.
- ⋆ Une clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^n}$ est $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^{k!}}$ [Cal06b] p.77.

2. Dénombrement, localisation et approximation des racines.

2.1 Localisation et approximation des racines réelles.

- Théorème de valeurs intermédiaires pour localiser les racines réelles et algorithme de dichotomie avec majoration de l'erreur [Rom04] p.56 et p.57.
- Théorème de Rolle pour localiser les racines réelles d'un polynôme dérivé [Rom04] p.137.
- Application : Si P est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' aussi.
- Suites de Sturm pour localiser et approcher les racines réelles [FG97] p.230.
- Méthode de Newton pour approcher les racines d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ [CLF99] p.204.

2.2 Etude des racines complexes.

- Le théorème de Gauss-Lucas [FGN01] p.229.
- Disques de Gershgorin pour la recherche de valeurs propres [FGN09a] p.80.

2.3 Dénombrement de racines.

- Théorème de Rouché version polynomial [AM03] p.243.
- ⋆ Les zéros du n-ième polynôme de Taylor de la fonction exponentielle sont dans $\mathbb{D}(0, 2n)$ [AM03] p.256.
- Théorème de Chevalley-Warning [Zav13] p.32.
- Un polynôme n'a pas plus de racine que son degré [RDO93a] p.175 ou [LFA78] p.139.
- C'est faux si on travaille avec un anneau plutôt qu'avec un corps. Par exemple, tout réel négatif a trois racines carrées quaternioniques car si $q = ai + bj + ck$ est un quaternion pur, $q^2 = -a - b - c$.
- Remarque : on verra un autre résultat utilisant le résultant.

3. Polynômes symétriques.

3.1 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $k[X_1, \ldots, X_n]$.

- Définition des polynômes symétriques [RDO93a] p.200 ou [Esc00] p.23.
- ⋆ Le polynôme $X_1^2 + X_2^2 + X_3^3$ est symétrique [Gou08] p.79.
- L'ensemble des polynômes symétriques forme une sous-algèbre de $A[X_1, \ldots, X_n]$ [RDO93a] p.200 ou [Esc00] p.23.
- Polynôme symétriques élémentaires [RDO93a] p.201 ou [Esc00] p.24.
- ⋆ $\Sigma_1 = X_1 + \ldots + X_n$ et $\Sigma_n = X_1 \ldots X_n$ [RDO93a] p.201.
- Les Σ_p sont homogènes d'ordre p et de degré partiel 1 par rapport à chaque variable [RDO93a] p.201.
- Notion de polynôme antisymétrique [RDO93a] p.200.
- ⋆ Le polynôme $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_j - X_i)$ est alterné non symétrique [RDO93a] p.201 ou [LFA78] p.157.
- Δ divise tous les polynômes antisymétriques.
- Pour tout polynôme alterné et toute permutation σ de $\mathfrak{S}_n$, ${}^{\sigma}P = \varepsilon(\sigma)P$.

3.2 Structure de l'ensemble des polynômes symétriques.

- Tout polynôme symétrique est un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires [Gou08] p.78 ou [Esc00] p.25. On peut apporter plus de précisions en définissant le poids d'un polynôme symétrique comme dans [RDO93a] p.203 et p.204.
- Application : théorème de d'Alembert-Gauss [Sam97] p.84 ou [Gou94] p.53.
- ⋆ $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = \Sigma_1^3 - 3\Sigma_1\Sigma_2 + 2\Sigma_3$ en développant $(X_1 + X_2 + X_3)^3$ [Gou08] p.79.
- Calcul pratique de la symétrisation pour un polynôme symétrique homogène par la méthode de Waring [RDO93a] p.205 [Gou08] p.79. Si $(k_1, \ldots, k_n)$ est le degré de P pour l'ordre lexicographique, on forme $P - a_k(\Sigma_1)^{k_1-k_2} \ldots (\Sigma_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(\Sigma_n)^{k_n}$ et on recommence jusqu'à avoir fini.
- ⋆ $\sum X_1^2X_2^2X_3 = \Sigma_2\Sigma_3 - 3\Sigma_1\Sigma_4 + 5\Sigma_5$ pour $n \geq 5$ [Gou08] p.79.
- ⋆ Toute fonction $\mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ polynomiale invariante par conjugaison est un polynôme en les coefficients du polynôme caractéristique.
- Sommes de Newton [FG97] p.184 ou [Esc00] p.28.

3.3 Relations coefficients-racines.

- Relations coefficients racines [Gou94] p.78 ou [Esc00] p.24.
- Théorème de Kronecker [FGN01] p.213.
- Continuité des racines par rapport aux coefficients [FG97] p.232.
- Relation $\mathcal{C}^\infty$ entre les racines et les coefficients dans le cas polynômes à racines simples [BMP04] p.12.

4. Résultant.

- Introduction de l'application linéaire de Bézout notée $\varphi_{(A,B)}$ et matrice de Sylvester [Mér06] p.377.
- Résultant de deux polynômes comme déterminant de la matrice de sylvester [Mér06] p.378.
- Le résultant est nul si et seulement si les polynômes ont ne multiple commun de degré inférieur à $p + q$ (avec des notations standards) [Mér06] p.378.
- Corollaire : si A est factoriel, alors le résultant est nul si et seulement si les polynômes ont un facteur commun de degré non nul dans $A[X]$ [Mér06] p.378.
- Lien entre le résultant et les racines des polynômes [Mér06] p.381.
- Discriminant comme résultant d'un polynôme et de son polynôme dérivé à constante multiplicative près [Szp09] p.568.
- ⋆ Discriminant des polynômes de degré 2 et de degré 3 [Cal06a] p.206.
- Dans k et pour un polynôme scindé, le discriminant est nul si et seulement si ce polynôme a une racine d'ordre de multiplicité au moins 2 [Mér06] p.383.
- Borne de Bézout sur le dénombrement de racines [Mér06] p.386.

Développements

1. Théorème de Chevalley-Warning.
2. Borne de Bézout.

Leçon 150

Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Professeur encadrant : Françoise Dal'bo.

Remarques du jury

Cette leçon demande un certain recul. Les actions ne manquent pas et selon l'action, on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites), d'autre part des algorithmes. On peut aussi, si l'on veut aborder un aspect plus théorique, faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres, ainsi que les adhérences d'orbites, lorsque la topologie s'y prête.
On pourra aussi travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

Squelette du plan
On se donne une k-espace vectoriel E, où k est un corps quelconque. Lorsqu'on parlera de topologie, on supposera toujours que k est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Action par équivalence.
   1.1 Rang d'une matrice comme invariant de l'action par équivalence.
   - Action de $\mathrm{GL}(m,k) \times \mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{M}(m,n,k)$ par équivalence [CG13] p.4.
   - Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible [Tau94] p.11.
   - Principe du pivot de Gauss [Com98] p.35.
   - Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang [CG13] p.3.
   - Remarque : Les orbites de cette action sont paramétrées par le rang [CG13] p.5.
   - Remarque : Le rang d'une matrice est invariant par extension de corps [FGN09a] p.86.
   - Cardinal d'un stabilisateur dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.8 et p.49.
   - Cardinal d'une orbite dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.9.
   - Remarque : La formule précédente est symétrique en m et en n car une matrice et sa transposée ont même rang. [CG13] p.9.

   1.2 Topologie des orbites.
   - Intérieur de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
   - Adhérence de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
   - Connexité de l'ensemble des matrices de rang fixé [Tau94] p.18 ou [CG13] p.31.
2. Réduction des endomorphismes : Action par conjugaison.
   2.1 Action sur les matrices diagonalisables.
   - Mise en place : Les spectres des matrices sont étudiés à permutation près [CG13] p.84.
   - Bijection entre $\mathcal{D}(n,\mathbb{C})/\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ [CG13] p.84.
   - Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude pour les matrices diagonalisables [CG13] p.85.
   - Remarque : Le polynôme minimal, lui, n'en est pas un [CG13] p.85.

   2.2 Action sur les matrices nilpotentes.
   - Diagramme de Young d'une orbite nilpotente [CG13] p.89.
   - Bloc de Jordan [CG13] p.91.
   - Existence d'une réduite de Jordan [CG13] p.92.
   - Classification des orbites nilpotentes [CG13] p.92.

   2.3 Réduction de Frobenius.
   - Sous-espaces cycliques [CG13] p.102.

- Caractérisations de cyclicité [CG13] p.103.
- Décomposition de Frobenius [CG13] p.105.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes facteurs invariants [CG13] p.107.
- Matrices semblables et extensions de corps [CG13] p.107.
- ⋆ Réduction de Frobenius d'une matrice de taille 5 [CG13] p.109.

2.4 Etude des orbites et des stabilisateurs.

- Mise en place : Pour cette action, l'orbite d'une matrice est appelée classe de similitude. Le stabilisateur est quant à lui appelé commutant.
- Les matrices diagonalisables sont les matrices dont la classe de similitude est fermé [CG13] p.86 ou [FGN09a] p.236.
- Les matrices nilpotentes sont les matrices dont la classe de similitude est adhérente à la matrice nulle [FGN09a] p.237.
- Les matrices scalaires sont les matrices dont la classe de similitude est bornée [FGN09a] p.235.
- Le commutant d'une matrice de taille n est au moins de dimension n [FGN09a] p.135.

3. Action par congruence.

3.1 Théorème d'inertie de Sylvester : Action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$.

- Théorème d'inertie de Sylvester et définition de la signature [Gri11] p.309.
- Interprétation de la signature [dSP10] p.104.
- ⋆ La signature de $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ est $(2,1)$ [Gri11] p.308.
- ⋆ La signature de $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$. Pour cela, on regarde q sur l'ensemble des matrices symétriques, puis sur l'ensemble des matrices antisymétriques [FGN10a] p.216.
- Si A est la matrice d'une forme quadratique q de signature (r,s) dans une base, r est le nombre de valeurs propres strictement positives de A et s le nombre de valeurs propres strictement négatives de A [FGN10a] p.217.
- Deux matrices réelles sont dans la même orbite dans l'action de congruence si et seulement si elles ont même signature [CG13] p.182.
- Application : sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.206.
- Le stabilisateur de l'identité est noté $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et ses éléments sont appelés matrices orthogonales [CG13] p.155.
- Stabilisateur des matrices $I_{(p,q)}$. Isomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.155 et p.211.
- Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.273.
- Orbite de l'identité pour cette action comme $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.155.
- Application : Décomposition polaire [CG13] p.202.
- Adhérence des orbites des matrices $I_{(p,q)}$ [CG13] p.155.

3.2 Réduction des endomorphismes normaux.

- Mise en place : Cette étude va permettre d'étudier les orbites et les stabilisateurs de l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$.
- Endomorphisme normal [Gou94] p.258.
- Réduction des endomorphismes normaux dans le cas hermitien [Gou94] p.258.
- Réduction des endomorphismes normaux dans le cas euclidien [Gou94] p.260.
- Cas particulier : Réduction des endomorphismes orthogonaux [Gou94] p.256 ou [Aud06] p.64.
- Cas particulier : Théorème spectral [Gou94] p.244 ou [Gri11] p.252.

- Réduction des formes quadratiques version différentielle [Rou09] p.209.

3.3 Action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{S}(n, \mathbb{C})$.

- Théorème de réduction des matrices symétriques sur $\mathbb{C}$ [CG13] p.151 ou [Gri11] p.308.
- Deux matrices complexes sont dans la même orbite sous l'action par congruence si et seulement si elles ont même rang [CG13] p.151.

3.4 Action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ sur $\mathcal{S}(n, \mathbb{F}_q)$.

- On travaille en caractéristique différente de 2.
- Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q^*$ et indice de ${\mathbb{F}_q^*}^2$ dans $\mathbb{F}_q^*$ [Per96] p.74 et p.130.
- Résolution de l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ dans les corps finis [CG13] p.152 ou [Per96] p.130.
- Deux matrices sont dans la même orbite sous l'action par congruence sur un corps fini si et seulement si elles ont même discriminant [CG13] p.151 ou [Per96] p.130.
- ⋆ Matrices intervenant dans la démonstration de la loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.
- Loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.

Développements

1. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.
2. Loi de réciprocité quadratique.
3. Réduction des endomorphisme normaux.

Leçon 151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du jury

Dans cette leçon, il est important de bien connaître les théorèmes fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier, ce qui rend la leçon plus difficile qu'on ne le croit.
Des questions élémentaires comme "un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? " peuvent dérouter un candidat.
Les diverses caractérisations du rang trouvent bien leur place ainsi que, pour les candidats plus chevronnés, l'utilisation du degré d'une extension dans la théorie des corps.

Squelette du plan

On se donne k un corps.

1. Espaces vectoriels de dimension finie.

1.1 Familles génératrices, familles libres, bases.

- Familles génératrices et familles libres [Gri11] p.10 et p.11.
- Caractérisation des familles génératrices et des familles libres *via* l'application associée à une famille [Gri11] p.13.
- Caractérisation des familles libres *via* le déterminant [Gri11] p.123.
- Espace vectoriel de dimension finie [Gri11] p.11.
- ⋆ k^n est un k-espace vectoriel de dimension finie [Gri11] p.11.
- ⋆ $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie [Gri11] p.11.
- Sous-famille d'une famille libre [Gri11] p.14.
- Sur-famille d'une famille génératrice [Gri11] p.14.
- Comportement des familles libres et liées vis a vis et de la surjectivité et de l'injectivité des applications linéaires [Gri11] p.61.
- Base d'un espace vectoriel de dimension finie [Gri11] p.13.
- Caractérisation des bases *via* l'application associée à une famille [Gri11] p.13.
- Caractérisation des bases *via* le déterminant [Gri11] p.123.
- ⋆ Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ [Gri11] p.13.
- Théorème de la base incomplète [Gri11] p.15.
- Application : Existence de supplémentaire pour tout sous-espace dans un espace de dimension finie.
- Codimension d'un sous-espace [Gou94] p.114.
- Codimension et supplémentaires [Gou94] p.114.

1.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel.

- Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal [Gri11] p.17.
- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie [Gri11] p.17.
- ⋆ Le commutant d'une matrice de taille n est au moins de dimension n [FGN09a] p.135.
- ⋆ Pour u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, $k[u]$ est un espace vectoriel de dimension le degré du polynôme minimal de u [FGN09a] p.160.

- ⋆ L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de degré n [Gou08] p.358.
- Remarque : La dimension d'un espace vectoriel dépend fortement du corps de base k. Par exemple, $\mathbb{R}$ est de dimension 1 sur lui-même mais est de dimension infinie sur $\mathbb{Q}$. De même, $\mathbb{C}$ est de dimension 1 sur lui-même et de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
- Application : Cardinaux des familles libres et des familles génératrices [Gri11] p.18 et p.19.
- Théorème de Frattini [Deb16] p.243.
- Dimension d'un produit d'espaces vectoriels [Gri11] p.18.
- ⋆ Dimensions de $k_n[X]$, $\mathcal{M}(p,n,k)$, $\mathcal{S}(n,k)$ et $\mathcal{A}(n,k)$ [Gri11] p.65.

1.3 Sous-espaces vectoriels.

- Les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont eux-même de dimension finie [Gri11] p.19.
- Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels [Gri11] p.24.
- Condition nécessaire et suffisante de mise en somme directe *via* les bases [Gri11] p.26.
- Condition nécessaire et suffisante de mise en somme directe par la dimension [Gri11] p.26.
- Cas particulier du cas de deux sous-espaces vectoriel [Gri11] p.23 ou [Gou94] p.112.
- Existence de supplémentaires communs [FGN01] p.239.
- Application : Critère de diagonalisabilité par la somme directe [Gri11] p.164.
- Application : Critère de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique [Gri11] p.166.

1.4 Dimension finie et espaces vectoriels normés.

- Toutes les normes sont équivalentes sur k^n [SR08] p.96.
- Un k-espace vectoriel de dimension finie n est homéomorphe à k^n [SR08] p.97.
- Application : Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie [SR08] p.97.
- Application : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel est complet [SR08] p.98.
- Application : En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés [SR08] p.98.
- Théorème de Riesz [SR08] p.99.

2. Rang d'un endomorphisme et d'une matrice.

2.1 Rang d'une application linéaire et d'une matrice.

- Rang d'une application linéaire [Gri11] p.59.
- ⋆ Rang d'un projecteur [Gou94] p.122.
- ⋆ Rang de la différentielle sur le voisinage d'un point [SR08] p.228.
- Rang d'un endomorphisme et degré de son polynôme minimal [FGN09a] p.156.
- Rang d'une famille de vecteurs [Gri11] p.80.
- Rang d'une matrice [Gri11] p.80.
- Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de ses matrices dans les différentes bases [Gri11] p.80.
- Caractérisation du rang par le déterminant [Gri11] p.127 ou [Gou94] p.122.
- Application : Une matrice et sa transposée ont même rang [Gri11] p.81 ou [Gou94] p.122.
- ⋆ Exemple d'une matrice de taille $(3,5)$ [Gri11] p.81.
- Rang d'une somme d'endomorphismes [Tau94] p.9 ou [Gou94] p.116.
- Rang d'un produit de matrices [Tau94] p.9.

2.2 Calcul du rang.

- Le rang est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible [Tau94] p.11.
- Pivot de Gauss : Opération sur les lignes et les colonnes et invariance du rang [Gri11] p.48 et [Gou94] p.121.
- ⋆ Rang d'une matrice de taille $(3, 4)$ [Gou94] p.121.

2.3 Rang d'une matrice comme invariant de l'action par équivalence.

- Action de $\mathrm{GL}(m, k) \times \mathrm{GL}(n, k)$ sur $\mathcal{M}(m, n, k)$ par équivalence [CG13] p.4.
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang [Tau94] p.11 ou [CG13] p.3.
- Corollaire : Théorème du rang [Gri11] p.62.
- Application : Equivalence entre injecivité, surjectivité et bijectivité en même dimension finie [Gri11] p.63.
- Application : Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ [CG13] p.274.
- Application : Théorème de Lagrange [Dem06] p.22.
- ⋆ Le théorème précédent est faux en dimension infinie comme le montre la dérivation sur l'ensemble des polynômes et la multiplication par X également sur l'ensemble des polynômes [Gri11] p.63.
- Remarque : Les orbites de cette action sont paramétrées par le rang [CG13] p.5.

2.4 Etude des orbites et des stabilisateurs.

- Cardinal d'un stabilisateur dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.8 et p.49.
- Cardinal d'une orbite dans le cas où k est un corps fini [CG13] p.9.
- Remarque : La formule précédente est symétrique en m et en n car une matrice et sa transposée ont même rang [CG13] p.9.
- Intérieur de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217.
- Adhérence de l'ensemble des matrices de rang fixé [FGN09a] p.217 ou [Gou94] p.185.
- Connexité par arcs de l'ensemble des matrices de rang fixé [Tau94] p.18 ou [CG13] p.30.

3. Dualité

3.1 Espace dual.

- Espace dual et bidual d'un espace vectoriel [Gou94] p.126.
- Formes linéaire coordonnées [Gou94] p.127.
- Base duale [Gou94] p.127.
- Application : Un espace vectoriel a même dimension finie que son espace dual [Gri11] p.83.
- Un espace vectoriel est canoniquement isomorphe à son bidual [Gou94] p.127.
- Base préduale [Gou94] p.127.
- Calcul de la base préduale [Gou94] p.130.
- ⋆ Calcul d'une base préduale en dimension 3 [Gou94] p.131.

3.2 Orthogonalité.

- Orthogonaux et polaires [Gou94] p.128.
- Stabilité de l'orthogonal et du polaire par espace vectoriel engendré [Gou94] p.128.
- Dimensions des orthogonaux et des polaires [Gou94] p.128.
- Equation d'un sous-espace vectoriel en dimension finie [Gou94] p.128.
- Orthogonal d'un hyperplan [Gou94] p.129.

3.3 Transposée.

- Application transposée [Gou94] p.129.

- Matrice d'une application transposée [Gou94] p.129.
- Un endomorphisme et sa transposée ont même rang [Gou94] p.129.
- Sous-espaces stables et applications transposée [Gou94] p.130.

4. Extensions de corps et dimension.
   - Extension de corps [Per96] p.65 ou [Tau07] p.77.
   - Le rang est invariant par extension de corps [FGN09a] p.86.
   - Structure d'espace vectoriel pour une extension de corps [Per96] p.65 ou [Tau07] p.77.
   - Dans le cas où un corps et son extension sont des corps finis, cardinal du sur-corps [Per96] p.65.
   - La caractéristique d'un corps fini est un nombre premier [Per96] p.72.
   - Application : Le cardinal d'un corps fini est une puissance d'un nombre premier [Per96] p.72.
   - Degré d'une extension [Per96] p.65 ou [Tau07] p.77.
   - Multiplicativité des degrés [Per96] p.65 ou [Tau07] p.78.
   - Extensions algébriques [Per96] p.66 ou [Tau07] p.79.
   - Caractérisation des éléments algébriques et dimension de l'extension de corps associée [Per96] p.66.
   - ⋆ Degré des corps cyclotomiques [Per96] p.83 ou [Tau07] p.83.
   - Un polynôme irréductible reste irréductible dans toute extension de degré première avec son propre degré [Per96] p.79.
   - ⋆ $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}(i)$ car il l'est sur $\mathbb{Q}$ [Per96] p.79.
   - Remarque : Si les deux degrés ne sont pas premiers entre eux le résultat est faux. Par exemple, $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Q}(i)$ [Per96] p.79.

Développements

1. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.
2. Théorème de Frattini.

Leçon 152

Déterminant. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du jury

Il s'agit encore d'une leçon où les résultats abondent et où le candidat devra faire des choix. On doit pouvoir, dans cette leçon, commencer par définir correctement le déterminant. Beaucoup de candidats entament la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer. Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée.
L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle.
Le calcul explicite est important, toutefois, le jury ne peut se contenter que d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! De même il est envisageable que des candidats s'intéressent aux calculs de déterminant sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.
Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial.

Exercices et questions

1. Soit M une matrice carrée à coefficients entiers. Montrer que son inverse est à coefficients entiers si et seulement si $\det(M)$ vaut -1 ou 1.

   Réponse : Immédiat avec la formule de la comatrice.

2. Soit L un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ tel que $\mathbb{Z}^n/L$ est fini. Soit $\mathcal{B}$ une $\mathbb{Z}$-base de L. Montrer que $\det(\mathcal{B}) = \#(\mathbb{Z}^n/L)$.

3. Démontrer l'inégalité de Hadamard.

   Réponse : Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt.

4. Soit θ un nombre algébrique. Montrer que θ est un entier algébrique si et seulement si $\mathbb{Z}[\theta]$ a une famille génératrice finie.

   Réponse : L'implication directe est immédiate. Pour la réciproque, on regarde la matrice dans une famille génératrice finie de la multiplication par θ. Le polynôme caractéristique de cette matrice a un zéro non trivial car la matrice a un élément non nul dans son noyau. On en déduit que l'ensemble des entiers algébriques forme un anneau.

Squelette du plan

On se fixe un corps k.

1. Notion de déterminant.

   1.1 Espace des formes n-linéaires alternées en dimension n.

   - Application multilinéaire. Applications multilinéaires antisymétriques et alternées [Gou94] p.134.
   - Antisymétrisation d'une forme linéaire [Gou94] p.135.
   - Espace des formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n [Gou94] p.135.
   - Déterminant d'une famille de vecteurs [Gou94] p.135.
   - Formule de changement de base [Gou94] p.135.
   - Familles liées et déterminant [Gou94] p.135.
   - Déterminant d'un endomorphisme [Gou94] p.135.

- Déterminant d'une composition d'endomorphismes [Gou94] p.136.

1.2 Déterminant d'une matrice carrée.

- Déterminant d'une matrice carrée [Gri11] p.113 ou [Gou94] p.136.
- Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Application : Déterminant et valeurs propres [Gri11] p.173.
- Application : Déterminant de l'exponentielle [Laf10] p.36.
- Invariance du déterminant par transposition [Gri11] p.114 ou [Gou94] p.136.
- Déterminant d'une matrice carrée et opérations sur les lignes et les colonnes [Gri11] p.115.
- Déterminant d'un produit de matrices carrées [Gri11] p.119 ou [Gou94] p.136.
- Application : Le déterminant est un invariant de similitude [Gri11] p.120.
- Lien entre le déterminant d'un endomorphisme dans une base et déterminant de la matrice associée.
- Remarque : En dimension 3, le déterminant est une forme quadratique de signature $(2, 1)$ [CG13] p.273.

1.3 Calcul du déterminant.

- Mineurs et cofacteurs d'une matrice [Gri11] p.115 ou [Gou94] p.136.
- Mineurs principaux d'une matrice [Gou94] p.136.
- Développement selon une ligne ou une colonne [Gri11] p.116 ou [Gou94] p.136.
- Ajout d'une combinaison linéaire de lignes à une ligne ou de colonnes à une colonne [Gri11] p.118.

⋆ Déterminant d'une matrice stochastique [FGN09a] p.35.

⋆ Déterminant de Vandermonde [Gou94] p.137.

- Application : Caractérisation des endomorphismes nilpotents par la trace [FGN09a] p.111.

⋆ Déterminant de Cauchy [Gou94] p.144.

- Comatrice d'une matrice [Gri11] p.121 ou [Gou94] p.137.
- Rang de la comatrice [FGN09a] p.37 ou [Gou94] p.147.
- Matrices égales à leur comatrice [Gou94] p.147.
- Formule de la comatrice [Gri11] p.121 ou [Gou94] p.137.

⋆ Inverse d'une matrice de taille 2 [Gou94] p.137.

- Déterminant d'une matrice par blocs [Gou94] p.136.

1.4 Interprétations du déterminant.

i En tant que volume.

- Lien entre le volume et le déterminant en dimension 2 [Gri11] p.128.
- Lien entre le volume et le déterminant en dimension quelconque [Gri11] p.131.
- Remarque : On énoncera plus loin une inégalité isopérimétrique où intervient le déterminant, à savoir l'inégalité de Hadamard.

ii En tant que distance.

- Matrice et déterminant de Gram [Gou94] p.259.
- Condition nécessaire et suffisante pour q'une matrice de Gram soit définie [Gou94] p.259.
- Distance d'un point à un sous-espace dans un espace préhilbertien [Gou94] p.259.

⋆ Le minimum de la fonction $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 \, dx$ vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$ [Gou94] p.262.

2. Régularité de la fonction déterminant - Intervention en intégration.
   2.1 Caractère polynomial.
   - Le déterminant est une fonction polynomiale [Tau94] p.104.
   - $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ [Tau94] p.104.
   - L'ensemble des matrices cycliques est ouvert [FGN09a] p.220.
   - Deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{R}$ sont semblables sur $\mathbb{C}$ [Gou94] p.158.
   - Le rang est semi-continu inférieurement [Gou94] p.185.
   - Remarque : Le caractère polynomial du déterminant interviendra lorsqu'on étudiera la notion de polynôme caractéristique.

   2.2 Différentiation.
   - Différentielle du déterminant [Rou09] p.83.
   - Application : Formule du wronskien [Rou09] p.83.
   - Application : $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$ et son espace tangent en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle [Rou09] p.284.
   - Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ [CG13] p. 273.

   2.3 Formule du changement de variables.
   - Formule de changement de variables [BP12] p.254.
   - Application : Inégalité de Hadamard [CLFM95] p.203.

3. Déterminant et algèbre linéaire.
   3.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires
   - Système linéaire [Gri11] p.141.
   - Système de Cramer [Gri11] p.142.
   - Formules de Cramer [Gri11] p.143.
   - Système linéaire à paramètres [Gri11] p.147.

   3.2 Polynôme caractéristique.
   - Polynôme caractéristique [Gri11] p.157.
   - Remarque : Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de l'endomorphisme associé. Un endomorphisme n'a donc qu'un nombre fini de valeurs propres en dimension finie [Gri11] p.157.
   - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité en fonction du polynôme caractéristique [Gou94] p.162.
   - Comatrice et classe de conjugaison [Tau94] p.76.
   - $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ [Gou94] p.181.
   - Invariance du polynôme caractéristique par produit [Gou94] p.184 ou [Tau94] p.78.
   - Comatrice d'un produit [FGN09a] p.41.
   - Spectre de la comatrice [FGN09a] p.39.
   - ⋆ Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon [Gou94] p.175.
   - Théorème de Cayley-Hamilton [Gou94] p.174.
   - Application : La comatrice d'une matrice est un polynôme en cette matrice [FGN09a] p.40.
   - L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ [FGN09a] p.218.
   - Remarque : Lorsque $k = \mathbb{C}$, le théorème précédent permet de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton [Gou94] p.184.

   3.3 Etude des familles libres, liées et des bases.

- Caractérisations des bases par le déterminant [Gri11] p.123.
- Caractérisation des familles libres par le déterminant [Gri11] p.123.
- Caractérisation du rang par le déterminant [Gri11] p.127.

4. Résultant.

4.1 Matrice de Sylvester.

- Introduction de l'application linéaire de Bézout notée $\varphi_{(A,B)}$ et matrice de Sylvester [Mér06] p.377.
- Résultant de deux polynômes comme déterminant de la matrice de sylvester [Mér06] p.378.
- Le résultant est une fonction continue étant donné que $\text{Res}(A, B) = \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q]$ [Szp09] p.574.
- Le résultant est dans l'image de l'application de Bézout grace à la formule de la comatrice [Tau07] p.45 ou [Szp09] p.574.
- Application : $\varphi : (V, U) \in \mathbb{Z}[X]/(A) \times \mathbb{Z}[X]/(B) \to AU + BV \in \mathbb{Z}[X]/(AB)$ est bijective si et seulement si le résultant de A et B vaut 1 [Szp09] p.575.
- Le résultant est nul si et seulement si les polynômes ont un multiple commun de degré inférieur à $p + q$ (avec des notations standards) [Mér06] p.378.
- Corollaire : si A est factoriel, alors le résultant est nul si et seulement si les polynômes ont un facteur commun de degré non nul dans $A[X]$ [Mér06] p.378.

⋆ Le résultat précédent est faux si A n'est pas factoriel [Mér06] p.379.

4.2 Résultant et racines de polynômes.

- Propriétés usuelles du résultant [SP99] p.143.
- Lien entre le résultant de deux polynômes et la division euclidienne [SP99] p.142.
- Formule de multiplicativité [Mér06] p.382.
- Comportement du résultant vis à vis des morphismes d'anneaux [SP99] p.148.
- Lien entre le résultant et les racines des polynômes [Mér06] p.381.

⋆ Si p est un nombre premier impair, le résultant des polynômes cyclotomiques ϕ_p et ϕ_{2p} est 2^{p-1} [Szp09] p.587.

4.3 Utilisations du résultant.

i Eléments algébriques.

- Calcul d'un polynôme annulateur d'une somme et produit de nombres ou d'entiers algébriques [Szp09] p.571.

⋆ Calculs explicites pour $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ et $\beta = \sqrt{3}$ [Szp09] p.572.

- Les éléments algébriques forment un sous-corps et les entiers algébriques forment donc un sous-anneau.

ii Etude de courbes planes.

- Courbe algébrique plane [Szp09] p.588.
- Etant donnée une courbe dont les deux coordonnées sont paramétrées par deux polynômes à une variable, recherche d'un polynôme à deux variables dont cette courbe est exactement le lieu d'annulation [Mér06] p.385.
- Borne de Bézout sur l'intersection de courbes planes [Szp09] p.592 ou [Mér06] p.386.
- Application à l'intersection de deux coniques [Szp09] p.589.

iii Elimination dans les systèmes polynomiaux.

- Présentation du problème : éliminer les variables d'un système polynomiale une par une pour ne se retrouver qu'avec une équation d'une seule variable, en théorie plus facile à résoudre. Méthode en pratique utilisable seulement pour un petit nombre de variables et un petit nombre d'équations [SP99] p.147.

- Théorème liant la racine de racines commune à deux polynômes de plusieurs variables et racine du résultant [SP99] p.148.

⋆ Système illustrant que plusieurs cas sont à distinguer dans le théorème précédent [Szp09] p.149.

⋆ Exemple conséquent [SP99] p.150.

iv En géométrie différentielle.

- Préliminaire : on identifie l'ensemble des polynômes unitaires de degré n et $\mathbb{R}^n$ *via* une bijection évidente.
- On introduit alors $\mu : (A, B) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mapsto AB \in \mathbb{R}^{p+q}$. μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale et on calcule que $D\mu(A, B) = \varphi(B, A)$. Ainsi, $\operatorname{Res}(A, B)$ est le déterminant jacobien de μ.
- Si A et B sont premiers entre eux, leur résultant est non nul et avec le point précédent et le théorème d'inversion locale, il existe U un voisinage de A dans $\mathbb{R}^p$, V un voisinage de B dans $\mathbb{R}^q$ et W un voisinage de AB dans $\mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\mu : U \times V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Développements

1. Borne de Bézout.
2. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.

Leçon 153

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Application à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du jury

Cette leçon est souvent choisie pour son lien avec la réduction, toutefois, le jury ne souhaite pas que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes.
Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $K[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.
L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).

Remarques

1. Mettre pleins d'exemples.
2. Savoir illustrer les résultats mis dans le plan.

Exercices et questions

1. Donner une matrice diagonalisable dans une extension du corps de ses coefficients mais non semi-simple.

   Réponse : Il suffit de considérer la matrice

   $$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{F}_2(X)).$$

2. Donner un endomorphisme semi-simple non diagonalisable.

   Réponse : L'endomorphisme suivant convient

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Donner un endomorphisme simple.

   Réponse : L'endomorphisme de la question précédente convient.

4. Donner deux matrices A et B telles que $\exp(A+B)$ et $\exp(A)\exp(B)$ soient différentes.

   Réponse : par exemple, on peut considérer

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On considère une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie. Montrer que G le groupe des inversibles est un ouvert dense.

Squelette du plan

On fixe k un corps commutatif de caractéristique nulle et E un k-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Polynômes d'endomorphismes.

   1.1 La k-algèbre $k[u]$.

   - Mise en place : On se donne u un endomorphisme de E.
   - Morphisme d'algèbres φ_u d'évaluation de u par les polynômes de $k[X]$ [Cog00] p.271.
   - Idéal annulateur I_u associé à φ_u [Cog00] p.271.
   - Remarque : Comme E est de dimension finie, I_u est un idéal non trivial de $k[X]$ [Cog00] p.271.
   - Polynôme minimal π_u de u [Cog00] p.271.
   - Le polynôme minimal est invariant par extension de corps [FGN09a] p.174 ou [CG13] p.102.
   - L'image de φ_u est noté $k[u]$ [Cog00] p.272.
   - D'après le théorème d'isomorphisme, $k[u] \simeq k[X]/(\pi_u)$. Le théorème chinois donne alors la structure de $k[u]$ [BMP04] p.161.
   - $k[u]$ est un k-espace vectoriel de dimension $\deg \pi_u$ [Cog00] p.272.
   - Polynôme minimal d'une matrice [Cog00] p.272.
   - Deux matrices semblables ont même polynôme minimal [Cog00] p.272.
   - ⋆ La réciproque du résultat précédent est faux. Exemple de matrices de taille 4 [Cog00] p.272.
   - Une matrice et sa transposée ont même polynôme minimal [Cog00] p.273.
   - Remarque : Les polynômes annulateurs permettent de calculer par division euclidienne des puissances de matrices, ce qui peut servir à chercher des mesures invariantes de chaines de Markov.
   - Lemme des noyaux [Cog00] p.274.

   1.2 Un élément de l'idéal annulateur : Le polynôme caractéristique.

   - Polynôme caractéristique d'une matrice [Cog00] p.284.
   - ⋆ Polynôme caractéristique d'une matrice par blocs [Tau94] p.65.
   - $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ [Gou94] p.181.
   - Invariance du polynôme caractéristique par produit [Gou94] p.184.
   - Coefficients du polynôme caractéristique [Cog00] p.285.
   - Le polynôme caractéristique est invariant par extension de corps [CG13] p.102.
   - Valeurs propre d'un endomorphisme [Gri11] p.155.
   - Valeurs propres et polynômes annulateurs [Gri11] p.176.
   - Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique [Gri11] p.157.
   - ⋆ Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon [Gou94] p.177.
   - Théorème de Cayley-Hamilton [Gou94] p.176.
   - Application : La comatrice d'un endomorphisme est un polynôme en cet endomorphisme [FGN09a] p.40.
   - Réduction des endomorphismes normaux [Gou94] p.260.
   - Indice d'un endomorphisme [Gou94] p.192.
   - Ordre d'une valeur propre dans le polynôme minimal *via* l'indice [Gou94] p.193.

   1.3 Sous-espaces stables.

   - Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme [Cog00] p.277.

- Si u et v commutent, $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v [Cog00] p.278.
- Remarque : le résultat précédent est en particulier vrai pour les éléments de $k[u]$ [Cog00] p.278.
- Polynôme minimal et restriction à un sous-espace stable [Cog00] p.278.
- Polynôme minimal d'une somme directe [Cog00] p.278.
- Polynôme caractéristique et restriction à un sous-espace stable [Cog00] p.287.
- Endomorphisme simple [CG15] p.79.
- Un endomorphisme est simple si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible [CG15] p.79.
- Endomorphisme semi-simple [FGN09a] p.80 ou [FGN09a] p.144.
- ⋆ Caractérisations des endomorphismes semi-simples [FGN09a] p.145.
- Remarque : Le théorème précédent reste vrai si k est un corps parfait mais peut-être mis en défaut sinon [CG13] p.82.
- Remarque : Ce théorème est à comparer au théorème de Maschke sur les représentations linéaires des groupes finis [CG15] p.448.
- Remarque : Réduire un endomorphisme revient à chercher des sous-espaces qui lui sont stables.

1.4 Exponentielle d'endomorphisme.

- Série entière d'endomorphismes [Gou94] p.182.
- Exponentielle d'endomorphisme [Gou94] p.182.
- Si u est un endomorphisme, $\exp(u)$ est un polynôme en u [Zav13] p.49.
- Exponentielle d'endomorphisme et classe de similitude [Gou94] p.182.
- Application : déterminant des exponentielles d'endomorphisme [Gri11] p.375.
- Exponentielle dans le cas où les endomorphismes commutent [Gou94] p.182.
- Si les deux matrices ne commutent pas, la proposition précédente peut être mise en défaut. Exemple des deux matrices usuelles associées [Gou94] p.185.
- Application : Inversion des exponentielles d'endomorphismes [Gri11] p.374.
- Application : Résolution des équations différentielles ordinaires d'ordre 1 [Gri11] p.376 ou [Gou08] p.361.

2. Diagonalisation des endomorphismes.

2.1 Critère de diagonalisation.

- Endomorphisme diagonalisable [Cog00] p.302.
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité en fonction du polynôme caractéristique et du polynôme minimal [Cog00] p.303.
- Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable [Cog00] p.304.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé simple qui l'annule [Cog00] p.304.
- Endomorphisme diagonalisable et restriction à un sous-espace propre [Cog00] p.304.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est semi-simple et son polynôme minimal est scindé [FGN09a] p.144.
- ⋆ Dans le cas d'un plan réel, une rotation d'angle n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais ses sous-espaces stables ont chacun un supplémentaire stable [Cog00] p.326.
- ⋆ Matrices semi-simples réelles [Cog00] p.321.

2.2 Diagonalisation simultanée.

- Commutation et stabilité des sous-espaces propres [BMP04] p.159.

- ⋆ Résolution d'une équation matricielle sur $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ [FGN09a] p.159.
- Il existe un vecteur propre commun pour tous les éléments d'une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux [FGN09a] p.114.
- Equivalence entre la diagonalisation simultanée d'une famille d'endomorphisme diagonalisables et la commutativité deux à deux [FGN09a] p.98.
- Application : $\mathrm{GL}(n,k)$ et $\mathrm{GL}(m,k)$ sont isomorphes si et seulement si $n=m$ [BMP04] p.204.
- Application : Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de degré 1 [Ser98] p.39.
- Remarque : Ce résultat de diagonalisation nous servira pour l'unicité dans la décomposition de Dunford.

2.3 Décomposition de Dunford.

- Décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- Calcul pratique de la décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- ⋆ Décomposition de Dunford d'une matrice de taille 3 [Gri11] p.205.
- Décomposition de Dunford de l'exponentielle d'endomorphisme [BMP04] p.215.
- Homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents *via* l'exponentielle [BMP04] p.174.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son exponentielle l'est [BMP04] p.215.
- Calcul de l'exponentielle de matrice *via* la décomposition de Dunford [Gou94] p.194.
- ⋆ Exponentielle d'une matrice de taille 3 [Gou94] p.197.
- L'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ [Cog00] p.331.

3. Trigonalisation des endomorphismes.

3.1 Généralités sur la trigonalisation.

- Endomorphisme trigonalisable [Cog00] p.310.
- Endomorphisme trigonalisable et polynôme annulateur [Cog00] p.310.
- Polynôme annulateur scindé et endomorphisme trigonalisable [Cog00] p.310.
- Remarque : Toute matrice est trigonalisable sur un corps algébriquement clos [Cog00] p.311.

3.2 Décomposition de Jordan.

- Dimension des noyaux des endomorphismes nilpotents [CG13] p.88.
- Diagramme de Young d'une matrice nilpotente [CG13] p.89.
- Bloc de Jordan [CG13] p.91.
- Théorème de Jordan pour les endomorphismes nilpotents [CG13] p.94.
- Remarque : Le cas général s'obtient en appliquant le lemme de décomposition des noyaux au polynôme caractéristique.
- ⋆ Décomposition de Jordan d'une matrice de taille 4 [Gri11] p.206.

4. Invariants de similitude - Réduction de Frobenius.

4.1 Polynôme minimal ponctuel.

- Polynôme minimal ponctuel [CG13] p.101.
- Lien entre le polynôme minimal ponctuel et le polynôme minimal de l'endomorphisme mis en jeu [CG13] p.101.
- Le polynôme minimal coïncide avec un polynôme minimal ponctuel [CG13] p.102.

4.2 Etude des endomorphismes cycliques.

- Sous-espace cyclique [CG13] p.102.

- Endomorphisme cyclique [CG13] p.103.
- Caractérisation des endomorphismes cycliques [CG13] p.103.
- Le commutant d'un endomorphisme est toujours au moins de dimension n [FGN09a] p.161.
- Le commutant $\mathcal{C}(u)$ d'un endomorphisme u est de dimension n si et seulement si u est cyclique et dans ce cas il est coïncide avec $k[u]$ [FGN09a] p.160.
- Existence d'un supplémentaire stable pour un sous-espace cyclique [CG13] p.104.

4.3 Invariants de similitude.

- Décomposition de Frobenius [CG13] p.105.
- La décomposition est unique [CG13] p.105.
- Facteurs invariants d'un endomorphisme [CG13] p.107.
- Les facteurs invariants sont des invariants de similitude [CG13] p.107.
- Les facteurs invariants sont invariants par extension de corps [CG13] p.107.
- Méthode de calcul des facteurs invariants [BMP04] p.286 et p.301.

$\star$ Facteurs invariants d'une matrice à coefficients rationnels de taille 3 [BMP04] p.319.

$\star$ Invariants de similitude pour le polynôme caractéristique X^4 [BMP04] p.312.

Développements

1. Endomorphismes semi-simples.
2. Réduction des endomorphismes normaux.

Leçon 154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du jury

Les candidats doivent s'être interrogés sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées de cas sont les bienvenues, par exemple le cas d'une matrice diagonalisable, le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.
La décomposition de Frobenius trouve tout à fait sa place dans la leçon. Notons qu'il a été ajouté à l'intitulé la notion de familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutant entre eux ou sur la théorie des représentations.

Remarques

Il faut maitriser le contenu de son plan.

Exercices et questions

1. Donner un endomorphisme qui admet un sous-espace stable qui lui-même n'admet pas de supplémentaire stable.

   Réponse : La matrice suivante convient
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit M une matrice sui admet un sous-espace stable. Qu'en est-il de $\exp(M)$?

   Réponse : Comme M et $\exp(M)$ commutent, ce sous-espace est aussi stable par $\exp(M)$.

3. Donner le lien entre le polynôme minimal d'un endomorphisme et son polynôme minimal restreint à un sous-espace stable.

   Réponse : Le polynôme minimal restreint divise le polynôme minimal. De plus, le polynôme minima restreint peut-être scindé simple sans que le polynôme minimal le soit comme le monter les blocs de Jordan.

4. Que dire des endomorphismes semi-simples sur $\mathbb{R}$?

   Réponse : Ce sont les endomorphismes diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

5. Donner la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Réponse :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Donner des exemples de groupes résolubles (Lie-Kolchin a été proposé en développement).

   Réponse : Les groupes abéliens, $\mathfrak{S}_4$ car
   $$\{\mathrm{id}\} \lhd V_4 \lhd \mathfrak{A}_4 \lhd \mathfrak{S}_4.$$

   Par contre, $\mathfrak{S}_n$ n'est pas résoluble pour tout n entier supérieur à 5.

7. Sur quoi repose le théorème de Frobenius ?

   Réponse : Polynôme ponctuel et étude des endomorphismes cycliques.

8. Un endomorphisme nilpotent est-il semi-simple ?

   Réponse : S'il n'est pas nul, non.

9. Soit G un groupe connexe. Montrer que $D(G)$ est connexe.

   Réponse : Soit S l'ensemble des commutateurs de G. Considérons

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G \times G & \to & S \\ (M, N) & \mapsto & [M, N] \end{array}$$

   G est connexe donc $G \times G$ est connexe et comme φ est continue, S est lui-même connexe. Pour tout m entier naturel non nul, on pose S_m l'ensemble des produits de m éléments de S. Alors S_m est l'image du connexe S^m par la fonction continue

$$\psi : \begin{array}{ccc} S^m & \to & S_m \\ (s_1, \ldots, s_m) & \mapsto & s_1 \ldots s_m \end{array}$$

   donc S_m est continue. Enfin

$$D(G) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} S_m$$

   donc $D(G)$ est une union de connexes contenant tous le neutre de G donc $D(G)$ est connexe.

Squelette du plan

1. Sous-espaces stables par un endomorphisme.
   1.1 Notion de sous-espace stable.
   - Sous-espace stable par un endomorphisme [Cog00] p.277 ou [BMP04] p.158.
   - ⋆ Tout endomorphisme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admet au moins une droite ou un plan stable [BMP04] p.158.
   - ⋆ Un endomorphisme qui stabilise tous les sous-espace d'une certaine dimension finie est une homothétie [FGN01] p.269.
   - ⋆ Un endomorphisme nilpotent de rang $n-1$ admet $n+1$ espace stables qui sont les noyaux de ses itérés [FGN09a] p.141.
   - Endomorphisme induit sur un sous-espace stable [BMP04] p.158.
   - Tout endomorphisme induit une homothétie sur ses sous-espaces propres.
   - Réduire un endomorphisme revient à chercher des espaces stables par cet endomorphisme. Par exemple, diagonaliser un endomorphisme revient à chercher n droites de l'espace sur lesquelles cet endomorphisme induit une droite.

   1.2 Sous-espaces stables et dualité.
   - Orthogonal d'une partie d'un espace vectoriel [Gou94] p.128.
   - Application transposée [Gou94] p.129.
   - Matrice de l'application transposée [Gou94] p.130.
   - Un sous-espace est stable par un endomorphisme si et seulement si son orthogonal est stable par sa transposée [Gou94] p.130.
   - ⋆ Recherche des sous-espaces stables par une matrice de taille 3 [Cog00] p.395.

   1.3 Sous-espaces caractéristiques.
   - Les sous-espaces propres et les sous-espace caractéristiques sont stables par un endomorphisme [BMP04] p.159.
   - Lemme des noyaux [Cog00] p.274.
   - Décomposition de Dunford [FGN09a] p.134.
   - Endomorphisme diagonalisable et supplémentaire des sous-espaces [Cog00] p.326.
2. Commutation et sous-espaces stables.
   2.1 Commutativité, sous-espaces propres et sous-espaces caractéristiques
   - Si u et v commutent, les noyaux et les images de u sont stables par v [Cog00] p.278.

- Cas particulier : Si u et v commutent, les sous-espaces propres et les sous-espace caractéristiques de u sont stables par v [Cog00] p.278.
- Remarque : Le cas particulier précédent s'applique notamment aux éléments de $k[u]$ [Cog00] p.278.

⋆ Résolution d'une équation matricielle sur $\mathcal{M}(2,\mathbb{R})$ [FGN09a] p.159.

- Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ [Mne06] p.230.

2.2 Réduction simultanée.

- Il existe un vecteur propre commun pour tous les éléments d'une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux [FGN09a] p.114.
- Trigonalisation simultanée d'endomorphismes qui commutent deux à deux [FGN09a] p.114.
- Equivalence entre la diagonalisation simultanée d'endomorphismes et la commutation deux à deux [FGN09a] p.98.
- Application : $\mathrm{GL}(n,k)$ et $\mathrm{GL}(m,k)$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$ [BMP04] p.204.
- Application : Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de degré 1 [Ser98] p.39.

2.3 Réduction des endomorphismes normaux.

- Endomorphisme normal [Gou94] p.258.
- Interprétation sous-espaces stable et dualité dans le cadre hermitien [Gou94] p.258.
- Sous-espaces propres et endomorphisme normal [Gou94] p.258.
- Réduction des matrices normales à coefficients complexes [Gou94] p.259.
- Endomorphisme normal sans valeur propre réelle [Gou94] p.259.
- Réduction des matrices normales à coefficients réelles [Gou94] p.260.

3. Invariants de similitude - Réduction de Frobenius.

3.1 Polynôme minimal ponctuel.

- Polynôme minimal ponctuel [CG13] p.101.
- Lien entre le polynôme minimal ponctuel et le polynôme minimal de l'endomorphisme mis en jeu [CG13] p.101.
- Le polynôme minimal coïncide avec un polynôme minimal ponctuel [CG13] p.102.
- Application : Un endomorphisme a un nombre fini de sous-espace stables si et seulement si son polynôme minimal est de degré maximal [FGN09a] p.152.

3.2 Etude des endomorphismes cycliques.

- Sous-espace cyclique [CG13] p.102.
- Endomorphisme cyclique [CG13] p.103.
- Caractérisation des endomorphismes cycliques [CG13] p.103.
- Le commutant d'un endomorphisme est toujours au moins de dimension n [FGN09a] p.161.
- Le commutant $\mathcal{C}(u)$ d'un endomorphisme u est de dimension n si et seulement si u est cyclique et dans ce cas il est coïncide avec $k[u]$ [FGN09a] p.160.
- Existence d'un supplémentaire stable pour un sous-espace cyclique [CG13] p.104.

3.3 Invariants de similitude.

- Décomposition de Frobenius [CG13] p.105.
- La décomposition est unique [CG13] p.105.
- Facteurs invariants d'un endomorphisme [CG13] p.107.
- Les facteurs invariants sont des invariants de similitude [CG13] p.107.

- Les facteurs invariants sont invariants par extension de corps [CG13] p.107.
- Méthode de calcul des facteurs invariants [BMP04] p.286 et p.301.
- ⋆ Facteurs invariants d'une matrice à coefficients rationnels de taille 3 [BMP04] p.319.
- ⋆ Invariants de similitude pour le polynôme caractéristique X^4 [BMP04] p.312.

4. Simplicité et semi-simplicité.

   4.1 Endomorphisme simples.

   - Endomorphismes simples [CG15] p.79.
   - Endomorphisme simple et polynôme caractéristique [CG15] p.79.
   - Tout endomorphisme simple est cyclique [CG15] p.80.

   4.2 Endomorphismes semi-simples.

   - Endomorphisme semi-simple [CG15] p.80.
   - Caractérisations générales des endomorphismes semi-simples [CG15] p.80 ou [FGN09a] p.144 et p.145.
   - Caractérisation des endomorphismes semi-simples dans le cas d'un corps parfait [CG15] p.81 ou [Cog00] p.322.
   - Remarque : Si le corps n'est pas parfait, la proposition précédente peut-être mise en défaut [CG15] p.82.
   - Corollaire : Une matrice réelle est semi-simple si et seulement si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ [FGN09a] p.147.
   - ⋆ Dans le cas d'un plan réel, une rotation d'angle n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais ses sous-espaces stables ont chacun un supplémentaire stable [Cog00] p.326.
   - ⋆ Matrices semi-simples réelles [Cog00] p.321.

   4.3 Décomposition des représentations linéaires des groupes finis.

   - Mise en place : Dans cette partie, on suppose que $k = \mathbb{C}$.
   - Représentation semi-simple [CG15] p.448.
   - Représentation irréductible [CG15] p.443.
   - Théorème de Maschke [CG15] p.448.
   - Décomposition d'une représentation en somme de représentations irréductibles [CG15] p.450 et p.456 ou [Ser98] p.28.

Développements

1. Endomorphisme semi-simples.
2. Réduction des endomorphismes normaux.

Leçon 155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Professeur encadrant : Alexandre Bellis.

Remarques du jury

Il faut ici pouvoir donner des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité.
On peut voir que le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux.
On peut sur le corps des réels et des complexes donner des propriétés topologiques. Mentionnons que l'affirmation "l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}(n, K)$ est dense dans $\mathcal{M}(n, K)$" nécessite quelques précisions sur le corps K et la topologie choisie pour $\mathcal{M}(n, K)$.
Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.
Le lien peut aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

Squelette du plan

On se donne k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Endomorphismes diagonalisables.

   1.1 Critères de diagonalisabilité.

   - Sous-espaces propres [Gou94] p.161.
   - Dimension des sous-espaces propres [Gou94] p.164 ou [Gri11] p.165.
   - Les sous-espaces propres sont en somme directe [Gri11] p.164.
   - Endomorphisme diagonalisable [Cog00] p.302 ou [Gou94] p.163.
   - Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité en fonction du polynôme caractéristique et du polynôme minimal [Cog00] p.303.
   - Un endomorphisme possédant n valeurs propres est diagonalisable [Gri11] p.165.
   - ⋆ Diagonalisation d'une matrice de taille 3 [Gou94] p.167.
   - ⋆ Matrice non diagonalisable de taille 3 [Gou94] p.167.
   - Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable [Cog00] p.304.
   - Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé simple qui l'annule [Cog00] p.304 ou [Gri11] p.179.
   - ⋆ Diagonalisabilité d'une matrice par blocs [FGN09a] p.104.
   - Endomorphisme induit sur un sous-espace stable [BMP04] p.158.
   - Endomorphisme diagonalisable et restriction à un sous-espace propre [Cog00] p.304 ou [Gou94] p.164.
   - Un sous-espace est stable par un endomorphisme diagonalisable si et seulement s'il admet une base de vecteurs propres de cet endomorphisme.
   - Endomorphismes diagonalisables sur les corps finis [CG13] p.120 ou [Gou94] p.178.
   - Remarque : On définit les mêmes notions pour les matrices et les résultats énoncés pour les endomorphismes s'adapter aux matrices.
   - Commutant des matrices diagonalisables [FGN09a] p.160.
   - Bijection entre $\mathcal{D}(n, \mathbb{C}) / \operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n$ [CG13] p.84.
   - Application : Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude pour les matrices diagonalisables [CG13] p.85.
   - Remarque : Le polynôme minimal, lui, n'en est pas un [CG13] p.85.

1.2 Diagonalisation simultanée.

- Commutation et stabilité des sous-espaces propres [BMP04] p.159.
- ⋆ Résolution d'une équation matricielle sur $\mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ [FGN09a] p.159.
- Il existe un vecteur propre commun pour tous les éléments d'une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux [FGN09a] p.114.
- Equivalence entre la diagonalisation simultanée d'une famille d'endomorphisme diagonalisables et la commutativité deux à deux [FGN09a] p.98.
- Application : $\mathrm{GL}(n, k)$ et $\mathrm{GL}(m, k)$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$ [BMP04] p.204.
- Application : Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de degré 1 [Ser98] p.39.
- Remarque : Ce résultat de diagonalisation nous servira pour l'unicité dans la décomposition de Dunford.

1.3 Semi-simplicité.

- Endomorphisme semi-simple [CG15] p.80.
- Caractérisations générales des endomorphismes semi-simples [CG15] p.80 ou [FGN09a] p.144 et p.145.
- Caractérisation des endomorphismes semi-simples dans le cas d'un corps parfait [CG15] p.81 ou [Cog00] p.322.
- Remarque : Si le corps n'est pas parfait, la proposition précédente peut-être mise en défaut [CG15] p.82.
- Corollaire : Une matrice réelle est semi-simple si et seulement si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ [FGN09a] p.147.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il est semi-simple et son polynôme minimal est scindé [FGN09a] p.144.
- ⋆ Dans le cas d'un plan réel, une rotation d'angle n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais ses sous-espaces stables ont chacun un supplémentaire stable [Cog00] p.326.
- ⋆ Matrices semi-simples réelles [Cog00] p.321.

1.4 Topologie et dénombrement sur l'ensemble des endomorphismes diagonalisables.

i Topologie.

- Adhérence et intérieur des matrices diagonalisables complexes [FGN09a] p.218.
- Adhérence et intérieur des matrices diagonalisables réelles [FGN09a] p.219.
- Une matrice complexe est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude et fermée [FGN09a] p.237.

ii Dénombrement dans le cas d'un corps fini.

- Cardinal des orbites sous l'action par conjugaison [CG13] p.264.
- Nombres de matrices diagonalisables [CG13] p.264.

2. Décomposition de Dunford.

2.1 La décomposition.

- Décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- Calcul pratique de la décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- ⋆ Décomposition de Dunford d'une matrice de taille 3 [Gri11] p.205.
- Non-continuité de la décomposition de Dunford [BMP04] p.180 ou [CG13] p.123.

2.2 Application aux exponentielles d'endomorphismes.

- Décomposition de Dunford de l'exponentielle d'endomorphisme [BMP04] p.215.

- Homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents *via* l'exponentielle [BMP04] p.174.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son exponentielle l'est [BMP04] p.215.
- Calcul de l'exponentielle de matrice *via* la décomposition de Dunford [Gou94] p.194.
- Remarque : Pour calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, il suffit de connaitre les projecteurs spectraux de cette matrice. Il est inutile de connaître la matrice de passage [Gou94] p.196.

⋆ Exponentielle d'une matrice de taille 3 [Gou94] p.197.

- L'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ [Cog00] p.331.

3. Utilisations de la réduction.

3.1 Suites récurrentes linéaires.

- Principe général d'utilisation [Gri11] p.168.

⋆ Suite récurrentes linéaire en dimension 2 [Gri11] p.169.

3.2 Système différentiel.

- Principe général d'utilisation [Gri11] p.170.

⋆ Système différentiel en dimension 2 [Gri11] p.170.

Développements

1. Décomposition de Dunford.
2. Endomorphismes semi-simples.

Leçon 156

Exponentielle de matrices. Applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du jury

C'est une leçon difficile et il faut noter que ce n'est pas une leçon d'analyse. Il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.
Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathcal{M}(2,\mathbb{R}))$? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle dans l'image $\exp(\mathcal{M}(4,\mathbb{R}))$?
La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Pour les candidats plus aguerris, les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire y sont tout à fait à propos. On peut s'interroger si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire.
L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.
Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement.
Les notions d'algèbres de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces sujets qu'à condition d'avoir une certaine solidité sur la question.

Squelette du plan

Soient k un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un k-espace vectoriel de dimension n.

1. Exponentielle de matrice et polynôme d'endomorphisme.
   1.1 Exponentielle de matrice.
   - Exponentielle d'une matrice à coefficients dans k [Laf10] p.35.
   - Exponentielle de la somme de matrices qui commutent [Laf10] p.35.
   - Remarque : La proposition précédente peut-être mise en défaut si les deux matrices mises en jeu ne commutent pas.
   - Remarque : En particulier, toute exponentielle de matrice est inversible [Laf10] p.35.
   - Exponentielle de matrice et classe de conjugaison [Laf10] p.36.
   - Déterminant de l'exponentielle [Laf10] p.36.
   - Exponentielle de la transposée et du conjuguée d'une matrice [Laf10] p.36.

   1.2 Liens avec les polynômes d'endomorphismes.
   - Mise en place : On se donne A une matrice à coefficients dans k.
   - Morphisme d'algèbres φ_A d'évaluation de A par les polynômes de $k[X]$ [Cog00] p.271.
   - Idéal annulateur I_A associé à φ_u [Cog00] p.271.
   - Remarque : Comme E est de dimension finie, I_A est un idéal non trivial de $k[X]$ [Cog00] p.271.
   - Polynôme minimal π_A de u [Cog00] p.271.
   - L'image de φ_A est noté $k[u]$ [Cog00] p.272.
   - $k[A]$ est un k-espace vectoriel de dimension $\deg \pi_A$ [Cog00] p.272.
   - Application : Il existe un polynôme P tel que $\exp(A)$ est un élément de $k[A]$ [Zav13] p.49.

- Une matrice diagonalisable est un polynôme en son exponentielle [FGN09a] p.243.
- Application : L'exponentielle est injective sur l'ensemble des matrices diagonalisables [FGN09a] p.243.

1.3 Images et antécédents de et par l'exponentielle.

- L'exponentielle est surjective de $\mathcal{A}(n,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ [Gou94] p.261.
- L'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ [FGN09a] p.243.
- Grâce à la décomposition polaire, on en déduit l'homéomorphisme $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ [CG13] p.210.
- Grâce à la décomposition polaire encore une fois, on en déduit un isomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.211.
- Pour toute matrice A, l'image de $k[A]$ par l'exponentielle est l'ensemble des éléments inversibles de $k[A]$ [Zav13] p.49.
- Remarque : On étudiera l'image des exponentielles réelles et complexes dans la section consacrée à la décomposition de Dunford.

2. Décomposition de Dunford.

2.1 La décomposition.

- Décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- Calcul pratique de la décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- ⋆ Décomposition de Dunford d'une matrice de taille 3 [Gri11] p.205.
- Non-continuité de la décomposition de Dunford [BMP04] p.180 ou [CG13] p.123.

2.2 Application aux exponentielles de matrices.

- Décomposition de Dunford de l'exponentielle d'une matrice [BMP04] p.215.
- Homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents *via* l'exponentielle [BMP04] p.174.
- Une matrice est diagonalisable si et seulement si son exponentielle l'est [BMP04] p.215.
- Calcul de l'exponentielle de matrice *via* la décomposition de Dunford [Gou94] p.194.
- Remarque : Pour calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, il suffit de connaitre les projecteurs spectraux de cette matrice. Il est inutile de connaître la matrice de passage [Gou94] p.196.
- ⋆ Exponentielle d'une matrice de taille 3 [Gou94] p.197.

2.3 Image de l'exponentielle.

- Image de l'exponentielle réelle [Zav13] p.48.
- ⋆ Exemple d'une matrice qui n'est pas dans l'image de l'exponentielle réelle [Gou94] p.186.

3. Utilisation de l'exponentielle matricielle en analyse.

3.1 Régularité de la fonction exponentielle.

- L'exponentielle est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ [Laf10] p.36.
- Il existe un ouvert U de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ contenant 0 tel que l'exponentielle soi un difféomorphisme de U sur son image [Laf10] p.36.
- Application : Morphismes de groupe continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [Laf10] p.37.
- Application : Les sous-groupes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ne sont pas arbitrairement petits [MT97] p.59.
- L'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ [Cog00] p.331.

3.2 Résolution d'équations différentielles linéaires.

- Equation différentielle linéaire à coefficients constants [Gou08] p.357.
- Dérivation des fonctions $t \mapsto \exp(tA)$ où A est une matrice [Gou08] p.361.

- Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants [Gou08] p.360.

⋆ Résolution d'une équation avec une matrice de taille 3 [Gou08] p.363.

3.3 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

- Algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [GT98] p.82.
- L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ [GT98] p.82.
- Théorème de Von-Neumann [GT98] p.83.
- Application : $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ sont deux sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$. De plus, leurs dimensions respectives sont $n^1 - 1$ et $n(n-1)/2$ [Rou09] p.275.

Développements

1. Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p, q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.
2. Théorème de Von Neumann.

Leçon 157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Professeur encadrant : Basile Pillet.

Remarques du jury

Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés. On doit savoir déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables grâce aux noyaux itérés (ou grâce à la décomposition de Jordan si celle-ci est maîtrisée).
Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables, mais une grande proportion de candidats pensent à tort que la réciproque est vraie.
Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Squelette du plan

Soit k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Trigonalisation des endomorphismes.
   1.1 Critères de trigonalisabilité.
   - Endomorphisme et matrice trigonalisables [Gri11] p.172 ou [Gou94] p.164.
   - Endomorphisme trigonalisable et polynôme caractéristique [Gri11] p.172 ou [Gou94] p.164.
   - Endomorphisme trigonalisable et restriction à un sous-espace.
   - Remarque : Si k est algébriquement clos, toute matrice à coefficients dans k est trigonalisable [Gri11] p.172.
   - Application : Trace et déterminant en fonction des valeurs propres [Gri11] p.173.
   - Application : Déterminant de l'exponentielle d'une matrice [Laf10] p.36.
   - ⋆ Matrice trigonalisable de taille 3 [Gri11] p.173.

   1.2 Trigonalisation simultanée.
   - Il existe un vecteur propre commun pour tous les éléments d'une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux [FGN09a] p.114.
   - Trigonalisation simultanée d'endomorphismes qui commutent deux à deux [FGN09a] p.114 ou [Gou94] p.166.
   - Remarque : Deux matrices co-trigonalisables ne commutent pas nécessairement.

   1.3 Topologie de l'ensemble des endomorphismes trigonalisables.
   - L'ensemble des matrices trigonalisables réelles est fermé [FGN09a] p.219.
   - L'ensemble des matrices diagonalisables est l'adhérence de l'ensemble des matrices réelles ayant n racines distinctes [FGN09a] p.219.

   1.4 Applications de la trigonalisation.
   i Suites récurrentes linéaires.
   - Principe de la méthode [Gri11] p.169.

   ii Systèmes différentiels.
   - Principe de la méthode [Gri11] p.169.
   - Résolution d'un système différentiel en dimension 3 [Gri11] p.202.
2. Endomorphismes nilpotents - Réduction de Jordan.
   2.1 Ensemble $\mathcal{N}$ des endomorphismes nilpotents.
   - Endomorphisme nilpotent [CG13] p.87 ou [BMP04] p.168.
   - Indice de nilpotence [CG13] p.87.

- Remarque : Grâce au théorème de Cayley-Hamilton, l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent de E est inférieur à n.
- $\mathcal{N}$ est un cône [CG13] p.87 ou [BMP04] p.168.
- $\mathcal{N}$ n'est ni un idéal, ni un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ [CG13] p.87 ou [BMP04] p.168.
- Endomorphismes nilpotents sur un corps fini [CG15] p.213.
- ⋆ Cône nilpotent en dimension 2 [BMP04] p.169.
- La somme et la composition de deux endomorphisme nilpotents qui commutent est un endomorphisme nilpotent [BMP04] p169.
- Espace vectoriel engendré par les endomorphismes nilpotents [BMP04] p.169.
- Critère de nilpotence par la trace [FGN09a] p.111.

2.2 Réduction de endomorphismes nilpotents.

- Dimension des noyaux itérés des endomorphismes nilpotents [CG13] p.88.
- Diagramme de Young associé à une orbite nilpotente [CG13] p.89.
- Bloc de Jordan et forme normale de Jordan [CG13] p.91.
- Existence d'une réduite de Jordan pour une matrice nilpotente [CG13] p.92.
- ⋆ Réduction d'une matrice nilpotente complexe de taille 10 [CG13] p.92.
- Classes de similitude des matrices nilpotentes [CG13] p.92.
- Topologie des classes de similitude des matrices nilpotentes [FGN09a] p.237.

2.3 Réduction de Jordan.

- Réduction de Jordan pour les endomorphismes [Gou94] p.199.
- ⋆ Réduite de Jordan d'une matrice réelle de taille 4 [Gou94] p.206.

3. Décomposition de Dunford.

3.1 La décomposition.

- Décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- Calcul pratique de la décomposition de Dunford [Gou94] p.193.
- ⋆ Décomposition de Dunford d'une matrice de taille 3 [Gri11] p.205.
- Non-continuité de la décomposition de Dunford [BMP04] p.180 ou [CG13] p.123.

3.2 Application aux exponentielles d'endomorphismes.

- Décomposition de Dunford de l'exponentielle d'endomorphisme [BMP04] p.215.
- Calcul de l'exponentielle de matrice *via* la décomposition de Dunford [Gou94] p.194.
- Remarque : Pour calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, il suffit de connaitre les projecteurs spectraux de cette matrice. Il est inutile de connaître la matrice de passage [Gou94] p.196.
- ⋆ Exponentielle d'une matrice de taille 3 [Gou94] p.197.
- L'exponentielle est surjective de $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ [Cog00] p.331.

Développements

1. Décomposition de Dunford.
2. Endomorphismes nilpotents sur les corps finis.

Leçon 158

Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du jury

C'est une leçon transversale. La notion de signature doit bien sûr figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. L'action du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon.
Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence.
L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.
On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

Squelette du plan

Dans toute la suite, k désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Matrices symétriques et hermitiennes.

   1.1 Formes quadratiques et hermitiennes.

   - Formes quadratiques et hermitiennes [Gou94] p.229 et p.230.
   - Expressions matricielles des formes quadratiques et hermitiennes [Gou94] p.228.
   - Sous-espaces $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(n,\mathbb{R})$ des matrices symétriques et antisymétriques de dimensions $n(n+1)/2$ et $n(n-1)/2$ [Gou94] p.119.
   - ⋆ La matrice hessienne d'une fonction différentiable de classe $\mathcal{C}^2$ est une matrice symétrique réelle grâce au lemme de Schwarz.
   - $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(n,\mathbb{R})$ sont supplémentaires l'un de l'autre.
   - Sous-espace $\mathcal{H}(n,\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes [Gou94] p.229.
   - A base fixée, bijection entre l'ensemble des formes quadratiques et l'ensemble des matrices symétriques réelles d'une part, et entre l'ensemble des formes hermitiennes et les matrices hermitiennes d'autre part [Gou94] p.229 et p.230.
   - Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien ou hermitien [Gou94] p.243.
   - Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée [Gou94] p.243.

   1.2 Réduction des matrices symétriques et hermitiennes.

   - Matrice orthogonale [Gou94] p.243.
   - Matrice unitaire [Gou94] p.243.
   - Le spectre des matrices symétriques et hermitiennes est réel [Gou94] p.244.
   - On peut obtenir le résultat précédent *via* le théorème des extrema liés [BMP04] p.21.
   - Réduction des matrices symétriques et hermitiennes en base orthonormée [Gou94] p.244.
   - Réduction des formes quadratiques du point de vue différentielle [Rou09] p.209.
   - Lemme de Morse [Rou09] p.354.

   1.3 Matrices symétriques réelles et hermitiennes positives.

   - Formes quadratiques et hermitiennes positives [Gou94] p.234.
   - Ensembles $\mathcal{S}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}^+(n,\mathbb{C})$ des matrices symétriques réelles positives et matrices hermitiennes positives [Gou94] p.245.
   - Spectre des matrices symétriques réelles positives et hermitiennes positives.

- La nature de la matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ donne éventuellement la nature d'un extremum local [SR08] p.247.

2. Actions par congruences de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

   2.1 Théorèmes d'inertie de Sylvester.

   - Théorèmes d'inertie de Sylvester pour les matrices symétriques réelles et les matrices hermitiennes complexes et notion de signature [Gri11] p.309 et p.330.
   - ⋆ La signature de $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ est $(2,1)$ [Gri11] p.308.
   - Interprétation de la signature [dSP10] p.104.

   2.2 Etude de l'action par congruence.

   - Action par congruence de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.150.
   - Deux matrices réelles sont dans la même orbite dans l'action de congruence si et seulement si elles ont même signature [CG13] p.182.
   - Les orbites des matrices non dégénérées sont ouvertes grâce au point de vue différentiel de la réduction des matrice symétriques réelles [Rou09] p.210
   - Application : sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.206.
   - Le stabilisateur de l'identité est l'ensemble des matrices orthogonales [CG13] p.155.
   - Le stabilisateur des matrices $I_{(p,q)}$ est noté $\mathrm{O}(p,q)$ [CG13] p.155.
   - Les $\mathrm{O}(p,q)$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n(n-1)/2$ [Rou09] p.284.
   - Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.274.
   - L'orbite de l'identité est notée $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{C})$ et ses éléments sont appelées matrices symétriques définies positives [CG13] p.155.
   - Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$.
   - L'adhérence de $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ est $\mathcal{S}^{+}(n,\mathbb{R})$.
   - Adhérence des orbites des matrices $I_{(p,q)}$ [CG13] p.155.

   2.3 Orbites et stabilisateurs de la congruence hermitienne.

   - Action par congruence hermitienne de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}(n,\mathbb{C})$ [CG13] p.157.
   - Les orbites de cette action sont classifiées par la signature [CG13] p.157.
   - L'orbite de l'identité est notée $\mathcal{H}^{++}(n,\mathbb{C})$ et ses éléments sont appelées matrices hermitiennes définies positives [CG13] p.157.
   - Spectre des matrices hermitiennes définies positives.
   - L'adhérence de $\mathcal{H}^{++}(n,\mathbb{C})$ est $\mathcal{H}^{+}(n,\mathbb{C})$.
   - Le stabilisateur de l'identité est le groupe unitaire [CG13] p.157.
   - Le stabilisateur des matrices $I_{(p,q)}$ est noté $U(p,q)$ [CG13] p.157.

3. Matrices symétriques et hermitiennes positives et définies-positives.

   3.1 Décompositions polaires.

   - Existence d'une unique racine k-ème pour les matrices symétriques réelles positives et les matrices hermitiennes positives [FGN10a] p.107 et p.173.
   - Décompositions polaires réelles et complexes [CG13] p.202 et [FGN10a] p.179.
   - Extension aux matrices non inversibles [FGN10a] p.128.
   - Application : Norme 2 des matrices inversibles [CG13] p.204.
   - Extension du résultat précédent par densité [CG13] p.205
   - Application : Maximalité du groupe orthogonal [CG13] p.205.
   - Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.211.
   - Remarque : On peut établir un homéomorphisme de même nature pour $\mathrm{U}(p,q)$ [CG13] p.216.

3.2 Décompositions polaires et exponentielle.

- $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.
- $\mathcal{H}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}^{++}(n,\mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.
- Application : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ sont homéomorphes [CG13] p.210.
- Application : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$ sont homéomorphes [CG13] p.210.

3.3 Réduction simultanée.

- Réduction simultanée des matrices symétriques et hermitiennes [Gou94] p.245.
- ⋆ Convexité logarithmique sur $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ [FGN10a] p.222.
- ⋆ Inégalité de Minkowski sur $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ [FGN10a] p.223.
- Orthogonalisation simultanée de formes quadratiques [FGN10a] p.225.

Développements

1. Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.
2. Lemme de Morse.

Leçon 159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Ismael Bailleul.

Remarques du jury

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon : celle-ci permet de créer une correspondance féconde entre un morphisme et son morphisme transposé, un sous-espace et son orthogonal (canonique), les noyaux et les images, les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance.
Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon.
L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.
Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique, analytique, etc. Il faut que les développements proposés soient en lien direct, comme toujours, avec la leçon ; proposer la trigonalisation simultanée est un peu osé ! Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

Squelette du plan

Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie.

1. Formes linéaires.
   1.1 Notion de forme linéaire.
   - Forme linéaire [Gou94] p.126.
   - ⋆ La différentielle d'une application réelle différentiable est une forme linéaire.
   - Remarque : Comme on travaille en dimension finie, les formes linéaires sont continues. C'est faux en dimension infinie : l'évaluation des polynômes n'est pas continue pour la norme 2.
   - Rang d'une forme linéaire [Gri11] p.82.
   - Théorème de représentation de Riesz [BMP04] p.103.
   - Application : Gradient d'une application différentiable [BMP04] p.5.

   1.2 Noyaux des formes linéaires.
   - Hyperplan d'un espace vectoriel [Gou94] p.114.
   - Dimension d'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie [Gou94] p.114 ou [Gri11] p.82.
   - Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle [Gou94] p.129.
   - Théorème de Hahn-Banach géométrique [BMP04] p.97.
   - Méthode de Kacmarz.
2. Espace dual.
   2.1 Bases duales.
   - Espace dual d'un espace vectoriel [Gou94] p.126.
   - Base duale d'une base d'un espace vectoriel de dimension finie [Gou94] p.127 ou [Gri11] p.83.
   - Un espace vectoriel et son espace dual ont même dimension finie [Gou94] p.127 ou [Gri11] p.83.
   - ⋆ Isomorphisme entre $\mathcal{M}(n,k)$ et son dual [FGN01] p.329.

- ⋆ Tout hyperplan de $\mathcal{M}(n,k)$ rencontre $\mathrm{GL}(n,k)$ [FGN01] p.331.
- Remarque : On en déduit qu'un espace vectoriel est isomorphe à son dual mais de façon non canonique car cet isomorphisme dépend d'un choix d'une base [Gri11] p.83.
- ⋆ Calcul d'une base duale en dimension 3 [Gri11] p.84.
- Un espace vectoriel est canoniquement isomorphe à son bidual [Gou94] p.127 ou [Gri11] p.86.

2.2 Prédualité.

- Base préduale d'une base du dual d'un espace vectoriel de dimension finie [Gou94] p.127 ou [Cog00] p.99.
- Méthode de calcul d'une base préduale [Gou94] p.130.
- ⋆ Détermination d'une base préduale d'une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ [Gou94] p.131.
- ⋆ La base préduale de la base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ donnée par $n+1$ formes linéaires d'évaluation est donnée par les $(n+1)$ polynômes interpolateurs de Lagrange associés à ces points d'évaluation [Cog00] p.100.
- Multiplication rapide de polynômes [CLRS10] p.835.

2.3 Dualité en géométrie projective.

- Hyperplan projectif et espace projectif du dual [Boy15] p.429.
- En dimension 2, homographie entre les espaces projectifs [Boy15] p.429.
- Faisceau de droites dans un plan projectif [Boy15] p.430.
- Incidence dans un plan projectif [Boy15] p.430.
- L'incidence est une homographie [Boy15] p.430.
- Droites des homographies de coniques [Boy15] p.490.
- Théorème de Pascal [Boy15] p.491.

3. Orthogonalité.

3.1 Orthogonaux et polaires.

- Orthogonalité entre une forme linéaire et un vecteur [Gou94] p.128.
- Orthogonal d'une partie de E [Gou94] p.128 ou [Gri11] p.87.
- L'orthogonalité pour formes linéaires et pour les formes quadratiques coïncident [Gou94] p.226.
- Polaire d'une partie de E^* [Gou94] p.128.
- Orthogonal, polaire et espace vectoriel engendré [Gou94] p.128.
- Orthogonal d'un sous-espace vectoriel [Gri11] p.87.
- Remarque : Toutes ces notions d'orthogonalité coïncident avec celles que l'on définit pour les produits scalaires dans les espaces hilbertiens.
- ⋆ Calcul d'un orthogonal en dimension 3 [Gri11] p.88.
- Dimensions de l'orthogonal et du polaire [Gou94] p.128 ou [Gri11] p.87.
- Application : Equations d'un sous-espace en dimension finie [Gou94] p.128.
- Orthogonaux et polaire de la somme et de l'intersection [Gou94] p.129 ou [Cog00] p.93.
- Orthogonal d'un hyperplan [Gou94] p.129 ou [Cog00] p.92.

3.2 Bases du dual d'un espace vectoriel de dimension finie.

- Familles libres dans l'espace dual en dimension finie [Cog00] p.97.
- Théorème des extrema liés [Ave83] p.102.
- Interprétation du théorème précédent [BMP04] p.20.
- Application : Inégalité de Hadamard [Rou09] p.409.
- Application : Tout endomorphisme auto-adjoint possède une valeurs propre réelle [BMP04] p.21.

- ⋆ La dimension du sous-espace de $\mathcal{M}(n, k)$ constitué des matrices dont le somme des colonnes est nulle est de dimension $n^2 - n$ [Cog00] p.97.
- • Bases du dual d'un espace vectoriel de dimension finie [Cog00] p.98.
- ⋆ Base de $(k_n[X])^*$ [Cog00] p.98.
- ⋆ Formes linéaires et approximation de Simpson des intégrales [Cog00] p.100.

4. Application transposée.

4.1 Transposée d'une application linéaire.

- Transposée d'une application linéaire [Gou94] p.129 ou [Cog00] p.103.
- Application transposée et formé bilinéaire sur $E \times E^*$ [Cog00] p.104.
- Matrice de l'application linéaire transposée [Gou94] p.130 ou [Cog00] p.103.
- Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$ pour E et F deux espaces vectoriels de dimension finie [Cog00] p.104.
- Rang de l'application linéaire transposée [Gou94] p.129 ou [Cog00] p.106.
- Image de l'application linéaire transposée [Gou94] p.129 ou [Cog00] p.106.
- Transposée d'une composée d'applications linéaires [Gou94] p.130.

4.2 Sous-espaces stables et application transposée.

- • Un sous-espace est stable par une application linéaire si et seulement si son orthogonal est stable par sa transposée [Gou94] p.130.
- ⋆ Sous-espaces stables par une matrice réelle de taille 3 [Cog00] p.395.
- • Application : Deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont cotrigonalisables. La réciproque est néanmoins fausse [Gou94] p.166.

Développements

1. Multiplication rapide de polynômes.
2. Théorème de Pascal.

Leçon 160

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

Dans cette leçon, les candidats doivent bien prendre conscience que le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Par exemple, des développements comme le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford n'ont rien à faire ici. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur.

Remarques

1. Mettre les similitudes dans le plan.
2. Incorporer le procédé de Gram-Schmidt est une bonne chose.

Exercices et questions

1. Quelles sont les classes de conjugaison de $SO(3, \mathbb{R})$?

   Réponse : La conjugaison d'une matrice de $SO(3, \mathbb{R})$ conserve l'angle de la rotation mais modifie la droite stable.

   $$SO(3, \mathbb{R}) = \{(u, \theta) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1\} / \sim,$$

   où $\sim$ est la relation antipodale. Ainsi, les classes de conjugaison sont données par

   $$\begin{array}{ccc} SO(3, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{S}^1 / \sim \\ (u, \theta) & \mapsto & \theta \end{array}.$$

   De manière générale, $SO(n, \mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Question ouverte : peut-on enlever le fait que l'ellipse ne soit pas centrée en 0 dans le théorème de John-Loewner ?

Squelette du plan

On fixe E un espace vectoriel euclidien dont on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire.

1. Notion d'endomorphisme adjoint.

   1.1 Adjoint d'un endomorphisme.

   - Définition de l'adjoint [Gri11] p.238.
   - ⋆ Sur l'espace des matrices, on considère les produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Les matrices A et B étant fixées, l'adjoint de l'endomorphisme $M \mapsto AMB$ est $M \mapsto {}^tAM{}^tB$.
   - La matrice de l'adjoint d'un endomorphisme dans une base orthonormée est la matrice transposée de cet endomorphisme [Gri11] p.238.
   - Conséquence : $u \mapsto u^*$ est une bijection linéaire involutive, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, u et u^* ont même déterminant et même rang [Gri11] p.238.
   - Image et noyau de l'endomorphisme adjoint.
   - Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^* [Gou94] p.258.

   1.2 Endomorphismes remarquables.

   - Endomorphismes normaux [Gou94] p.254.

- Endomorphisme et matrices symétriques, antisymétriques, orthogonaux [Gou94] p.119, p.243 et p.244.
- ⋆ Exemples quelconques de matrices des types précédents.

2. Réduction des endomorphismes normaux.

- L'ensemble des endomorphismes normaux n'est pas un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$. Preuve en est avec les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Un endomorphisme est normal si et seulement si pour tout x de E, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ [Gou94] p.254.
- Réduction des endomorphismes normaux en base orthonormée [Gou94] p.256.
- Un endomorphisme u est normal si et seulement si u^* est un polynôme en u [Gou94] p.261.

3. Etude des endomorphismes orthogonaux.

3.1 Endomorphismes orthogonaux

- $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$ [Gou94] p.243.
- $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ sont des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(E)$.
- Action de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
- Stabilisateur du pôle nord [CG13] p.71.
- $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
- Application : $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe [CG13] p.71.
- $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est simple [CG13] p.239.
- $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les reflexions [Per96] p.143.
- $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les renversements [Per96] p.143.
- Définitions équivalentes des matrices orthogonales (conservation norme et matrice dans une base orthonormée) [Gri11] p.238.
- Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si il envoie une base orthonormée sur une base orthonormée [Gri11] p.240.
- Application : La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale [Gri11] p.241.
- Spectre et déterminant d'un endomorphisme orthogonal, introduction des transformations directes et indirectes [Gri11] p.239.
- Réduction des endomorphismes orthogonaux [Gri11] p.256.

3.2 Le cas des dimensions 2 et 3.

- Forme des matrices de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, introduction de l'angle d'une rotation et de l'axe d'une symétrie orthogonale [Gri11] p.242.
- Forme des matrices de $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$, introduction de l'angle et de l'axe d'une rotation [Gri11] p .243.
- Ensemble des classes de similitudes de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.
- ⋆ Exemple d'étude d'une matrice de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ [Gri11] p.245.
- Actions de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Angles orientés et non orientés [CG13] p.159.

3.3 Procédé de Gram-Schmidt - Décompositions remarquables.

- Principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt [HL09] p.112.
- Décomposition de Choleski [FGN10a] p.131.
- Décomposition QR [FGN10a] p.131.

4. Etude des endomorphismes symétriques et antisymétriques.

4.1 Endomorphismes symétriques et antisymétriques.

- $\mathrm{S}(E)$ et $\mathrm{A}(E)$ sont des sous-groupes de $\mathcal{L}(E)$ [Gou94] p.119.
- $\mathcal{L}(E)$ est somme directe de $\mathrm{S}(E)$ et de $\mathrm{A}(E)$.
- Réduction des endomorphismes symétriques [Gri11] p.252.
- Réduction des endomorphismes antisymétriques [Gou94] p.257.
- L'exponentielle est surjective de $\mathcal{A}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ [Gou94] p.261.

4.2 Endomorphismes symétriques positifs, défini-positifs.

- Endomorphismes symétriques positifs et défini-positifs [Gou94] p.245.
- Endomorphismes symétriques positifs, défini-positifs et valeurs propres [Gou94] p.245.
- ⋆ Exemple d'étude d'une matrice [Gri11] p.255.
- $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(n, \mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.

4.3 Décomposition polaire.

- Existence d'une unique racine k-ème pour les matrices symétriques réelles positives et les matrices hermitiennes positives [FGN10a] p.107 et p.173.
- Décomposition polaire [CG13] p.202 et [FGN10a] p.179.
- Extension aux matrices non inversibles [FGN10a] p.128.
- Application : Norme 2 des matrices inversibles [CG13] p.204.
- Extension du résultat précédent par densité [CG13] p.205
- Application : Maximalité du groupe orthogonal [CG13] p.205.
- Application : Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ [FGN10a] p.130.
- Application : $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ sont homéomorphes [CG13] p.210.

Développements

1. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$.
2. Réduction des endomorphismes normaux.

Leçon 161

Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

La classification des isométries en dimension 2 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut penser aux applications aux isométries laissant stables certaines objets en dimension 2 et 3.

Exercices et questions

1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie. Montrer que f est affine et que sa partie linéaire est orthogonale.

   Réponse : C'est quasiment la définition.

2. Que dire du groupe G des applications affines qui préservent globalement l'ensemble des sommets d'un icosaèdre P ?

Squelette du plan

On se donne $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie n.

1. Etude des isométries.
   1.1 Notion d'isométrie.
   - Application affine [Aud06] p.16.
   - Indépendance entre une application affine et un point de base [Aud06] p.16.
   - Isométrie affine [Aud06] p.52 ou [Tau05] p.98.
   - ⋆ Les translations sont des isométries [Aud06] p.53.
   - Groupe $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ des isométries affines [Aud06] p.53.
   - $\mathrm{Is}(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ pour l'action naturelle de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ [Com98] p.162.
   - Caractérisations des isométries [Com98] p.156 ou [Tau05] p.99.
   - Déterminant et isométries [Com98] p.162 ou [Tau05] p.99.
   - Déplacements $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ et antidéplacements $\mathrm{Is}^-(\mathcal{E})$ [Tau05] p.99.
   - $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ [Com98] p.162.

   1.2 Isométries remarquables.
   - Décomposition canonique d'une isométrie [Com98] p.163.
   - ⋆ Décomposition canonique d'une isométrie en dimension 3 [Com98] p.175.
   - Symétrie hyperplane et symétrie orthogonale [Com98] p.157 et p.158.
   - Symétrie glissée [Com98] p.159.
   - ⋆ Symétrie glissée en dimension 3 [Com98] p.160.
2. Etude du groupe orthogonal.
   2.1 Topologie.
   - $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.39.
   - Action de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.39 ou p.71.
   - L'action est transitive [CG13] p.39.
   - $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.71.
   - $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe compact [CG13] p.71.

- $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ possède deux composantes connexes [CG13] p.30
- $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ est simple [CG13] p.239.

2.2 Structure des isométries.

- $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les reflexions [Per96] p.143.
- $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ est engendré par les reflexions [Aud06] p.57 ou [Com98] p.160.
- $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les renversements [Per96] p.143.
- Réduction des matrices orthogonales [Gou94] p.256.

2.3 Angles non-orientés et angles orientés.

- Actions de $\mathrm{O}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ [CG13] p.159.
- Angles orientés et non orientés [CG13] p.159.
- Groupe des angles orientés [CG13] p.75.
- Mesure des angles orientés [Aud06] p.77.

2.4 Décomposition polaire.

- Décomposition polaire [CG13] p.202 et [FGN10a] p.179.
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ [FGN10a] p.130.

3. Classification en dimensions 2 et 3.

3.1 Isométries en dimension 2.

- Mise en place : On suppose dans cette partie que $n = 2$.
- Déplacements de $\mathcal{E}$ [Com98] p.165 ou [Tau05] p.108.
- Antidéplacements de $\mathcal{E}$ [Com98] p.165 ou [Tau05] p.108.
- Tableau récapitulatif [Aud06] p.87.

3.2 Classification en dimension 3.

- Mise en place : On suppose dans cette partie que $n = 3$.
- Vissage [Tau05] p.109.
- Déplacements de $\mathcal{E}$ [Com98] p.168 ou [Tau05] p.109.
- Antidéplacements de $\mathcal{E}$ [Com98] p.168.
- Tableau récapitulatif [Com98] p.169.
- ⋆ Etude d'une isométrie en dimension 3 [Com98] p.169.

4. Groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace.

- Groupe $\mathrm{Is}(P)$ des isométries laissant stable une partie P de $\mathcal{E}$ [Mer04] p.267.
- Remarque : Une application affine préserve le barycentre donc un élément de $\mathrm{Is}(P)$ envoie un sommet de P sur un sommet de P.

4.1 Objets du plan.

- ⋆ Le groupe d'isométrie d'un triangle quelconque est trivial [CG13] p.363.
- ⋆ Le groupe d'isométries d'un triangle isocèle est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [CG13] p.363.
- Groupe diédral D_n [Per96] p.23.
- $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [Per96] p.23.

4.2 Le cube en dimension 3.

- Le groupe d'isométries positives du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ [CG13] p.363.
- Le groupe d'isométries du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [CG13] p.363.

4.3 Isométries du simplexe régulier.

- Existence des simples réguliers [FGN10a] p.313.
- Isométries du simplexe régulier [FGN10a] p.313.
- Remarque : Les groupes d'isométries du tétraèdre régulier et des isométries positives du cubes donnent deux représentations de degré 2 de $\mathfrak{S}_4$ [Rau00] p.47.

Développements

1. Isométries du simplexe régulier.
2. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$.

Leçon 162

Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

Il semble que cette leçon soit moins choisie par les candidats depuis l'ajout de l'aspect algorithmique dans l'intitulé. A ce sujet, il faut savoir que les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus.
La leçon doit impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Pour les candidats chevronnés, les relations de dépendances linéaires sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, K)$ sur $\mathcal{M}(n, K)$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.
Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.
Des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbb{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Squelette du plan

1. Systèmes linéaires.
   1.1 Notion de système linéaire.
   - Système linéaire de p équations et n inconnues [Gri11] p.141.
   - Expression matricielle [Gri11] p.141.
   - Système compatible.

   1.2 Systèmes de Cramer.
   - Système de Cramer [Gri11] p.142.
   - Solution d'un système de Cramer [Gri11] p.143.
   - Conditionnement d'une matrice inversible [All05] p.415.
   - Conditionnement et erreurs de calcul [All05] p.415.
   - Formule de Cramer [Gri11] p.143.
   - ⋆ Résolution d'un système de Cramer de taille 3 [Gri11] p.144.
   - Coût de la méthode de Cramer [All05] p.411.
   - Remarque : Les formules de Cramer ne sont utilisables qu'en petite dimension [All05] p.411.

   1.3 Espace des solutions.
   - Déterminant caractéristique [Gri11] p.145 ou [Gou94] p.138.
   - Théorème de Rouché-Fontené [Gri11] p.146 ou [Gou94] p.138.
   - Dimension de l'espace des solutions du système linéaire mis en jeu [Gri11] p.146.
   - ⋆ Système linéaire à 3 équations et 4 inconnues avec un paramètre [Gou94] p.138.
   - Cas particulier des systèmes homogènes [Gri11] p.148.
   - Remarque : Le résultat précédent signifie que l'intersection de r hyperplans indépendants en dimension n forme un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$ [Gri11] p.148.
2. Résolutions explicites.
   2.1 Méthode du pivot de Gauss.

- Mise en place du problème [CG13] p.128.
- Matrice échelonnée en lignes [CG13] p.130.
- Matrice échelonnée réduite [CG13] p.130.
- ⋆ Matrice échelonnée en lignes de taille $(4,7)$ [CG13] p.130.
- Opérations élémentaires [CG13] p.128.
- Action de $\mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{M}(n,k)$ par multiplication à gauche [CG13] p.129.
- Les orbites de l'action sont caractérisées par le noyau [CG13] p.131.
- Toute matrice est dans l'orbite d'une matrice échelonnée réduite [CG13] p.131.
- Cas des matrices carrées [All05] p.418.
- Coût de l'algorithme du pivot de Gauss en $2n^3/3$.

2.2 Systèmes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
- Opérations élémentaires sur les matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ [DTLQ14] p.10.
- Comparaison du cas des matrices à coefficients dans un corps [DTLQ14] p.10.
- Forme réduite diagonale [DTLQ14] p.11.
- ⋆ Résolution d'un système $(3,4)$ [DTLQ14] p.12.

2.3 Méthode de la factorisation LU.
- Décomposition LU [All05] p.420.
- Coût de la méthode de décomposition LU [All05] p.423.
- Remarque : Cette méthode peut également servir à calculer des inverses et des déterminants [All05] p.423.

2.4 Méthode de Choleski.
- Décomposition de Choleski [All05] p.424.
- Coût de la méthode de Choleski [All05] p.426.
- Décomposition QR [FGN10a] p.131.

3. Méthodes itératives.

3.1 Méthodes de splitting.
- Décomposition régulière d'une matrice inversible [All05] p.430.
- Principe de la méthode [All05] p.430.
- Méthode itérative convergente [All05] p.430.
- Condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode [All05] p.430.
- Condition suffisante de convergence de la méthode [All05] p.431.
- Comportement de la méthode vis a vis des erreurs de calcul [All05] p.432.
- Méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Méthode de relaxation [All05] p.433.

3.2 Méthode du gradient à pas optimal.
- Mise en place : Résolution d'un système par minimisation d'une fonction [BMP04] p.32.
- Inégalité de Kantorovitch [FGN10a] p.139.
- Algorithme du gradient à pas optimal.
- Convergence de l'algorithme.

3.3 Méthode de Kacmarz.
- Matrice d'une projection orthogonale sur un hyperplan.
- Description de la méthode de Kacmarz.
- Convergence de la méthode de Kacmarz.
- Coût de la méthode de Kacmarz.

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

Leçon 170

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$. Il faut savoir que les formes quadratiques existent sur le corps des complexes et sur les corps finis et il faut savoir les classifier.
On ne doit pas oublier l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2 + bx^2 + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$). On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire. Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).
L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé.
Malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.

Squelette du plan

Soit k un corps commutatif.

1. Notion de forme quadratique.

1.1 Généralités.

- Forme bilinéaire [dSP10] p.24.
- ⋆ Pour $A \in \mathcal{M}(n,k)$, $(X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est une forme bilinéaire [dSP10] p.25.
- Forme bilinéaire symétrique, antisymétrique alternée [dSP10] p.27.
- Forme quadratique, forme polaire associée [Gri11] p.301 ou [dSP10] p.29.
- ⋆ $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ [Gri11] p.295.
- Formule de polarisation [dSP10] p.30.
- ⋆ $q : P \in \mathbb{R}[x] \mapsto \int_0^1 P(x)^2 dx$ est une forme quadratique [Gri11] p.302.
- Cas de la dimension finie, matrice d'une forme bilinéaire [dSP10] p.26 ou [Gou08] p.228.
- Matrice d'une forme quadratique en dimension finie [Gou08] p.229 ou [dSP10] p.32.
- ⋆ Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la forme quadratique $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ [Gou08] p.229.
- Formule de changement de base [dSP10] p.26 ou [Gou08] p.228.
- Déterminant et discriminant [dSP10] p.53 et p.153.
- Le changement de base ne change pas le signe du determinant.
- ⋆ Discriminant de $ax^2 + 2bxy + y^2$ [dSP10] p.155.

1.2 Rang et déterminant.

- Notion de rang, de noyau (radical) d'une forme quadratique et de forme quadratique dégénérée en toute dimension [Gri11] p.297 ou [dSP10] p.50.
- Déterminant d'une forme quadratique en dimension finie [dSP10] p.53.
- ⋆ Rang et noyau de la forme quadratique $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz$ [dSP10] p.51.
- ⋆ La forme quadratique $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ est non dégénérée [dSP10] p.51.

1.3 Formes quadratiques positives.

- Forme quadratique positive, définie-positive, définie-négative [Gou08] p.235 ou [dSP10] p101.
- Matrices symétriques positives, définie-positive, définie-négative [dSP10] p.102.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz [dSP10] p.103.
- Propriété de semi-norme pour la racine carrée d'une forme quadratique positive [dSP10] p.103.

2. Orthogonalité et isotropie.

2.1 Orthogonalité.

- Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales [dSP10] p.67 et p.69.
- Relation orthogonalité - liberté [dSP10] p.88.
- Orthogonal d'une partie [dSP10] p.69.
- Propriétés de l'orthogonal d'une partie [Gri11] p.311 ou [dSP10] p.70.
- Cas particulier de la dimension finie [Gri11] p.311 ou [dSP10] p.71.
- Cas particulier d'une forme quadratique non dégénérée [Gri11] p.311.

2.2 Existence de bases orthogonales.

- Notion de base orthogonale, orthonormale [dSP10] p.87 et p.88 ou [Gri11] p.304.
- Conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité [dSP10] p.88.
- Existence d'une base orthogonale pour toute forme quadratique de dimension finie [dSP10] p.89 ou [Gri11] p.305.
- Il n'y a pas toujours de base orthonormée à cause des vecteurs isotropes [Gri11] p.305.
- Complétion d'une famille orthogonale en une base orthogonale [dSP10] p.90.
- Recherche d'une base orthogonale par la méthode de Gauss [Gri11] p.307 ou [LFA78] p.375.

⋆ Calcul d'une base orthogonale pour la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ [Gri11] p.308.

- Théorème de diagonalisation simultanée dans les espaces euclidien [Gri11] p.313.

⋆ Convexité logarithme [FGN10a] p.222.

- Théorème de réduction simultanée [FGN10a] p.225.

2.3 Cône isotrope.

- Définition du cône isotrope [Gri11] p.303 ou [dSP10] p.52.

⋆ Cône isotrope de la forme quadratique $q(x) = x^2 - y^2$ avec le dessin [Gri11] p.303.

- Le noyau d'une forme quadratique est inclus dans son cône isotrope [Gri11] p.303.

⋆ Contre exemple au théorème précédent [dSP10] p.52.

- Théorème de Chevalley-Warning [Ser95] p.13.
- Application : si k est un corps fini, toute forme quadratique sur k en au moins trois variables a un zéros non trivial.

2.4 Sous-espaces isotropes.

- Sous-espace vectoriel isotrope [Gri11] p.312.

⋆ La droite engendrée par un vecteur isotrope est un sous-espace isotrope [Gri11] p.312.

- F est non isotrope si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp}$ [Gri11] p.312.
- Sous-espace totalement isotrope [dSP10] p.127.
- Sous-espace totalement isotrope et orthogonal [dSP10] p.127.
- Dimension d'un sous-espace totalement isotrope [dSP10] p.127.
- Plan hyperbolique [dSP10] p.122.
- Caractérisation des plans hyperboliques [dSP10] p.123.

- Décomposition de Witt [dSP10] p.142.
- Indice d'une forme quadratique [dSP10] p.143.

3. Classification des formes quadratiques.

- On considère l'action par congruence de $\mathrm{GL}(n,k)$ sur $\mathcal{S}(n,k)$. Classifier les formes quadratique sur k revient à rechercher les orbites sous cette action [CG13] p.150.

3.1 Formes quadratiques complexes.

- Théorème de réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ [Gri11] p.308.
- Deux matrices complexes sont dans la même orbite sous l'action par congruence si et seulement si elles ont même rang [CG13] p.151.

3.2 Formes quadratiques réelles : théorème d'inertie de Sylvester.

- Théorème d'inertie de Sylvester et définition de la signature [Gri11] p.309.
- Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.273.
- Interprétation de la signature [dSP10] p.104.

⋆ La signature de $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ est $(2,1)$ [Gri11] p.308.

⋆ La signature de $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$. Pour cela, on regarde q sur l'ensemble des matrices symétriques, puis sur l'ensemble des matrices antisymétriques [FGN10a] p.216.

- Si A est la matrice d'une forme quadratique q de signature (r,s) dans une base, r est le nombre de valeurs propres strictement positives de A et s le nombre de valeurs propres strictement négatives de A [FGN10a] p.217.
- Deux matrices réelles sont dans la même orbite dans l'action de congruence si et seulement si elles ont même signature [CG13] p.182.
- Application : sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.206.

3.3 Formes quadratiques sur les corps finis.

- On travaille en caractéristique différente de 2.
- Nombre de carrés dans $\mathbb{F}_q^*$ et indice de $\mathbb{F}_q^{*2}$ dans $\mathbb{F}_q^*$ [Per96] p.74 et p.130.
- Résolution de l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ dans les corps finis [Per96] p.130.
- Deux matrices sont dans la même orbite sous l'action par congruence sur un corps fini si et seulement si elles ont même discriminant [Per96] p.130.

⋆ Matrices intervenant dans la démonstration de la loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.

- Loi de réciprocité quadratique [CG13] p.185.

4. Groupes orthogonaux.

4.1 Notion de groupe orthogonal.

- Définition du groupe orthogonal associé à une forme quadratique [dSP10] p.54.
- Remarque : il s'agit du stabilisateur de la forme quadratique relativement à l'action à droite de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des formes quadratiques [dSP10] p.54.
- Définition matricielle [dSP10] p.55.

⋆ Groupe orthogonal de la forme quadratique $q(x,y) = x^2 - y^2$.

- Déterminant des éléments d'un groupe orthogonal [dSP10] p.55.

4.2 La décomposition polaire et ses conséquences.

- Décomposition polaire [CG13] p.202.
- Corollaire : expression de la norme 2 d'une matrice inversible [CG13] p.204.
- Corollaire : $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.
- Compacité de $\mathrm{O}(n)$.
- Maximalité du groupe orthogonal [CG13] p.205.

- Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.210.
- Décomposition polaire hermitienne [CG13] p.215.

4.3 Génération de $\mathrm{O}(n)$ et de $\mathrm{SO}(n)$.

- $\mathrm{O}(n)$ est engendré par les reflexions orthogonales [CG13] p.237.
- $\mathrm{SO}(n)$ est engendré par les retournements orthogonaux [CG13] p.237.
- Corollaire : $\mathrm{SO}(3)$ est simple [CG13] p.239.

5. Formes quadratiques et géométrie.

5.1 Classification des coniques.

- Définition d'une conique comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ de degré 2 à scalaire multiplicatif près [CG13] p.165 ou [Gri11] p.412.
- On s'intéresse à l'espace des fonctions polynomiales de degré 2 muni de l'action du groupe affine [CG13] p.165.
- Classification des coniques sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les $\mathbb{F}_p$ en fonction de la signature [CG13] p.169 ou [Gri11] p.414.
- ⋆ Illustrer par des schémas dans le cas réel [Gri11] p.415.
- Tableau des formes quadratiques à congruence près pour $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les $\mathbb{F}_p$ [CG13] p.169.

5.2 Géométrie différentielle.

- La hessienne comme forme quadratique [dSP10] p.35.
- Conditions d'existence d'extrema [SR08] p.245 et p.247.
- Le lemme de Morse [dSP10] p.111 ou [Rou09] p.331.
- Lien entre le cône isotrope et la position d'une variété différentielle par rapport à son plan tangent en un point.

Développements

1. Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.
2. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$.
3. Lemme de Morse.
4. Loi de réciprocité quadratique.

Leçon 171

Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue ainsi que l'orthogonalisation simultanée. Le candidat doit avoir compris la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle ainsi que leur caractère classifiant.
La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.
Pour les candidats de bon niveau, l'indicatrice de Schur-Frobenius, sur la possibilité de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels, permet une belle incursion de la théorie des représentations dans cette leçon.

Remarques

1. Les groupes orthogonaux méritent une partie entière. Penser aux sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et à la compacité de $\mathrm{O}(q)$.
2. Attention à la classification des coniques : dans le cas affine, les cercles sont les ellipses ce qui est faux dans le cas vectoriel. Attention également à préciser que l'on classifie à isométrie près.

Exercices et questions

1. Démontrer l'existence d'une base orthogonale pour toute forme bilinéaire. Existe t-il une base orthonormale ?

   Réponse : On démontre ce résultat par récurrence sur la dimension de l'espace ambiant. Pour l'hérédité, on considère s'il existe le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non isotrope et on applique l'hypothèse de récurrence à son orthogonal. La base n'est pas forcément orthonormale à cause des éventuels vecteurs isotropes.
2. Que dire de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x,y) = x^2 - y^2$?

   Réponse : C'est une forme quadratique non dégénérée car sa matrice dans la base canonique est $\mathrm{diag}(1,-1)$ qui est de rang maximal. Son cône isotrope est formé des deux bissectrices et ses lignes de niveau sont des hyperboles.Enfin, son groupe orthogonal est donné par

   $$\mathrm{O}(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$
3. Que dire des lignes de niveau de la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ donnée par $q(x,y) = xy$?

   Réponse : Ce sont des hyperboles attachées sur une parabole.
4. Comment démontrer le théorème de diagonalisation simultanée ?

   Réponse : Par récurrence sur la dimension.
5. Quel est la signification de la signature ?

   Réponse : Il s'agit de la dimension du plus grand sous-espace vectoriel tel que la restriction de la forme bilinéaire à ce sous-espace est un produit scalaire.

Squelette du plan

1. Notion de forme quadratique.

   1.1 Généralités.

   - Forme bilinéaire [dSP10] p.24.

- ⋆ Pour $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $(X, Y) \mapsto {}^t XAY$ est une forme bilinéaire [dSP10] p.25.
- Forme bilinéaire symétrique, antisymétrique alternée [dSP10] p.27.
- ⋆ La forme bilinéaire $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est alternée.
- Forme quadratique , forme polaire associée [Gri11] p.301.
- Formule de polarisation [dSP10] p.30
- ⋆ $q : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \int_0^1 P(x)^2 dx$ est une forme quadratique [Gri11] p.302.
- Cas de la dimension finie, matrice d'une forme bilinéaire [dSP10] p.26 ou [Gou08] p.228.
- Matrice d'une forme quadratique en dimension finie [Gou08] p.229 ou [dSP10] p.32.
- ⋆ Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la forme quadratique $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ [Gou08] p.229.
- Formule de changement de base [dSP10] p.26 ou [Gou08] p.228.

1.2 Formes quadratiques dégénérées.

- Notion de rang, de noyau (radical) d'une forme quadratique et de forme quadratique dégénérée en toute dimension [Gri11] p.297 ou [dSP10] p.50.
- Déterminant d'une forme quadratique en dimension finie [dSP10] p.53.
- ⋆ Rang et noyau de la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz$ [dSP10] p.51.
- ⋆ La forme quadratique $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$ est non dégénérée [dSP10] p.51.

1.3 Formes quadratiques positives.

- Forme quadratique positive, définie-positive, définie-négative [Gou08] p.235 ou [dSP10] p101.
- Matrices symétriques positives, définie-positive, définie-négative [dSP10] p.102.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz [dSP10] p.103.
- Propriété de semi-norme pour la racine carrée d'une forme quadratique positive [dSP10] p.103.

2. Orthogonalité et isotropie.

2.1 Orthogonalité.

- Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales [dSP10] p.67 et p.69.
- Relation orthogonalité - liberté [dSP10] p.88.
- Orthogonal d'une partie [dSP10] p.69.
- Propriétés de l'orthogonal d'une partie [Gri11] p.311.
- Cas particulier de la dimension finie [Gri11] p.311.
- Cas particulier d'une forme quadratique non dégénérée [Gri11] p.311.

2.2 Existence de bases orthogonales.

- Notion de base orthogonale, orthonormale [dSP10] p.87 et p.88 ou [Gri11] p.304.
- Conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité [dSP10] p.88.
- Existence d'une base orthogonale pour toute forme quadratique de dimension finie [dSP10] p.89 ou [Gri11] p.305.
- Il n'y a pas toujours de base orthonormée à cause des vecteurs isotropes [Gri11] p.305.
- Complétion d'une famille orthogonale en une base orthogonale [dSP10] p.90.
- Recherche d'une base orthogonale par la méthode de Gauss [Gri11] p.307 ou [LFA78] p.375.
- ⋆ Calcul d'une base orthogonale pour la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ [Gri11] p.308.
- Théorème de diagonalisation simultanée dans les espaces euclidien [Gri11] p.313.

- ⋆ Convexité logarithme [FGN10a] p.222.
- • Théorème de réduction simultanée [FGN10a] p.225.

2.3 Cône isotrope.

- • Définition du cône isotrope [Gri11] p.303 ou [dSP10] p.52.
- ⋆ Cône isotrope de la forme quadratique $q(x) = x^2 - y^2$ avec le dessin [Gri11] p.303.
- • Le noyau d'une forme quadratique est inclus dans son cône isotrope [Gri11] p.303.
- ⋆ Contre exemple au théorème précédent [dSP10] p.52.

2.4 Sous-espaces isotropes.

- • Sous-espace vectoriel isotrope [Gri11] p.312.
- ⋆ La droite engendrée par un vecteur isotrope est un sous-espace isotrope [Gri11] p.312.
- • F est non isotrope si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp}$ [Gri11] p.312.
- • Sous-espace totalement isotrope [dSP10] p.127.
- • Sous-espace totalement isotrope et orthogonal [dSP10] p.127.
- • Dimension d'un sous-espace totalement isotrope [dSP10] p.127.
- • Plan hyperbolique [dSP10] p.122.
- • Caractérisation des plans hyperboliques [dSP10] p.123.
- • Décomposition de Witt [dSP10] p.142.
- • Indice d'une forme quadratique [dSP10] p.143.

3. Réduction des formes quadratiques réelles.

3.1 Théorème d'inertie de Sylvester.

- • Théorème d'inertie de Sylvester et définition de la signature [Gri11] p.309.
- • Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.273.
- • Interprétation de la signature [dSP10] p.104.
- • La signature caractérise les orbites de l'action par congruence de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$. Autrement dit, deux formes quadratiques réelles de même dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature [dSP10] p.105.
- ⋆ La signature de $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ est $(2,1)$ [Gri11] p.308.
- ⋆ La signature de $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$. Pour cela, on regarde q sur l'ensemble des matrices symétriques, puis sur l'ensemble des matrices antisymétriques [FGN10a] p.216.
- • Si A est la matrice d'une forme quadratique q de signature (r,s) dans une base, r est le nombre de valeurs propres strictement positives de A et s le nombre de valeurs propres strictement négatives de A [FGN10a] p.217.

3.2 Quelques utilisations de la signature.

- • Introduction de la notation $\Omega(E)$ pour l'ensemble de formes quadratiques non dégénérées sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $\Omega_k(E)$ le sous-ensemble formé des formes quadratiques de signature $(k, n-k)$ [FGN10a] p.214 et p.215.
- • $\Omega(E)$ est un espace vectoriel normé [FGN10a] p.214.
- • Les $\Omega_k(E)$ sont tous ouverts [FGN10a] p.215.
- • Corollaire : les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $\Omega_k(E)$ [FGN10a] p.215.

4. Groupes orthogonaux.

4.1 Notion de groupe orthogonal.

- • Définition du groupe orthogonal associé à une forme quadratique [dSP10] p.54.
- • Remarque : il s'agit du stabilisateur de la forme quadratique relativement à l'action à droite de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des formes quadratiques [dSP10] p.54.
- • Définition matricielle [dSP10] p.55.

- ⋆ Groupe orthogonal de la forme quadratique $q(x, y) = x^2 - y^2$.
- Déterminant des éléments d'un groupe orthogonal [dSP10] p.55.
- Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [CG13] p.206.

4.2 La décomposition polaire et ses conséquences.

- Décomposition polaire [CG13] p.202.
- Corollaire : expression de la norme 2 d'une matrice inversible [CG13] p.204.
- Corollaire : $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ et $\mathcal{S}^{++}(n, \mathbb{R})$ sont homéomorphes *via* l'exponentielle [CG13] p.208.
- Compacité de $\mathrm{O}(n)$.
- Maximalité du groupe orthogonal [CG13] p.205.
- Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p, q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ [CG13] p.210

4.3 Génération de $\mathrm{O}(n)$ et de $\mathrm{SO}(n)$.

- $\mathrm{O}(n)$ est engendré par les reflexions orthogonales [CG13] p.237.
- $\mathrm{SO}(n)$ est engendré par les retournements orthogonaux [CG13] p.237.
- Corollaire : $\mathrm{SO}(3)$ est simple [CG13] p.239.

5. Formes quadratiques et géométrie.

5.1 Classification des coniques.

- Définition d'une conique comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ de degré 2 à scalaire multiplicatif près [CG13] p.165 ou [Gri11] p.412.
- On s'intéresse à l'espace des fonctions polynomiales de degré 2 muni de l'action du groupe affine [CG13] p.165.
- Classification des coniques sur $\mathbb{R}$ en fonction de la signature [CG13] p.169 ou [Gri11] p.414.
- ⋆ Illustrer par des schémas [Gri11] p.415.
- Tableau des formes quadratiques à congruence près pour $\mathbb{R}$ [CG13] p.169.

5.2 Géométrie différentielle.

- La hessienne comme forme quadratique [dSP10] p.35.
- Conditions d'existence d'extrema [SR08] p.245 et p.247.
- Lemme de Morse [dSP10] p.111 ou [Rou09] p.331.
- Lien entre le cône isotrope et la position d'une variété différentielle par rapport à son plan tangent en un point.

Développements

1. Homéomorphisme entre $\mathrm{O}(p, q)$ et $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.
2. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.
3. Lemme de Morse.

Leçon 180
Coniques. Applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue. Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées. Bien distinguer les notions affines, métriques ou projectives, la classification des coniques étant sensiblement différentes selon le cas. Souvent le candidat annonce qu'il va classifier les coniques mais sans être capable de préciser la nature de cette classification. Plus généralement, il serait bien que les candidats aient réfléchi à ce que l'on entend par "classification" en mathématiques.
On peut se situer sur un autre corps que celui des réels. Le lien entre classification des coniques et classification des formes quadratiques peut être établi à des fins utiles.

Exercices et questions

1. D'où vient le nom de conique ?

   Réponse : Intersection d'un cône par un plan.
2. Donner les coordonnées projectives des points d'intersection de deux cercles.
3. Quelle est l'image d'une conique propre par une transformation affine ?

   Réponse : Elle reste une conique de même type. La composée d'une forme quadratique par une transformation affine est une forme quadratique définie positive. De plus, l'ellipse est compacte, l'hyperbole a deux composantes connexes. On peut donc distinguer les trois types.
4. Donner les points rationnels de l'hyperbole équilatère. Même question pour un cercle.

   Réponse : On remarque que

   $$(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \Leftrightarrow (x + y, x - y) \in \mathbb{Q}^2.$$

   Ainsi, chercher les points rationnels d'une hyperbole équilatère revient à rechercher ceux de l'hyperbole $XY = 1$.

Squelette du plan

1. Coniques dans l'espace affine.
   - 1.1 Les coniques affines.
     - Conique affine [Boy15] p.42 ou [CG13] p.166.
     - Equation barycentrique d'une conique [Boy15] p.43.
     - Cinq points définissent une conique [Eid09] p.52.
     - Ellipse, hyperbole, parabole [Boy15] p.44.
     - Centre d'une ellipse [Boy15] p.46.
   - 1.2 Coniques comme lignes de niveau.
     - Conique comme ligne de niveau [Boy15] p.264.
     - Foyer d'une ellipse [Boy15] p.265.
     - Directrice d'une conique [Boy15] p.265.
     - Axe focal d'une conique [Boy15] p.265.
     - Excentricité d'une conique [Boy15] p.265.
     - Equation polaire d'une conique [Deb04] p.109.
     - Lois de Kepler [Deb04] p.124.

- Tangente, foyer et directrice [Boy15] p.269.
- Rayons lumineux et paraboles [Boy15] p.270.
- Direction asymptotique et lignes de niveau [Boy15] p.265.
- Hyperbole équilatère [Boy15] p.266.
- Caractérisation des coniques affines [Boy15] p.266.
- Caractérisation bifocale des coniques à centre [Boy15] p.267.
- Cercle principal d'une ellipse [Boy15] p.272.
- Aire d'une ellipse [Boy15] p.272.

1.3 Coniques dans un triangle.

- Théorème de Carnot [Boy15] p.47.
- Conique inscrite et coordonnées barycentriques [Boy15] p.277.
- Ellipse de Steiner [Boy15] p.278.
- Théorème de Marden [Boy15] p.279.
- Aire de l'ellipse de Steiner [Boy15] p.279.

1.4 Action du groupe affine sur les coniques.

- Action du groupe affine sur l'ensemble des coniques [CG13] p.166.
- Orbites et congruence [CG13] p.166.
- Action de congruence projective [CG13] p.167.
- Eléments des orbites [CG13] p.168.
- Classification des formes quadratiques [CG13] p.151.
- Classification des coniques affines sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les corps finis [CG13] p.169 et p.170.

2. Coniques projectives.

2.1 Notion de conique projective.

- Conique projective [Boy15] p.476.
- Point d'une conique projective [Boy15] p.476.
- Coniques projectives comme ligne de niveau [Boy15] p.476.
- Intersection d'une conique projective avec une droite projective [Boy15] p.478.
- Tangentes des coniques projectives [Boy15] p.478.

2.2 Classification des coniques projectives.

- Action de $\mathrm{PGL}(2, k)$ sur l'ensemble des conquise affines [Boy15] p.479.
- Equivalence projective [Boy15] p.479.
- Classification des coniques projectives [Boy15] p.480.
- Equation d'une conique propre non vide [Boy15] p.480.
- L'action est transitive [Boy15] p.481.
- Ellipse, hyperbole, parabole [Boy15] p.481.

2.3 Homographies et coniques projectives.

- Birapport de quatre points d'une conique [Boy15] p.486.
- Bijection d'une conique laissant stable le birapport [Boy15] p.486.
- Homographies d'une conique projective [Boy15] p.490.
- Théorème de Pascal [Boy15] p.491.

3. Coniques et équations diophantiennes.

3.1 Loi de groupe sur les coniques.

- Coniques affines comme groupes [CG15] p.383.
- ⋆ Loi sur une hyperbole équilatère [CG15] p.384 ou [Boy15] p.49.

- ⋆ Loi sur le cercle-unité [CG15] p.384 ou [Boy15] p.49.
- ⋆ Loi sur une parabole [CG15] p.386 ou [Boy15] p.49.
- • Loi de groupe et ellipse, hyperbole et parabole [Boy15] p.50.
- • Structure de groupe et points rationnels [CG15] p.387.
- • Equation de Pell-Fermat [CG15] p.388.
- • Unités de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ [CG15] p.390.

3.2 Paramétrisation rationnelle des coniques.

- • Paramétrage rationnel du cercle unité [Com98] p.273.
- ⋆ Résolution de $x^2 + y^2 = z^2$ [Com98] p.273.

Développements

1. Equation de Pell-Fermat.
2. Théorème de Pascal.

Leçon 181

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Professeur encadrant : Lionel Fourquaux.

Remarques du Jury

On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables). Il est judicieux de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

Remarques

1. Préciser quand l'espace affine de travail a en plus une structure euclidienne.
2. Les coordonnées barycentriques sont indispensables dans la leçon.

Exercices et questions

1. Qu'est-ce que l'aire algébrique ?

   Réponse : Il s'agit de la mesure de Lebesgue de l'enveloppe convexe des points mis en jeu. En ce qui concerne le signe, si par exemple on veut mesurer l'aire algébrique d'un triangle Δ, on fixe un triangle de référence Δ_0 et le signe de l'aire algébrique de Δ est le signe du déterminant de l'application affine qui envoie Δ sur Δ_0.
2. Soit un tétraèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 1. Quelle est sa hauteur ?

   Réponse : Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre, H l'isobarycentre des points B, C, D et O le centre de gravité du tétraèdre. La hauteur recherchée est $h = AH$. Alors $H = \text{Isobar}(B, C, D)$ et $O = \text{Bar}((H, 3), (A, 1))$ donc $3\vec{OH} + \vec{OA} = 0$ puis $1 - 3OH = 0$ ce qui donne $OH = 1/3$. Finalement, $h = AO + OH = 4/3$.
3. Quelles sont les coordonnes barycentriques du centre du cercle circonscrit d'un triangle ?
4. Montrer que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.

   Réponse : On utilise les coordonnées barycentriques et un déterminant.

Squelette du plan

On se donne $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie n.

1. Barycentres.
   - 1.1 Fonction de Leibniz.
     - Système de points pondérés [Boy15] p.17 ou [Mer04] p.34.
     - Fonction vectorielle de Leibniz [Boy15] ou [Mer04] p.34.
     - Barycentre d'un système de points pondérés [Boy15] p.17 ou [Mer04] p.35.
     - Propriétés des barycentres [Boy15] p.18 ou [Mer04] p.35.
     - Isobarycentre [Boy15] p.17 ou [Mer04] p.35.
     - ⋆ Hypersphère circonscrite au simplexe régulier unité d'un espace affine euclidien [RW95] p.145.
     - Théorème de Desargues [Boy15] p.19.
     - Déassociativité du barycentre [Boy15] p.19.
     - Une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre [Mer04] p.47.
   - 1.2 Espace affines et barycentres.
     - Sous-espace affine engendré par une partie [Mer04] p.33.

- Sous-espaces affines et barycentres [Boy15] p.20 ou [Mer04] p.37.
- Système affinement libre [Boy15] p.21 ou [Mer04] p.39.
- Caractérisation des systèmes affinement libres [Boy15] p.21 ou [Mer04] p.38.
- ⋆ Isométrie du simplexe régulier [FGN10a] p.313.
- Repère affine [Boy15] p.22 ou [Mer04] p.40.
- Système de coordonnées barycentriques [Mer04] p.41.
- ⋆ Coordonnées barycentriques du centre de gravité [RW95] p.153.
- ⋆ Coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit [RW95] p.153.
- ⋆ Coordonnées barycentriques de l'orthocentre [RW95] p.153.
- ⋆ Coordonnées barycentriques du cercle inscrit [RW95] p.153.
- Coordonnées barycentriques dans un repère affine [Boy15] p.22.
- Coordonnées barycentriques et coordonnées dans un repère affine [Boy15] p.24.

1.3 Equations barycentriques de droites.

- Alignement et coordonnées barycentriques [Boy15] p.26.
- Parallélisme et coordonnées barycentriques [Boy15] p.27.
- Intersection et coordonnées barycentriques [Boy15] p.28.
- Théorème de Ceva [Boy15] p.30.
- Théorème des quatre points [Boy15] p.31.
- Théorème de Pappus [Boy15] p.36.
- Théorème de Ménélaüs [FGN10a] p.248.

2. Convexité.

2.1 Notion de convexité - Enveloppe convexe.

- Ensemble convexe [Boy15] p.84 ou [Mer04] p.42.
- ⋆ Les convexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles [Mer04] p.42.
- ⋆ Les boules et les sous-espaces de $\mathcal{E}$ sont convexes [Tau05] p.70.
- Somme de Minkowski d'ensembles convexes [Tau05] p.70.
- Ensembles convexes et applications affines [Mer04] p.48.
- Enveloppe convexe d'une partie [Boy15] p.84 ou [Mer04] p.42.
- Théorème de Lucas [FGN01] p.229.
- Théorème de Toepliz-Hausdorff [Boy15] p.84.
- Enveloppe convexe et barycentres à coefficients positifs [Mer04] p.42.
- Ensemble convexes et barycentres [Boy15] p.84 ou [Mer04] p.43.
- Théorème de Carathéodory [Boy15] p.87 ou [Mer04] p.43.
- Enveloppe convexe d'un compact [Boy15] p.87.
- Distance d'un point à un convexe [Tau05] p.76.
- Aire algébrique [Eid09] p.11.

2.2 Convexité et topologie.

- L'enveloppe convexe d'un compact est compact [Tau05] p.72.
- L'enveloppe convexe d'un borné est borné [Tau05] p.72.
- Intérieur relatif d'une partie de $\mathcal{E}$ [Tau05] p.72.
- L'intérieur relatif d'un convexe est convexe [Tau05] p.73.
- L'adhérence d'une partie convexe est convexe [Tau05] p.70.

2.3 Points extrémaux et exposés.

- Hyperplan d'appui [Boy15] p.93.

- Point extremal d'un convexe [Boy15] p.93 ou [Tau05] p.82.
- Point exposé d'un convexe [Boy15] p.93.
- Tout point exposé est extrémal [Boy15] p.93.
- ⋆ Un tube à essai montre que la réciproque est fausse.
- Caractérisations des points extrémaux [Tau05] p.82.
- ⋆ Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ [FGN10a] p.130 ou [Boy15] p.93.
- ⋆ Points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques [Boy15] p.94.
- Théorème de Krein-Milman [Tau05] p.83.
- ⋆ L'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ [Boy15] p.92
- ⋆ L'enveloppe convexe de l'ensemble des marines bistochastiques est l'ensemble des matrices de permutation [Boy15] p.95.

3. Séparation des convexes.

3.1 Convexes et hyperplans affines.

- Théorème de Hahn-Banach [Boy15] p.90 ou [BMP04] p.97.
- Remarque : Si le convexe mis en jeu n'est pas ouvert, le théorème de Hahn-Banach peut-être mis en défaut [Tau05] p.79.
- L'enveloppe convexe fermée d'une partie est l'intersection des demi-espaces qui contiennent cette partie [BMP04] p.133.
- Séparation et séparation stricte de parties de $\mathcal{E}$ [Tau05] p.79.
- Séparation des convexes [Tau05] p.79.
- Le théorème précédent peut être mis en défaut [Tau05] p.80.

3.2 Séparation et formes linéaires.

- Convexe et forme linéaire continue [Boy15] p.91.
- Adhérence à l'enveloppe convexe [Boy15] p.92.
- ⋆ L'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(n)$ est la boule unité euclidienne de $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ [Boy15] p.92.

Développements

1. Isométries du simplexe régulier.
2. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$.

Leçon 182

Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarques du Jury

Cette leçon ne saurait rester au niveau de la Terminale.
L'étude des inversions est tout à fait appropriée dans cette leçon, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement. La formule de Ptolémée, pour donner un exemple, illustre bien l'utilisation de cet outil.
On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.
Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée. La réalisation du groupe $\mathrm{SU}(2)$ dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver sa place dans la leçon.

Exercices et questions

1. Peut-on effectuer la projection stéréographique avec un autre plan que le plan équatorial ?

   Réponse : Oui, on peut par exemple prendre un plan parallèle plus bas.
2. Le birapport est-il invariant par homographie ?

   Réponse : Oui, c'est immédiat par définition de birapport.
3. Une application qui préserve le birapport est-elle une homographie ?

   Réponse : Oui, on applique le même raisonnement que pour la question précédente en introduisant une inconnue.
4. Quelle description du groupe des homographies peut-on donner ?

   Réponse : Il s'agit du quotient de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ par le groupe des homothéties.
5. Donner une formule de la surface d'un triangle en fonction de l'affixe de ses sommets.

   Réponse : On utilise le déterminant.

Squelette du plan

1. Géométrie du plan.

   1.1 Modélisation du plan par $\mathbb{C}$.
   - Identification de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ [Eid09] p.219.
   - Equation d'une droite affine [Eid09] p.221.
   - Equation d'une conique [Eid09] p.222.
   - Exponentielle complexe [AF87] p.226.
   - Argument d'un nombre complexe [AF87] p.232.
   - Angle orienté de vecteurs [Aud06] p.74.
   - Mesure des angles orientés [Aud06] p.74.
   - Application conforme [Eid09] p.261.

   1.2 Transformations du plan.

   i Isométries.
   - Isométrie [Aud06] p.52.
   - Les isométries planes [Aud06] p.110.

   ii Similitudes.
   - Similitude vectorielle [Aud06] p.89.

- ⋆ Les isométries et les homothéties sont des similitudes [Aud06] p.89.
- Décomposition des similitudes vectorielles [Aud06] p.89.
- Similitude directe et indirecte [Aud06] p.90.
- Décomposition des similitude directes et indirectes [Aud06] p.90.
- Centre d'une similitude [Aud06] p.90.
- Construction du centre d'une similitude [Aud06] p.90.
- Nombres complexes et similitudes [Aud06] p.93.
- Existence de similitudes [Aud06] p.93.
- Similitudes et angles [Aud06] p.93.

iii Inversions.

- Inversion analytique [Eid09] p.245.
- Inversion géométrique [Eid09] p.245.
- Cercle d'inversion [Eid09] p.245.
- Longueurs et inversions [Eid09] p.245.
- Inversion géométrique et alignement [Eid09] p.245.
- Inversion géométrique en l'origine [Eid09] p.246.
- Inversion analytique en l'origine [Eid09] p.246.
- Théorème de Ptolémée [Eid09] p.246.

1.3 Géométrie du triangle.

- Formule de Heron [Eid09] p.223.
- Affixe du centre de gravité d'un triangle [Eid09] p.224.
- Affixe de l'orthocentre d'un triangle [Eid09] p.224.
- Cercle d'Euler d'un triangle [Eid09] p.225.
- Alignement des points remarquables [Eid09] p.225.

1.4 Construction à la règle et au compas.

- Nombre complexe constructible [Mer04] p.379.
- Théorème de Wantzel [Mer04] p.383.
- Polygones réguliers constructibles [Mer04] p.392.

2. Géométrie sur la droite projective.

2.1 Construction de la droite projective.

- Droite projective $P^1(\mathbb{C})$ [CG13] p.292.
- Décomposition $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [CG13] p.292.
- $P^1(\mathbb{C})$ comme quotient de $GL(2, \mathbb{C})$ [CG13] p.293.
- Sphère de Riemann [CG13] p.309.
- Projection stéréographique [CG13] p.309.
- Projection stéréographique comme inversion [AM03] p.298.
- $P^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ [CG13] p.310.

2.2 Homographies.

- Action de $GL(2, \mathbb{C})$ sur $P^1(\mathbb{C})$ [CG13] p.294.
- Homographie [Boy15] p.447.
- Les homographies sont des homéomorphismes [CG13] p.294.
- $PGL(2, k)$ est engendré par les similitudes et la fonction inverse [Aud06] p.201.
- Les inversions géométriques sont des homographies [Eid09] p.245.
- Les homographies sont des applications conformes [Eid09] p.261.

2.3 Birapport et géométrie.

- Action de $PGL(2,\mathbb{C})$ sur $P^1(\mathbb{C})$ [Boy15] p.449.
- Birapport de quatre points [Boy15] p.449.
- Invariance du birapport par homographie [CG13] p.297.
- Stabilité du birapport et homographies.
- Egalité de birapports [CG13] p.297.
- Expression du birapport [CG13] p.297.
- Birapport, alignement et cocyclicité [CG13] p.311.
- Théorème des six birapports [CG13] p.315.
- Théorème des six birapports et carré [CG13] p.315.
- Théorème des six cercles [Boy15] p.347.
- Droite de Simson [Aud06] p.117.
- Théorème du pivot [Boy15] p.344.

2.4 Droites et sphères de la droite projective.

- Homographies et cercles de $P^1(\mathbb{C})$ [CG13] p.312.
- Cercles de $P^1(\mathbb{C})$ et projection stéréographique [AM03] p.303.
- Cercles de $P^1(\mathbb{C})$ et homographies [AM03] p.304.
- Division harmonique [Boy15] p.454.
- Condition de division harmonique [Boy15] p.455.
- Groupe circulaire et et divisions harmoniques.
- Groupe circulaire [Boy15] p.356.
- Partie génératrice du groupe circulaire [Boy15] p.358.
- Eléments du groupe circulaire [Boy15] p.358.
- Le groupe circulaire est isomorphe à $PGL(2,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [CG13] p.312.

3. Utilisation des quaternions.

3.1 Groupe des quaternions.

- Groupe des quaternions $\mathbb{H}$ [CG13] p.228.
- Présentation par générateurs et relations [CG13] p.224.
- $\mathbb{H}^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times SU(2)$ sont isomorphes [CG13] p.228.
- Norme sur le groupe des quaternions [CG13] p.225.

3.2 Rotations dans l'espace.

- Action de $SU(2)$ sur $\mathbb{H}$ par conjugaison [CG13] p.232.
- Noyau de cette action [CG13] p.233.
- $SU(2)/\{-I_2, I_2\}$ et $SO(3,\mathbb{R})$ sont isomorphes [CG13] p.233.
- Interprétations pour le calcul de rotations [CG13] p.225.

Développements

1. Groupe circulaire.
2. Polygones réguliers constructibles.

Leçon 183
Utilisation des groupes en géométrie.

Professeur encadrant : Grégory Boil.

Remarques du Jury

C'est une leçon transversale et difficile, qui peut aborder des aspects variés selon les structures algébriques présentes. D'une part un groupe de transformations permet de ramener un problème de géométrie à un problème plus simple.
D'autre part, les actions de groupes sur la géométrie permettent de dégager des invariants essentiels (angle, birapport). On retrouvera encore avec bonheur les groupes d'isométries d'un solide.

Squelette du plan

1. Géométrie affine.
   1.1 Le groupe affine.
   - Groupe affine [Com98] p.118.
   - Morphisme de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ dans $\mathrm{GL}(E)$ [Com98] p.119.
   - $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ et $E \rtimes \mathrm{GL}(E)$ sont isomorphes [Com98] p.119.
   - Orientation d'un espace affine réel [Com98] p.121.
   - Automorphisme affine direct et indirect [Com98] p.122.
   - Structure de $\mathrm{Aut}^+(\mathcal{E})$ [Com98] p.122.

   1.2 Action du groupe affine.
   - Action du groupe affine sur les repères affines [CG13] p.331.
   - Ellipse de Steiner [CG13] p.332.
   - Action du groupe affine sur une droite [Boy15] p.12.
   - Rapport de proportionnalité [Boy15] p.12.
   - Orbite de l'action du groupe affine [Boy15] p.12.
   - Invariant affine [Boy15] p.12.
   - Théorème de Thalès [Boy15] p.13.

   1.3 Trois problèmes géométriques.
   - Théorème de Pappus affine [Boy15] p.14.
   - Théorème de Desargues affine [Boy15] p.14.
   - Théorème de Ménélaüs [Boy15] p.15.
2. Géométrie euclidienne.
   2.1 Groupe des similitudes affines.
   - Similitude vectorielle [Boy15] p.112.
   - Groupe des similitudes affines [Boy15] p.112.
   - Groupe des isométries affines [Boy15] p.108.
   - Déplacement et anti-déplacement [Boy15] p.109.
   - Décomposition des isométries [Boy15] p.109.
   - Repère affine orthonormée [Boy15] p.112.

   2.2 Angles d'un plan affine orienté.
   - Angle orienté et non-orienté [Boy15] p.116.
   - Invariant euclidien [Boy15] p.116.
   - Angle orienté de deux demi-droites [Boy15] p.117.

- Angle orienté de vecteurs [Boy15] p.117.

2.3 Groupe des isométries d'une partie.

- Groupe des isométries d'un objet de $\mathbb{R}^n$ [CG13] p.361.
- Invariance du groupe d'isométries par similitude [CG13] p.361.
- Stabilisation de l'ensemble des points extrémaux [CG13] p.362.
- ⋆ Groupes d'isométries du cube [CG13] p.364.
- ⋆ Groupe d'isométrie du polygone régulier [CG13] p.363.
- ⋆ Groupes d'isométries du simplexe régulier [FGN10a] p.313.
- Pôle d'une rotation [CG15] p.414.
- Signature d'un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(3)$ [CG15] p.415.
- Equation caractéristique [CG15] p.415.
- Résolution de l'équation caractéristique [CG15] p.416.
- Signature et classe de conjugaison de sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$ [CG15] p.418.
- Groupes diédraux comme sous-groupes [CG15] p.419.
- Groupe du tétraèdre [CG15] p.422.
- Groupe du cube [CG15] p.422.
- Groupe de l'icosaèdre [CG15] p.423.
- Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$ [CG15] p.426.

3. Géométrie projective.

3.1 Droite projective et homographies.

- Construction de la droite projective [CG13] p.292.
- Décomposition $\mathrm{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [CG13] p.292.
- Action de $\mathrm{GL}(2,k)$ sur les droites de k^2 [CG13] p.293.
- Homographie [CG13] p.294.
- Homographies et homéomorphismes [CG13] p.294.
- Homographies et conformité [Eid09] p.261.

3.2 Invariant projectif : le birapport.

- Action de $\mathrm{PGL}(2,k)$ sur $\mathrm{P}^1(k)$ [CG13] p.295.
- Birapport de quatre points [CG13] p.296.
- Birapport et invariance par homographies [CG13] p.297.
- Stabilité du birapport et homographies.
- Egalité de birapports [CG13] p.297.
- Expression du birapport [CG13] p.297.
- Théorème des trois birapports [CG13] p.301.
- Théorème des rois birapports et cube [CG13] p.315.
- Théorème des six cercles [Boy15] p.347.
- Droite de Simson [Aud06] p.117.
- Théorème du pivot [Boy15] p.344.

3.3 Droites et cercles de la sphère de Riemann.

- Cercles de $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ et projection stéréographique [AM03] p.303.
- Cercles de $\mathrm{P}^1(\mathbb{C})$ et homographies [AM03] p.304.
- Division harmonique [Boy15] p.454.
- Condition de division harmonique [Boy15] p.455.
- Groupe circulaire et et divisions harmoniques.

- Groupe circulaire [Boy15] p.356.
- Partie génératrice du groupe circulaire [Boy15] p.358.
- Eléments du groupe circulaire [Boy15] p.358.
- Le groupe circulaire est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [CG13] p.312.
- Action du groupe circulaire sur les triplets de points de $\mathbb{S}^2$ [Boy15] p.363.

4. Utilisation des quaternions.

4.1 Le groupe des quaternions.

- Groupe des quaternions $\mathbb{H}$ [CG13] p.228.
- Présentation par générateurs et relations [CG13] p.224.
- $\mathbb{H}^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathrm{SU}(2)$ sont isomorphes [CG13] p.228.
- Norme sur le groupe des quaternions [CG13] p.225.

4.2 Quaternions et rotations.

- Action de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ par conjugaison [CG13] p.232.
- Noyau de cette action [CG13] p.233.
- $\mathrm{SU}(2)/\{-I_2, I_2\}$ et $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ sont isomorphes [CG13] p.233.
- Interprétations pour le calcul de rotations [CG13] p.225 ou [Boy15] p.159.

Développements

1. Groupe circulaire.
2. Isométries du simplexe régulier.

Leçon 190

Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Professeur encadrant : Matthieu Romagny.

Remarque du jury

Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. Le jury s'attend à ce que les candidats sachent calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités !
L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien fécond avec l'algèbre linéaire.

Remarques

1. Mettre une introduction dans le plan.
2. Insister sur l'aspect méthode.

Exercices et questions

1. Il y a 775 nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre pair. Pourquoi ?
2. Enoncer le principe des tiroirs.
3. Comment démontrer la formule du binôme de Newton ?

   Réponse : Par récurrence ou en dénombrant directement le nombre d'une certaine puissance de a, si on considère $(a+b)^n$, lorsqu'on développe la puissance.
4. Soit π la matrice de Pascal dont les coefficients sont donnés par les $\binom{i}{j}$. Quelle est l'inverse de π ?

   Réponse : π est la base de l'endomorphisme

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

   dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi

   $$\pi^{-1}_{i,j} = \binom{i}{j}(-1)^{i-j}.$$
5. Calculer la somme suivante :

   $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

   Réponse : On dérive $(1+x)^n$ et on évalue en 0 pour obtenir $n2^{n-1}$ comme résultat.
6. Donner une deuxième méthode.

   Réponse : On utilise cette fois ci la méthode du double comptage. On considère

   $$S = \{(A,b) : A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]), b \in A\}.$$

   Alors :

   $$\#S = \sum_{b\in[\![1,n]\!]} \#\{A \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) : b \in A\} = n2^{n-1},$$

   $$\#S = \sum_{A\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \#\{b \in A\} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k},$$

   ce qui donne le résultat.

7. Donner une dernière méthode.

   Réponse : Il suffit de remarquer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   ce qui donne directement le résultat voulu.

Squelette du plan

1. Dénombrement des ensembles finis.

   1.1 Ensembles finis.

   - Bijections entre les $[\![1,n]\!]$ [FF12] p.26.
   - Ensemble fini et cardinal [FF12] p.27.
   - Parties d'un ensemble fini [FF12] p.27.
   - Bijections entre ensembles finis [FF12] p.27.
   - ⋆ Cardinal de $SO(2,\mathbb{F}_p)$ [FGN01] p.17.
   - ⋆ Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ [dB98] p.18.
   - ⋆ Nombre de dérangements [FGN01] p.10.
   - Cardinal d'un produit d'ensembles finis [FF12] p.28.
   - ⋆ Nombre mots de 5 lettres [FF12] p.29.
   - Principe des bergers [dB98] p.21.
   - Lemme des tiroirs.
   - Nombre d'applications entre ensembles finis [dB98] p.10.
   - Cardinal d'une union disjoints d'ensembles finis [FF12] p.27.
   - ⋆ Si E est un ensemble fini $\#\{(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2 : A\cap B=\emptyset\} = 3^n$ [dB98] p.12.
   - Formule du crible [FF12] p.28.
   - ⋆ Expression de l'indicatrice d'Euler [FF12] p.37.
   - Double comptage [Cal14] p.226.

   1.2 Parties d'un ensemble fini.

   - Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini [FF12] p.29.
   - ⋆ Nombre de comités à partir de 7 personnes [FF12] p.29.
   - Coefficient binomial [dB98] p.13.
   - Valeur des coefficients binomiaux [dB98] p.13.
   - ⋆ Tirages dans un jeu de cartes [FF12] p.32.
   - ⋆ Fonctions strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ [FF12] p.32.
   - ⋆ Fonctions croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ [FF12] p.33.
   - ⋆ Nombre de solutions de $x_1+\ldots+x_n=p$ [FF12] p.33.
   - ⋆ Nombre de suites et répétitions [FF12] p.34.
   - Relations entre le coefficients binomiaux [dB98] p.13.
   - Théorème du scrutin [FF12] p.37.
   - Formule du binôme de Newton [dB98] p.15.
   - ⋆ Matrice de Pascal et inverse [dB98] p.15.
   - ⋆ Nombre de dérangements [dB98] p.16.
   - ⋆ Nombre de surjections [dB98] p.16.

   1.3 Permutations et arrangements.

- Arrangements d'un ensemble fini [dB98] p.10.
- Arrangements et injections [dB98] p.10.
- Nombre d'arrangements [dB98] p.10.
- ⋆ Nombre de tiercé [FF12] p.30.
- ⋆ Dates d'anniversaire [FF12] p.31.
- Nombre de permutations [dB98] p.11.
- ⋆ Anagrammes d'un mot [FF12] p.30.

2. Groupes et dénombrement.

2.1 Actions de groupes et cardinaux.

- On considère une action de G sur X.
- Cardinal de X et le cardinal des orbites [Cal14] p.204.
- Relation orbite stabilisateur [Cal14] p.203.
- ⋆ Cardinaux de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ et de $\mathrm{P}^n(\mathbb{F}_q)$ [CG13] p.250.
- ⋆ Involution sur un corps fini [FGN01] p.19.
- ⋆ Nilpotents sur un corps fini [CG13] p.215.
- ⋆ Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ [FGN01] p.54.
- Formule de Burnside [Com98] p.43 ou [Cal14] p.227.
- ⋆ Colliers de perle [Com98] p.44.

2.2 Théorèmes d'isomorphismes et dénombrement.

- Utilisation des groupes finis et des théorèmes d'isomorphisme.
- ⋆ Valeurs du symbole de Legendre [CG13] p.183.
- ⋆ Loi de réciprocité quadratique par double comptage [CG13] p.185.
- ⋆ Cardinaux de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}_q)$ et de $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{F}_q)$ [CG13] p.250.

3. Factorialité de $\mathbb{Z}$ et fonctions multiplicatives.

- Fonction multiplicative [Hin08] p.3.
- Fonction complètement multiplicative [Hin08] p.3.

3.1 Fonction de Mobius.

- Fonction μ de Möbius [FG97] p.93.
- μ est multiplicative [FG97] p.93.
- Formule d'inversion de Möbius [FG97] p.93.
- ⋆ Polynômes irréductibles sur les corps fini [FG97] p.190.

3.2 Indicatrice d'Euler.

- Indicatrice d'Euler φ [Gou94] p.31.
- $\varphi(n)$ est le nombre d'inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Théorème Chinois [Gou94] p.31.
- φ est multiplicative [Gou94] p.31.
- Expression de φ [Gou94] p.31.

3.3 Diviseurs d'un entier.

- Fonction τ nombre de diviseurs d'un entier [Hin08] p.164.
- τ est multiplicative [Hin08] p.166.
- Expression de τ [Hin08] p.164.
- $\liminf \tau(n) = 2$ [Hin08] p.164.

4. Utilisation des séries.

- Série génératrice [SP99] p.116.
- Partitions d'un entier en parts fixées [FGN09b] p.197.
- ⋆ Nombre de dérangements [FGN01] p.9.
- ⋆ Nombres de Catalan [SP99] p.128.
- ⋆ Nombres de Bell [FGN01] p.14.

Développements

1. Loi de réciprocité quadratique.
2. Nilpotent sur un corps fini.
3. Partitions d'un entier en part fixées.
4. Polynômes irréductibles sur les corps finis.

Deuxième partie

Analyse

Leçon 201
Espaces de fonctions ; exemples et applications.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Remarques du Jury

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple l'intervalle $[0,1]$) offrent des exemples élémentaires et pertinents. Dans ce domaine, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Il est regrettable de voir des candidats, qui auraient eu intérêt à se concentrer sur les espaces de fonctions continues ou bien de classe $\mathcal{C}^1$ et les bases de la convergence uniforme, proposer en développement le théorème de Riesz-Fischer dont il ne maîtrise visiblement pas la démonstration. Toutefois pour des candidats solides, ces espaces offrent de belles possibilités. Enfin, les candidats ambitieux pourront aborder les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.
Signalons que des candidats proposent assez régulièrement une version incorrecte du théorème de Müntz pour les fonctions continues. La version correcte dans ce cadre est

$$\overline{\operatorname{vect}(1, x^{\lambda_n})} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Des candidats aguerris peuvent développer la construction et les propriétés de l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, ses propriétés d'injection dans les fonctions continues, et évoquer le rôle de cet espace dans l'étude de problèmes aux limites elliptiques en une dimension. Ce développement conduit naturellement à une illustration de la théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

Remarque

L'étude de l'espace de Bergman constitue un bon développement.

Exercices et questions

1. Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H d'orthogonal nul. Montrer que F est dense dans H.

   Réponse : Cela provient directement du théorème du supplémentaire orthogonal.

2. Considérons $\mathcal{C}[0,1]$ muni de la norme de L^2. Trouver un sous-espace vectoriel dont l'orthogonal est trivial mais qui n'est pas dense dans $\mathcal{C}[0,1]$.

   Réponse : Considérons
   $$F = \left\{ f \in \mathcal{C}[0,1] : \int_{\frac{1}{2}}^{1} f = 0 \right\}.$$
   F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}[0,1]$ et vu comme un sous-espace vectoriel de $L^2(0,1)$:
   $$F = \mathcal{C}[0,1] \cap \ker\left(f \mapsto \left\langle f, \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1]} \right\rangle\right).$$
   C'est à partir de cette expression que l'on montre que F est d'orthogonal nul.

3. Soient (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonctions f et (x_n) une suite de $[a,b]$ qui converge vers x un élément de $[a,b]$. Montrer que $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.

   Réponse : Immédiat.

4. Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $g \circ f$.

   Réponse : On se ramène à un compact contenant les $f_n(x)$ et $f(x)$. g est alors uniformément continue sur ce compact ce qui permet de conclure.

Squelette du plan

1. Espaces des fonctions réelles régulières.

1.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un compact.

- Espace $\mathcal{C}^k(K)$ où K est un compact de $\mathbb{R}$ et k un entier naturel [ZQ95] p.265.
- ⋆ Exemple de non égalité dans [Hau07].
- Norme sur $\mathcal{C}^k(K)$ donnée par $\|f\|_k = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_\infty$ [ZQ95] p.265.
- Les espaces $(\mathcal{C}^k(K), \|.\|_k)$ sont des espaces de Banach [Pom94] p.189.
- Théorème d'Ascoli [SR08] p.83.
- ⋆ Compacité des opérateurs à noyaux [HL09] p.186.
- Théorème de Cauchy-Peano [Dem06] p.128.
- Théorème de Stone-Weierstrass [SR08] p.87.
- Cas particulier : Théorème de Weierstrass [Gou08] p.231.
- théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.106.

1.2 Espace de Schwartz.

- Espace de Schwartz $\mathcal{S}$ [Zui02] p.107.
- ⋆ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{-z|x|^2}$ est un élément de $\mathcal{S}$ [Zui02].
- Structure d'espace de Fréchet [Zui02] p.108.
- Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ [Zui02] p.108.
- ⋆ Pour tout $\Re(z) > 0$, la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-z|x|^2}$ est $\xi \mapsto \left(\frac{\pi}{z}\right)^{n/2} \exp\left(\frac{-|\xi|^2}{4z}\right)$ [Zui02] p.108.
- La transformée de Fourier est une application linéaire bicontinue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ [Zui02] p.109.
- Propriétés de la transformée de Fourier [Zui02] p.111.

2. Espaces de fonctions holomorphes.

2.1 Structure d'espace de Fréchet.

- Théorème de Weierstrass [SR08] p.284.
- Distance de la convergence uniforme sur les compacts [SR08] p.46.
- $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace de Fréchet [SR08] p.320.
- Continuité de la somme, du produit et de la dérivation dans $\mathcal{H}(\Omega)$ [SR08] p.320.

2.2 Caractérisation des parties relativement compactes.

- Parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$ [SR08] p.321.
- Théorème de Montel [SR08] p.322.
- Application : La topologie de la converge locale uniforme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normable.

3. Espaces de Lebesgue.

- On fixe un espace mesuré dans cette partie.

3.1 Construction.

- Construction des espaces L^p [BP12] p.161.
- Structure d'espace vectoriel normé [BP12] p.161.
- ⋆ Introduction des l^p et inclusions [BP12] p.154.
- Inclusions dans le cas d'une mesure finie [BP12] p.154.
- $\mathcal{S}$ est inclus dans tous les L^p [Zui02] p.108.

3.2 Complétude - Convergence dans les L^p.

- Théorème de Riesz-Fisher [Bre05] p.57.

♮ Espace de Bergman [AM03] p.122.
- Convergence L^p et convergence presque partout en lien avec le théorème précédent [Bre05] p.57.

⋆ Convergence $L^p(\mu)$ mais non presque partout [BP12] p.164.
- Théorème de convergence L^p-dominée [BP12] p.165.

♮ Théorème de Rademacher.

3.3 Cas particulier de L^2.
- Structure hilbertienne de L^2 [Bre05] p.78 ou [BP12] p.175.
- Héritage des propriétés usuelles de espaces de Hilbert : projection sur un convexe fermé, théorème de représentation de Riesz entre autres [Bre05] p.79 ou [BP12] p.176.
- Densité des polynômes orthogonaux [BMP04] p.140.
- Base hilbertienne, séries de Fourier [Far06b] p.148 et p.150.
- Convergence en norme L^2 et formule de Parseval [Far06b] p.150.

⋆ Calcul de $\zeta(2)$ [Far06b] p.151.
- Convergence uniforme dans le cas où la fonction est continue et la série de ses coefficients de Fourier converge absolument [Far06b] p.152.
- Remarque : le résultat précédent s'applique pour les fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux [Far06b] p.153.

♮ Equation de la chaleur [ZQ95] p.105.

3.4 Espace de Sobolev $H^1(0,1)$.
- Espace de Sobolev $H^1(0,1)$ [Bre05] p.120.
- Structure d'espace vectoriel normé séparable [Bre05] p.121.
- Existence d'un représentant continu [Bre05] p.122.
- Injection compacte dans l'espace $\mathcal{C}[0,1]$ [Bre05] p.129.
- Espace vectoriel normé $H_0^1(0,1)$. Propriété d'annulation en 0 et en 1 [Bre05] p.132 et p.133.
- Formule de Poincaré [Bre05] p.134.
- Dual de $H_0^1(0,1)$. Structure d'espace vectoriel normé [Bre05] p.135 ou [Zui02] p.87.

⋆ Problème de Dirichlet pour le Laplacien [All05] p.112 ou [Zui02] p.93.

4. Opérateurs linéaires continus.

4.1 Continuité des applications linéaires.
- Caractérisations de la continuité des applications linéaires [SR08] p.101.
- Structure d'espace vectoriel normé pour $\mathcal{L}(E,F)$ [SR08] p.102.
- $\mathcal{L}(E,F)$ est un Banach si F l'est [SR08] p.104.

4.2 Théorème fondamentaux.
- Théorème de Banach-Steinhaus [SR08] p.117 ou [ZQ95] p.195.
- Application : toute limite simple d'une suite d'applications linéaires continues entre un espace de Banach et un espace vectoriel normé est une application linéaire continue [SR08] p.118.
- Application : toute suite qui converge faiblement est bornée [SR08] p.142.
- Application : il existe des fonctions différentes de la somme de leur série de Fourier [Far06b] p.182.
- Théorème de l'application ouverte [SR08] p.353.
- Application : Théorème de Banach [SR08] p.355.
- Théorème du graphe fermé [SR08] p.355.
- Théorème de Grothendieck [Zav13] p.180.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Théorème de Grothendieck.
4. Théorème de Rademacher.

Leçon 202
Exemples de parties denses et applications.

Professeur encadrant : Ismaël Bailleul.

Remarques du Jury

Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme par exemple les sous-groupes de $\mathbb{R}$ et leurs applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximations de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Au delà des exemples classiques, les candidats plus ambitieux peuvent aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles par séries de Fourier.

Remarque Il vaut mieux énoncer le théorème de Müntz dans L^2.

Exercices et questions

1. Soient $0 < a < b$ des réels et (α_n) une suite infinie bornée de nombre complexes. Pour tout entier naturel n , on pose
$$e_n : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t^{\alpha_n} \end{array}.$$
Montrer que (e_n) est dense dans $(\mathcal{C}[a,b], \|.\|_\infty)$.

   Réponse : On pose $V = \mathrm{vect}(e_n : n \in \mathbb{N})$. Soit $\varphi \in (\mathcal{C}[a,b])'$ qui s'annule sur V. Montrons que φ est nulle, le corollaire de Hahn-Banach géométrique sur le lien entre la densité et l'orthogonal donnera le résultat. Considérons
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \varphi(t \mapsto t^z) \end{array}.$$
Alors g est holomorphe, étant donné que
$$\forall z \in \mathbb{C} : \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \varphi\left(t \mapsto t^z \frac{t^h - 1}{h}\right) \underset{h \to 0}{\to} \varphi\left(t \mapsto t^z \ln t\right)$$
car φ est continue (une étape de plus est nécéssaire). De plus, $g(\alpha_n) = 0$ pour tout entier naturel n donc g s'annule sur un ensemble infini borné et $\mathbb{C}$ est connexe donc d'après par le principe des zéros isolés, g est nulle ce qui entraîne que φ est nulle d'après le théorème d'approximation de Weirestrass.

2. Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $[0,1]$. Un sous-ensemble des probabilité 1 est-il dense ? Même question si $\mathbb{P}$ admet une dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue.

   Réponse : Pour la mesure δ_0, on remarque que généralement, un ensemble de mesure pleine n'est pas forcément dense. On suppose à présent que $\mathbb{P}$ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $X \subset [0,1]$ un ensemble de mesure pleine. Considérons $x \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Alors come X est de mesure pleine :
$$\mathbb{P}\left(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [0,1] \cap X\right) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt > 0$$
ce qui montre que X est dense.

3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$ indépendantes et identique distribuées. Soit $d\mathbb{P} = f d\lambda$ la loi commune des X_n, avec $f > 0$. Montrer que presque surement, $(X_n(\omega))$ est dense dans $[0,1]$. Et si on suppose que les X_n sont toujours indépendants mais vérifient $\mathbb{P}\left(X_n \leq 1 - \frac{1}{n}\right) = a_n$ avec $\sum a_n$ convergente, qu'en est-il ?

Réponse : Supposons dans un premier temps que les X_n sont indépendantes et identiquement distribuées. Soient $x \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. Alors pour tout entier naturel non nul p :

$$\mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n \notin \mathcal{B}(x,\varepsilon)\right) \leq \mathbb{P}\left(X_1 \notin \mathcal{B}(x,\varepsilon), \dots, X_p \notin \mathcal{B}(x,\varepsilon)\right) \leq \mathbb{P}\left(X_1 \notin \mathcal{B}(x,\varepsilon)\right)^p \underset{p\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne le résultat. Sous les secondes hypothèses, le théorème de Borel-Cantelli entraîne que

$$\mathbb{P}\left(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0 : X_n > \frac{1}{n}\right) = 1,$$

et donc (X_n) entraîne presque surement vers 1.

4. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. A t-on $\mathrm{GL}(E)$ dense dans $\mathcal{L}(E)$?

   Réponse : C'est vrai en dimension finie mais faux dans le cas quelconque. Considérons $E = l^2(\mathbb{N})$ et S l'opérateur de shift à gauche. Alors l'adjoint de S est S^* l'opérateur de shift à droite qui est son inverse à droite. Montrons que $d(S, \mathrm{GL}(E)) \geq 1$ en supposant par l'assure que $d(S, \mathrm{GL}(E)) < 1$. Alors il existe $G \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\|S - G\| < 1$. Comme $\|S^*\| = 1$, il s'ensuit que $\|\mathrm{id} - GS^*\| < 1$ et donc $S^* \in \mathrm{GL}(E)$. C'est absurde.

Squelette du plan

Dans toute la leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Notion de densité.
   1.1 Parties denses dans les espaces métriques.
   - Adhérence d'une partie d'un espace métrique [SR08] p.13.
   - Partie dense d'un espace métrique [SR08] p.13.
   - L'adhérence est stable par inclusion. Ainsi, une partie qui contient une partie dense est dense.
   - L'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.
   - Un hyperplan est soit fermé, soit dense selon que la forme linéaire qui la représente est continue ou non.
   - Caractérisation des parties denses dans les espaces vectoriels normés *via* l'orthogonal [Bre05] p.7.

   1.2 Séparabilité.
   - Espace métrique séparable [SR08] p.29.
   - ⋆ $\mathbb{R}$ est séparable [SR08] p.2.
   - Remarque : on verra par la suite d'autres espaces métriques séparables.
   - Remarque : la séparabilité sert par exemple en théorie de la mesure à inverser des quantificateur et des presque-partout ou bien permet de profiter des propriétés usuelles des mesures comme la σ-additivité.
   - ⋆ Inégalité de Hoeffding et convergence presque sûre [Ouv00] p.129.
2. Fonctions continues et parties denses.
   2.1 Caractérisation séquentielle de la continuité.
   - Caractérisation séquentielle de la continuité [Rom04] p.38.
   - Deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
   - Remarque : on utilisera ce résultat par la suite.

   2.2 Prolongement des fonctions uniformément continues.
   - Théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace complet [Pom94] p.48.
   - Application : intégrale de Riemann pour les fonctions réglées [Pom94] p.49.

- Application : unicité du complété d'un espace métrique [Pom94] p.49.
- Remarque : on verra une autre application dans les espaces de Lebesgue.

2.3 Théorème de Weierstrass.

- Théorème de Stone-Weirestrass [SR08] p.87.
- Corollaire : Théorème de Weirestrass [Gou08] p.231.
- L'espace des fonctions continues sur un compact est séparable.
- ♮ Théorème de Markov-Kakutani [GT96] p.77 et p.152.
- Si f est orthogonale à tous les monômes pour le produit scalaire L^2, alors f est nulle [Gou08] p.286.
- ♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.105.
- ⋆ Soient $0 < a < b$ des réels et (α_n) une suite bornée de nombre complexes. Pour tout entier naturel n , on pose $e_n : t \in [a,b] \mapsto t^{\alpha_n}$. Alors (e_n) est dense dans $\mathcal{C}[a,b]$.

3. Exemples de parties denses en dimension finie.

3.1 Les parties denses de $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ [SR08] p.2.
- ♮ Théorème de Grothendieck [Zav13] p.180 et [Rud73] p.111.
- Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense, soit discret dans $\mathbb{R}$ [FGN03] p.29.
- $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si α/β est irrationnel [FGN03] p.29.
- Application : $\sin(\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1,1]$ [FGN03] p.29.
- L'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.
- Application : caractérisation des fonctions convexes continues [Rom04] p.237.

3.2 Parties denses dans les ensembles de matrices.

- L'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r à coefficients dans $\mathbb{K}$ est égale à l'ensemble des matrices de rang inférieur à r [FGN01] p.217.
- Cas particulier : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$ [FGN01] p.217.
- Application : les matrices AB et BA à coefficients dans $\mathbb{K}$ ont même polynôme caractéristique [BMP04] p.217.
- Application : différentielle du déterminant [Laf10] p.19.
- L'ensemble des matrices à n valeurs propres distinctes est dense dans $\mathcal{M}(n,\mathbb{C})$ [FGN09a] p.218.
- Application : théorème de Cayley-Hamilton [BMP04] p.217.

4. Le cas des espaces de Lebesgue.

4.1 Densité dans les espaces L^p.

- Les fonctions étagées sont denses dans les L^p [HL09] p.126 [BP12] p.165 et p.173.
- L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans les L^p pour $1 \leq p < \infty$ [Bre05] p.71.
- Application : lemme de Riemann-Lebesgue [Far06b] p.106.
- ♮ Théorème de Rademacher.

4.2 Séparabilité.

- Les L^p sont séparables pour $1 \leq p < \infty$ [BP12] p.173.
- L^∞ n'est pas séparable [BP12] p.173.

4.3 Transformée de Fourier.

- Transformée de Fourier L^1 [Far06b] p.130.
- Densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 [Far06b] p.137.
- Théorème de Plancherel [Far06b] p.137 ou [Zui02] p.119.

5. Densité dans les espaces de Hilbert.
   5.1 Parties denses dans les Hilbert.
   - Théorème du supplémentaire orthogonal [HL09] p.93.
   - Corollaire : Une partie d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est trivial [HL09] p.93.
   - Application : Théorème de Lax-Milgram [HL09] p.101.

   5.2 Bases hilbertiennes.
   - Base hibertienne [Bre05] p.86.
   - ♮ Espace de Bergman [AM03] p.122.
   - Tout espace de Hilbert séparable admet une base hibertienne [Bre05] p.86.
   - Densité des polynômes orthogonaux [BMP04] p.140.

   5.3 Cas particulier de $L^2(\mathbb{T})$.
   - ⋆ (e_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ [Far06b] p.150 ou [BMP04] p.123.
   - ♮ Théorème de Féjer [Gou08] p.286.
   - Interprétation : l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues périodiques [Far06b] p.159.

Développements

1. Espace de Bergman.
2. Théorème de Grothendieck.
3. Théorème de Rademacher.
4. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 203
Utilisation de la notion de compacité.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale (confusion générale entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*). Néanmoins, on attend des candidats une présentation synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de Heine et le théorème de Rolle doivent y figurer et leur démonstration être connue.
Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de Stone-Weierstrass, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables.
Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extremums mériterait d'être davantage étudié (lien avec la coercivité en dimension finie).
Les candidats solides peuvent aussi enrichir leur leçon par des exemples tels que l'étude des opérateurs à noyau continu.
Pour les candidats ambitieux, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et on pourra développer par exemple leurs propriétés spectrales.

Squelette du plan

1. Compacité.

   1.1 Notion de compacité.

   - Espace métrique compact [SR08] p.33.
   - Espace métrique compact et intersection de fermés [SR08] p.34.
   - ⋆ Les élément d'une suite convergente d'un espace métrique auquel on ajoute sa limite forme une partie compacte [SR08] p.30.
   - Partie compacte d'un espace métrique [Gou08] p.28.
   - Partie relativement compacte [SR08] p.34.
   - Théorème de Bolzano-Weierstrass [Gou08] p.28.
   - ⋆ Compact de $l^2(\mathbb{N})$ [FGN10b] p.154.
   - Valeur d'adhérence unique et espace métrique complet [Gou08] p.30.
   - ⋆ Convergence en loi des lois normales.
   - Théorème de Riesz [SR08] p.99.
   - ⋆ Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact [SR08] p.41.
   - ⋆ Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les intervalles fermés et bornés [SR08] p.41.

   1.2 Propriétés des compacts.

   - Un compact est fermé [SR08] p.35.
   - Un compact est borné [Gou08] p.27.
   - Un fermé dans un compact est compact [SR08] p.34.
   - Un espace compact est complet [Gou08] p.30.
   - Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet [SR08] p.57 ou [FGN10b] p.79.
   - ⋆ Compacts de $l^1(\mathbb{N})$ [FGN10b] p.128.

   1.3 Compacité et opérations ensemblistes.

   - Union de compacts [Gou08] p.28.
   - Intersection de compacts [Gou08] p.28.

- Théorème de Tychonoff [Gou08] p.30 ou [SR08] p.40.

⋆ Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées [SR08] p.42.

2. Fonctions continues sur un compact.

2.1 Uniforme continuité.

- Théorème de Heine [SR08] p.43.
- Toute fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux [Pom94] p.62.
- Deuxième théorème de Dini [FGN09b] p.156.

2.2 Problèmes d'extrema.

- L'image d'un compact par une fonction continue est un compact [SR08] p.42.
- Toute fonction continue sur un compact à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes [SR08] p.42.
- Dans le cas complexe, on peut préciser le lieu d'atteinte de ces bornes sous une certaine hypothèse.
- Propriété de la sous-moyenne [AM03] p.153.
- Principe du maximum [AM03] p.155.
- Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, toutes les normes sont équivalentes [SR08] p.96.
- Toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie.
- Théorème de Rolle [SR08] p.156.
- Théorème des accroissements finis [SR08] p.157.

2.3 Existence de points fixes.

- Théorème du point de Banach version compact pour des fonction lipschitziennes de rapport 1 [FGN10b] p.70.
- Théorème de Brouwer en dimension 1.
- Toute fonction continue d'un compact étoilé de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}^*$ est l'exponentielle d'une fonction continue de ce compact à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Théorème de Brouwer en dimension 2 [Rou09] p.175.
- Ce théorème est vrai en toute dimension pour des parties de $\mathbb{R}^n$ homéomorphes à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ [Rou09] p.175.

3. Espace des fonctions continues sur un compact.

3.1 Complétude de l'espace des fonctions continues sur un compact.

- Si F est un espace métrique complet, $\mathcal{C}(K, F)$ muni de la distance de la convergence uniforme est complet [SR08] p.56.
- Théorème du point fixe de Banach [Rou09] p.147.

♮ Théorème de Cauchy-Lipschitz [Dem06] p130.

⋆ Les systèmes linéaires admettent une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$ [Rou09] p.181.

⋆ Le problème de Cauchy $y' = y^2$, $y(0) = 1$ admet une unique solution qui explose en temps fini [Rou09] p.181.

3.2 Approximation des fonctions continues sur un compact.

- Premier théorème de Dini [FGN09b] p.156.
- Théorème de Stone-Weierstrass [SR08] p.87 ou [HL09] p.30.

⋆ Densité de l'ensemble des polynômes à plusieurs variables continues sur un compact de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ [HL09] p.30.

⋆ Suite de polynômes qui converge uniformément vers la racine carrée sur $[0, 1]$ [FGN09b] p.156.

- Théorème de Weierstrass avec vitesse de convergence [ZQ95] p.518 ou [Les01] p.14.
- Théorème taubérien fort [CLFM95] p.106.
- Injectivité de la transformée de Laplace [Pom94] p.179.

3.3 Compacité dans l'espace des fonctions continues.

- Parties équicontinues et uniformément équicontinues de $\mathcal{C}(K, F)$ [SR08] p.81 et p.82.
- ⋆ Toute famille de fonctions lipschitziennes avec même coefficients de Lipschitz est uniformément équicontinue.
- Théorème d'Ascoli [SR08] p.83.
- Solution approchée par la méthode d'Euler [Dem06] p.133.
- Théorème de Cauchy-Peano [Dem06] p.137.
- ⋆ L'équation différentielle $y' = 3|y|^{2/3}$ admet deux solutions maximales [Dem06] p.138.
- Topologie de la convergence locale uniforme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ [AM03] p.93.
- Parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$ [SR08] p.321.
- Théorème de Montel [AM03] p.92 ou [SR08] p.322.
- La topologie de la convergence locale informe sur $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normable.

Développements

1. Théorème d'Ascoli.

Leçon 204
Connexité. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité ; par exemple, diverses démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss. On distinguera bien connexité et connexité par arcs, mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident.

Squelette du plan

1. Connexité.
   1.1 Caractérisations de la connexité.
   - Différentes définitions d'un espace connexe [Gou08] p.38.
   - Parties connexes dans un espace métrique [Gou08] p.39.
   - ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$ [Gou08] p.39.
   - Surjection continue et espace connexe [SR08] p.69.
   - Un espace homéomorphe à un espace connexe est connexe [SR08] p.69.
   - Parties comprises entre un connexe et son adhérence [Gou08] p.40.
   - Lemme du passage des douanes [SR08] p.70.

   1.2 Connexité et applications continues
   - Connexité et applications continues [Gou08] p.39.
   - ⋆ Pour $f : x \mapsto x^2$ continue, $f^{-1}([1, +\infty[)$ n'est pas connexe [Hau07] p.296.
   - Connexité et applications continues à valeurs dans $\{0, 1\}$ [Gou08] p.39.
   - ⋆ Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles [Gou08] p.41.
   - Théorème des valeurs intermédiaires [Gou08] p.41.
   - Connexité et réunion [Gou08] p.40.
   - ⋆ La réunion des deux connexes $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ n'est pas connexe [Hau07] p.296.
   - Connexité et produit cartésien [Gou08] p.40.
   - ⋆ L'intersection de $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}$ deux connexes de $\mathbb{C}$ n'est pas connexe [Hau07] p.296.

   1.3 Composantes connexes.
   - Composantes connexes comme classe d'équivalence d'appartenance à un même connexe [Gou08] p.41.
   - Les composantes connexes forment une partition de l'espace [Gou08] p.41.
   - Les composantes connexes sont fermées [Gou08] p.41.
   - Si les composantes connexes sont en nombre fini, alors elles sont ouvertes [Gou08] p.41.
2. Connexité par arcs et par lignes brisées.
   2.1 Connexité par arcs.
   - Chemin dans un espace métrique [Gou08] p.42.
   - Espace métrique connexe par arcs [Gou08] p.42.
   - ⋆ $\mathbb{R}^2$ privé de n'importe quel de ses points est connexe par arcs [Gou08] p.47.
   - ⋆ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes [Gou08] p.47.
   - La connexité par arcs entraîne la connexité [Gou08] p.42.

- ⋆ L'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est connexe mais non connexe par arcs [SR08] p.76.
- • Deux espaces homéomorphes ont même nombre de composantes connexes.

2.2 Connexité par lignes brisées.

- • Segment dans un espace vectoriel normé [Gou08] p.42.
- • Ligne brisée dans une space vectoriel normé [Gou08] p.42.
- • Partie connexe par lignes brisées [Gou08] p.42.
- ⋆ Les parties convexes ou étoilées sont connexes par lignes brisées [Gou08] p.51.
- ⋆ Pour tout I intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $\{(x, y) \in I^2 : x < y\}$ est une partie connexe par lignes brisées de $\mathbb{R}^2$ [Gou08] p.47.
- • Théorème de Darboux [Gou08] p.47.
- • Une partie connexe par lignes brisées est connexe par arcs [Gou08] p.42.
- • Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, une partie ouverte est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées [Gou94] p.42.
- • Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs [Gou08] p.43.

2.3 Connexité des espaces de matrices.

- • $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs [CG13] p.26 ou [Rom99b] p.45.
- • $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs par théorème de réduction des rotations [Rom99b] p.45.
- • $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes [CG13] p.39 ou [Rom99b] p.45.
- • $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs par opérations élémentaires [Rom99b] p.45.
- • $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes [CG13] p.38 ou [Rom99b] p.45.
- • $\mathrm{SL}(n, k)$ est connexe par arcs car est engendré par les transvections [Com98] p.31.

3. Utilisation de la connexité en analyse.

3.1 Inégalité des accroissements finis.

- • Inégalité des accroissements finis [Rou09] p.104 ou [SR08] p.180.
- • Nullité de la différentielle et constance [SR08] p.180.
- ⋆ La fonction $(a, b) \mapsto \arctan a + \arctan b - \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ est constante sur les composantes connexes de son ensemble de définition.
- • Inéquation différentielle [Rou09] p.132.
- • Unicité de la solution du problème de Cauchy pour une fonction continue globalement lipschitzienne par rapport à l'espace [Rou09] p.132.

3.2 Zéros des fonctions holomorphes.

- • Principe des zéros isolés [AM03] p.133.
- • Principe du prolongement analytique [AM03] p.88.
- ⋆ Equation fonctionnelle de la fonction Γ [AM03] p.95.
- • Principe de l'argument [AM03] p.242.
- • Théorème de Rouché [AM03] p.243.

3.3 Principe du maximum.

- • Propriété de la sous-moyenne [AM03] p.153.
- • Principe du maximum [AM03] p.155.
- • Ce théorème s'applique aux fonctions holomorphes [AM03] p.155.
- • Extrema des modules de fonctions holomorphes [AM03] p.154.
- • Théorème de d'Alembert-Gauss [AM03] p.154.

3.4 Etudes des équations différentielles.

- ♮ Théorème de Cauchy-Lipschitz [Dem06] p.141.
- ⋆ $y' = y^2$ avec $y(0) = 0$ admet une unique solution maximale [Rou09] p.181.
- ⋆ $y' = 3|y|^{3/2}$ avec $y(0) = 0$ admet deux solutions [Dem06] p.138.

4. Action de groupes et connexité.

4.1 Groupes topologiques.

- Groupe topologique [CG13] p.26.
- $\mathrm{GL}(n,k)$ et ses sous-groupes sont des groupes topologiques [CG13] p.26.
- Théorème d'homéomorphisme [CG13] p.35.
- Si G est un groupe topologique, H un sous-groupe de G tel que H et G/H soient connexes, alors G est connexe [CG13] p.37.
- On retrouve la connexité de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ grâce à son action sur $\mathbb{C}^n$ [CG13] p.38.
- On retrouve la connexité de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ grâce à son action sur $\mathbb{R}^n$ [CG13] p.39.
- On retrouve la connexité de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ grâce à son action sur $\mathbb{S}^{n-1}$ [CG13] p.39.
- ⋆ $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est simple [CG13] p.239.

4.2 Actions de groupes et composantes neutres.

- Composante neutre d'un groupe topologique [CG13] p.38.
- La composante neutre d'un groupe topologique est un sous-groupe distingué
- ⋆ La composante neutre de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ [CG13] p.39.
- L'action de certains groupes topologiques, par exemple par conjugaison, permet de déterminer leur composante neutre.
- ♮ Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.274.
- ⋆ Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_0(3,1)$ [CG13] p.274.

Développements

1. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$.
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Leçon 205
Espaces complets. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Remarques du Jury

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence en dimension infinie, en particulier dans les espaces de fonctions. Rappelons que l'on attend des candidats une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Le théorème de Cauchy- Lipschitz, mal maîtrisé par beaucoup de candidats, est un point important de cette leçon. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles.
On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans application pertinente et maîtrisée. Rappelons à ce propos que la démonstration détaillée de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point est réservée aux candidats solides.

Squelette du plan

1. Espaces complets.
   1.1 Suites de Cauchy et espaces complets.
   - Suite de Cauchy [SR08] p.53.
   - Toute suite convergente est de Cauchy [SR08] p.54.
   - Suite de Cauchy et valeur d'adhérence [SR08] p.54.
   - Espace métrique complet [SR08] p.55.
   - Un sous-espace fermé d'un espace métrique est complet [SR08] p.55.
   - La complétude est une notion métrique et pas topologique [SR08] p.55.
   - Toute sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet [SR08] p.55.
   - Théorème des fermés emboités [SR08] p.55.
   - ⋆ $\mathbb{R}^2$ n'est pas recouvrable par des cercles deux à deux disjoints.
   - Un produit d'espaces complets est complet pour la topologie produit [SR08] p.56.
   - ⋆ $\mathbb{R}$ est complet puis les $\mathbb{R}^n$ sont complets [SR08] p.56.
   - ⋆ $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace métrique complet.
   - Théorème de Baire [Gou08] p.397.
   - Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ n'est pas réunion de sous-espaces stricts [FGN10b] p.149.
   - Une suite de sous-espaces de même dimension d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ont un supplémentaire commun [FGN09b] p.149.
   - Un espace vectoriel admettant une base dénombrable n'est pas complet [Gou08] p.399.
   - ⋆ $\mathbb{K}[X]$ n'est complet pour aucune distance.
   - Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet [SR08] p.57.

   1.2 Prolongement des application uniformément continues.
   - Suite de Cauchy et applications uniformément continues [SR08] p.54.
   - Théorème de prolongement des applications uniformément continues [SR08] p.58 ou [Pom94] p.48.
   - Intégrale de Riemann pour les fonctions réglées [Pom94] p.49.
   - Unicité du complété d'un espace métrique [Pom94] p.49.
   - Théorème de Plancherel sur la transformée de Fourier L^2 [Zui02] p.119 ou [Far06b] p.137.

- ♮ Théorème de Rademacher.

1.3 Théorème du point fixe de Banach.

- • Théorème du point fixe de Banach [SR08] p.59.
- ♮ Théorème de Cauchy-Lipschitz [Dem06] p.141.
- ⋆ Les systèmes linéaires admettent des solutions uniques définies sur $\mathbb{R}$ [Rou09] p179.
- ⋆ Le problème de Cauchy $y' = y^2$ avec $y(0) = 1$ admet une unique solution qui explose en temps fini [Rou09] p.179.
- • Théorème d'inversion locale [Rou09] p.222.

2. Espaces de Banach.

2.1 Notion d'espace de Banach.

- • Espace de Banach [SR08] p.94.
- ⋆ L'espace $\mathcal{B}(X, E)$ avec E un Banach muni de la norme uniforme est un espace de Banach.
- ⋆ Cas particuliers : $c_0(\mathbb{N})$, $\mathcal{C}(K, F)$ avec K compact sont des Banach pour la norme uniforme [SR08] p.56 et p.100.
- ⋆ Si F est un Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach. Le dual topologique d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé est toujours un Banach.
- ⋆ L'espace des fonctions lipchitziennes n'est pas complet pour la norme uniforme mais l'est pour la norme lipschitz [FGN10b] p.131.
- • Espace vectoriel normé et séries normalement convergentes [SR08] p.95.
- ⋆ Théorème de Riesz-Fischer [BP12] p.161.
- • Un sous-espace de dimension fini d'un espace vectoriel normé est complet [SR08] p.98.

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus.

- • Théorème de Banach-Steinhaus [SR08] p118.
- • Toute limite simple d'une suite d'applications linéaires continues entre un espace de Banach et un espace vectoriel normé est une application linéaire continue [Bre05] p.17 ou [SR08] p.118.
- • Toute suite qui converge faiblement est bornée [SR08] p.142.
- • Il existe des applications non égales à leur série de Fourier [Far06b] p.182 ou [Gou08].

2.3 Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.

- • Théorème application ouverte [Bre05] p.18 ou [SR08] p.353.
- • Théorème de Banach [Bre05] p.19.
- ⋆ Un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes fermé dans $L^2[0, 1]$ est de dimension finie.
- • Théorème du graphe fermé [Bre05] p.20 ou [SR08] p.355.
- • Remarque : la réciproque est immédiate en toute généralité [SR08] p.355.

3. Structure hilbertienne.

3.1 Espaces de Hilbert.

- • Espace préhilbertien [SR08] p.133.
- • Espace de Hilbert [SR08] p.134.
- ⋆ L^2 et l^2 sont des espaces de Hilbert [Far06b] p.49 et p.50.
- ♮ Théorème de Grothendieck [Zav13] p.180 et [Rud73] p.111.
- ⋆ $H^1(0, 1)$ est un espace de Hilbert [Bre05] p.121.
- ♮ Espace de Bergman [AM03] p.122.

3.2 Projection sur un convexe fermé.

- Théorème de projection sur un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert [HL09] p.79 ou [SR08] p.135.
- Propriété de 1-lipschitzienneté [Bre05] p.80 ou [SR08] p.137.

⋆ Existence de l'espérance conditionnelle [BMP04] p.100.

- Théorème du supplémentaire orthogonal et caractérisation de la densité [Bre05] p.82 ou [SR08] p.138.
- Théorème de représentation de Riesz [Bre05] p.81 ou [SR08] p.139.
- Existence de l'adjoint [SR08] p.140.

3.3 Théorème de Lax-Milgram.

- Théorème de Lax-Milgram [All05] p.74.
- Existence d'un représentant continu pour les éléments de $H^1(0,1)$ [Bre05] p.122.
- Espace $H_0^1(0,1)$ et caractérisation [Bre05] p.132 et p.133.
- Inégalité de Poincaré [Bre05] p.134.

⋆ Problème de Sturm-Liouville [Bre05] p.138.

Développements

1. Espace de Bergman.
2. Théorème de Grothendieck.
3. Théorème de Rademacher.

Leçon 206

Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses des théorèmes énoncés . Les applications aux équations différentielles sont importantes. Répétons que la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz est attendue.
Pour l'analyse de convergence des méthodes de point fixe, les candidats ne font pas suffisamment le lien entre le caractère localement contractant de l'opérateur itéré et la valeur de la différentielle au point fixe. La méthode de Newton, interprétée comme une méthode de point fixe, fournit un exemple où cette différentielle est nulle, la vitesse de convergence étant alors de type quadratique. L'étude de méthodes itératives de résolution de systèmes linéraires conduit à relier ce caractère contractant à la notion de rayon spectral.
Pour les candidats solides, il est envisageable d'admettre le théorème de point fixe de Brouwer et d'en développer quelques conséquences comme le théorème de Perron-Frobenius.

Squelette du plan

Notion de point fixe.

1. Points fixes et complétude.
   1.1 Théorème du point fixe de Picard.
   - • Théorème du point fixe de Picard [Rou09] p.147.
   - ⋆ Contre-exemple sans complétude [Rou09] p.148.
   - ⋆ Contre-exemple lorsque le fermé n'est pas fixé [Rou09] p.148.
   - ⋆ Contre-exemple sans caractère contractant [Rou09] p.148.
   - • Théorème du point fixe pour les étirées [Rou09] p.169.
   - • Théorème du point fixe à paramètre [Rou09] p.173.
   - ⋆ Etude d'un système à paramètre [Rou09] p.173.

   1.2 Une première application aux EDO.
   - ♮ Théorème de Cauchy-Lipschitz [Dem06] p.141.
   - ⋆ $y' = y^2$ avec $y(0) = 1$ admet une unique solution qui explose en temps fini [Rou09] p.181.
   - • Théorème de Cauchy-Lipschitz global [Rou09] p.179.
   - ⋆ Les systèmes linéaires sont partout définis [Rou09] p.181.

   1.3 Inversion locale.
   - • Théorème d'inversion locale [Rou09] p.188.
   - • Application : Morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [Laf10] p.37.
   - • Application : Il existe W un voisinage de la matrice identité dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tel que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ contenu dans W, alors G est trivial [Laf10] p.37.
   - • Théorème des fonctions implicites [Rou09] p.192.
   - ⋆ Développement asymptotique des racines d'un polynôme du troisième degré [Rou09] p.245.
   - • L'ensemble des polynômes scindés simples de degré n est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$ [BMP04] p.12.
   - ⋆ Equation de Burgers [Rou09] p.257.

   1.4 Résolution de problèmes elliptiques.

- Théorème de Stampacchia [Bre05] p.83.
- Théorème de Lax-Milgram [Bre05] p.84.

⋆ Résolution de $-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$ dans $H_0^1(0,1)$.

2. Points fixes et compacité.

2.1 Points fixes et compacts.

- Théorème de point fixe de Browder [SR08] p.144.
- Cas particulier d'un compact [FGN10b] p.110.
- Structure de l'ensemble des points fixes dans le cas euclidien [FGN10b] p.110.

⋆ Contre-exemple dans le cas non euclidien [FGN10b] p.110.

2.2 Théorème de Brouwer.

♮ Théorème de Brouwer [CLF96] p.179.

- Théorème du champ rentrant [Rou09] p.175.
- Extension du théorème de Brouwer aux convexes bornés [SR08] p.367.
- Théorème du point fixe de Schauder [CLFM95] p.79.
- Théorème de Cauchy-Peano [SR08] p.369.

⋆ $y' = 3|y|^{2/3}$ avec $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales [Dem06] p.138.

⋆ $f : u \in c_0(\mathbb{N}) \mapsto \left(\sqrt{|u_n|} + \frac{1}{n}\right) \in c_0(\mathbb{N})$ montre que le théorème de Cauchy-Peano est faux en dimension infinie.

2.3 Théorème de Markov-Kakutani.

- Théorème de Markov-Kakutani [GT96] p.78 ou [FGN10b] p.109.
- Existence d'une mesure invariante pour les chaines de Markov sur un espace d'états fini.
- Mesure de Haar sur les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [GT96] p.152.
- Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

3. Points fixes et zéros de fonctions numériques.

3.1 Attraction, superattraction et répulsion.

- Points fixes attractifs, superattractifs et répulsifs [Rou09] p.150 ou [Dem06] p.95 et p.96.
- Vitesse de convergence pour un point attractif [Dem06] p.95.
- Vitesse de convergence pour un point superattractif [Dem06] p.95.
- Comportement dans le cas critique [Dem06] p.96.

⋆ Etude de $x^3 - 4x + 1 = 0$ [Dem06] p.96.

3.2 Zéros et méthodes de point fixe.

- Recherche de zéro par recherche de point fixe [Rou09] p.153.

⋆ Etude du nombre d'or [Rou09] p.150.

3.3 Méthode de Newton.

- Principe de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Convergence de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Cas des fonctions convexes [Rou09] p.152.
- Estimation de l'erreur [Rou09] p.152.

⋆ Estimation du nombre d'or [Rou09] p.153.

⋆ Estimation des racines carrées [Rou09] p.152.

- Méthode de Newton pour les polynômes [CLF99] p.204.
- Méthode pour approcher toutes les racines d'un polynôme réel scindé [CLF99] p.205.
- Inconvénient de la méthode [Dem06] p.100.
- Méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.
- Convergence de la méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.

⋆ Résolution de $x^2 + xy - 2y^2 = 0$, $xe^x + ye^y = 0$ [Dem06] p.109.

Développements

1. Théorème de Brouwer.
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Leçon 207

Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Isabelle Gruais.

Remarques du Jury

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tel que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Les candidats exploitent rarement toutes les potentialités de cette leçon très riche. Le jury se réjouirait aussi que les candidats abordent les notions de solution maximale pour les équations différentielles ordinaires et maîtrisent le théorème de sortie des compacts.
Le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon ainsi que le prolongement de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment en fonctions de la même classe, le théorème de Tietze sur l'extension des fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé d'un espace métrique et la transformation de Fourier sur L^2.
En ce qui concerne le théorème d'Hahn-Banach, le candidat n'en donnera la version en dimension infinie que s'il peut s'aventurer sans dommage sur le terrain délicat et très souvent mal maîtrisé du lemme de Zorn. Il vaut mieux disposer d'applications pertinentes autres que des résultats classiques abstraits sur les duaux topologiques.

Remarques

1. Il peut être judicieux de parler du prolongement des séries entières sur le bord du disque de convergence.
2. L'exemple de l'équation différentielle du pendule est pertinent.

Exercices et questions

1. Soient $f : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha \in]0,1[$. Considérons $\widehat{f}$ la fonction qui vaut f sur $\mathbb{D}(0,1)$ et 0 ailleurs et la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf\limits_{\|y\| \le \alpha} \widehat{f}(x+y) \end{array}.$$

Démontrer que la fonction g est continue sur $\mathcal{B}(0,1-\alpha)$.

Réponse : Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $\mathbb{D}(0,1)$ donc elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine, ce qui entraine

$$\exists \eta > 0, \forall x, x' \in \mathcal{B}(0,1-\alpha) : |x - x'| < \eta \Rightarrow \forall y \in \mathcal{B}(0,\alpha), |f(x+y) - f(x'+y)| \le \epsilon.$$

Soient à présent x et x' deux éléments de $\mathcal{B}(0,1-\alpha)$ tels que $\|x - x'\| < \eta$. Alors

$$\forall y \in \mathcal{B}(0,\alpha) : f(x+y) \ge f(x'+y) - \varepsilon \ge g(x') - \varepsilon,$$

ce qui entraîne que $g(x) - g(x') \ge -\varepsilon$. Les rôles de x et de x' étant symétriques, on obtient également $g(x') - g(x) \ge -\varepsilon$. Finalement, on a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \mathcal{B}(0,1-\alpha) : \|x - x'\| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x')| \le \varepsilon.$$

g est donc uniformément continue sur $\mathcal{B}(0,1-\alpha)$.

2. Donner un équivalent en 1^- de la fonction ζ.

Réponse : Une simple comparaison série intégrale donne

$$\zeta(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}.$$

Squelette du plan

Soient E et F deux espaces métriques. Si $f : X \subset E \to F$ est une fonction, un prolongement de f est une fonction $g : Y \subset E \to F$ avec $X \subset Y$ et $g_{|X} = f$. Par exemple, dans le cas réel, on peut prolonger toute fonction définie sur un intervalle bornée par périodicité, par parité ou par 0 en dehors de l'intervalle de définition.

1. Prolongement et continuité.

   1.1 Notion de prolongement par continuité.

   - Prolongement par continuité.

   ⋆ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeble par continuité en 0 [Rom04] p.40.

   ⋆ La série entière $f : z \mapsto \sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1 mais est prolongeable par continuité sur $\mathbb{C}$ par $F : z \mapsto (f \circ P)(z)$ où P est la projection sur $\mathbb{D}(0,1)$ [ZQ95] p.51.

   ⋆ La fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 [Rom04] p.40.

   1.2 Prolongement des séries entières en un point du cercle de convergence.

   - Théorème d'Abel-Dirichlet [Gou08] p.252.

   ⋆ $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$ [FGN09b] p.180.

   ⋆ $\sum (-1)^n z^n$ a pour rayon de convergence 1, sa somme vaut $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ en 1 mais la série $\sum (-1)^n$ diverge [FGN09b] p.220.

   - Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.105 ou [Gou08] p.289.

   1.3 Prolongement des applications uniformément continues.

   - Théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace complet [Pom94] p.48.
   - Application : Intégrale de Riemann pour les fonctions réglées [Pom94] p.49.
   - Application : Unicité du complété d'un espace métrique [Pom94] p.49.
   - Application : Théorème de Plancherel sur la transformée de Fourier L^2 [Zui02] p.119 ou [Rud09] p.225.

   ♮ Théorème de Rademacher.

   1.4 Prolongement des applications linéaires.

   - Théorème de Hahn-Banach analytique [Bre05] p.1.
   - Corollaire sur le prolongement des applications linéaires [Bre05] p.3.
   - Application : norme d'un vecteur d'un espace vectoriel normé en fonction des formes linéaires [Bre05] p.4.
   - Application : un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé est dense si et seulement si toute forme linéaire qui s'annule sur F est nulle [Pom94] p.67.

   1.5 Fonctions continues définies sur un fermé.

   - Théorème de prolongement de Tietze [ZQ95] p.202 ou [Gou08] p.66 ou [SR08] p.31.
   - Application : (X, d) un espace métrique est compact si et seulement si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée [ZQ95] p.221.
   - Prolongement des fonctions lipschitziennes définies sur un fermé [SR08] p.31.

2. Intervention de la différentiabilité.

   2.1 Utilisation des accroissements finis.

- Prolongement $\mathcal{C}^1$ [Rom05] p.157 ou [Pom94] p.90.
- Le prolongement $\mathcal{C}^k$ se fait alors par récurrence.

⋆ La fonction $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ se prolonge de façon $\mathcal{C}^\infty$ en 0 [Rom05] p.157 ou [Pom94] p.90.

2.2 Le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

- Théorème de Borel [Rou09] p.359.
- Application : prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment [Rou09] p.359.

2.3 Solutions d'équations différentielles.

- Mise en place : introduction d'une fonction continue $f :]a,b[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et de l'équation différentielle associée [ZQ95] p.353 et p.371.
- Lemme : si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est dérivable et a une dérivée bornée sur $]a,b[$, alors f est prolongeable par continuité sur $[a,b]$.
- Théorème de sortie de tout compact [ZQ95] p.371 ou [Dem06] p.138.
- Corollaire : critère de prolongement des solutions d'équations différentielles [ZQ95] p.371.

⋆ L'équation différentielle $y' = \dfrac{y^2}{1+y^2}$ admet une solution globale pour toute condition initiale [ZQ95] p.373.

3. Prolongement analytique.

3.1 Généralités sur l'analyticité.

- Fonction développable en série entière en un point [Car85] p.36.
- Fonction analytique [Car85] p.36.
- La somme d'une série entière est analytique sur le disque ouvert de convergence [Car85] p.37.

⋆ Exemple d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement plus grand que la minoration obtenue dans le théorème précédent [Car85] p.38.

- Conséquence : l'ensemble des points d'analyticité d'une fonction est ouvert [Pom94] p.223.
- Principe du prolongement analytique [Car85] p.39.
- Principe des zéros isolés [Car85] p.41.

3.2 Le cas holomorphe.

- Toute fonction analytique est holomorphe [Pom94] p.354 ou [AM03] p.70.
- Formule de Cauchy [AM03] p.84.
- Application : toute fonction holomorphe est analytique [AM03] p.87.

♮ Formule des compléments [AM03] p.249.

⋆ Prolongement de la fonction Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ [BMP04] p.82.

3.3 Etude du cercle d'incertitude des séries entières.

- Mise en place du problème : on cherche à prolonger de façon analytique les sommes de séries entières en un point du cercle d'incertitude.
- Points réguliers et points singuliers [ZQ95] p.50.

⋆ Exemple de $\sum z^n$ [ZQ95] p.50.

- Existence d'un point singulier sur le cercle de convergence [ZQ95] p.51.
- Notion de coupure [ZQ95] p.54.
- Théorème de Steinhaus : existence d'une coupure pour les séries entières [ZQ95] p.541.

Développements

1. Formule des compléments.
2. Théorème de Rademacher.
3. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux.
Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lequel il n'a aucune idée sur leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.
L'analyse des constantes de stabilité pour l'interpolation de Lagrange fournit un exemple non trivial et peu présenté.

Remarques

1. Bien illustrer le fait que l'on travaille avec des espaces vectoriels normés et non pas avec des espaces métriques.
2. Hahn-Banach est indispensable dans cette leçon.
3. Avec le lemme de Zorn, on montre qu'il existe des applications linéaires non continues dans tous les espaces de Banach.

Exercices et questions

1. Donner un contre exemple au théorème de Baire quand l'espace mis en jeu n'est pas complet.

   Réponse : $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas un espace complet. Pourtant $\mathbb{Q}$ est l'union de ses singletons qui sont d'intérieurs vide mais $\mathbb{Q}$ n'est pas d'intérieur vide dans lui-même.

2. Soit $p \in [1, \infty]$. Considérons (a_n) une suite de nombres complexes vérifiant

$$\forall b \in l^p(\mathbb{N}) : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n < \infty.$$

   Montrer que $(a_n) \in l^q(\mathbb{N})$, où q est l'exposant conjugué de p.

   Réponse : Pour tout entier naturel n, on considère l'application linéaire

$$\varphi_n : \begin{array}{ccc} l^p(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{C} \\ b & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \end{array}.$$

   D'après l'inégalité de Holder, les φ_n sont continues et

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|\varphi_n\| = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^q \right)^{1/q}.$$

   Or, par hypothèse :

$$\forall b \in l^p(\mathbb{N}) : \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(b)| < +\infty,$$

   donc comme $l^p(\mathbb{N})$ est complet et $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé, le théorème de Banach-Steinhaus donne que $\sup \|\varphi_n\| < +\infty$. D'où le résultat.

3. Donner des exemples d'applications linéaires non continues.

   Réponse : On peut considérer les deux applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^0[0,1], \|.\|_2) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathcal{C}^1[0,1], \|.\|_\infty) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f'(0) \end{array},$$

   en considérant la famille des applications monôme comme contre exemple pour la première et la famille de triangles isocèles de coté $1/n$ sur $[0,1]$ pour la seconde.

Squelette du plan

Pour toute la leçon, k désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Notion d'espace vectoriel normé.

   1.1 Normes.

   - Définition d'une norme et espace vectoriel normé [SR08] p.93.
   - ⋆ $\mathbb{R}$ avec les normes p, les L^p munis des normes L^p, inégalités de Holder et de Minkowski, espace des fonctions continues sur un compact muni de la norme uniforme.
   - ⋆ La topologie de la convergence locale uniforme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normable.
   - Equivalence des normes et topologies associées [SR08] p.94.
   - ⋆ Les normes p sur $\mathbb{R}^n$ sont toutes équivalentes.
   - ⋆ Dans $L^1 \cap L^2$, les normes $\|.\|_{L^1}$ et $\|.\|_{L^2}$ ne sont pas équivalentes. Considérer par exemple les suites de fonctions de terme général $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$ et $g_n = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$.

   1.2 Applications linéaires continues.

   - Différentes caractérisations de continuité pour une application linéaire [SR08] p.101.
   - Définition de la norme d'une application linéaire continue [SR08] p.102.
   - ⋆ L'évaluation en un point est continue sur l'espaces des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie de la norme uniforme.
   - ⋆ L'évaluation en un point n'est pas continue pour la norme 2 sur l'espace des polynômes.
   - Remarque : en dimension finie, on verra que la boule unité et la sphère sont compactes donc la norme est toujours atteinte.
   - ⋆ La fonction identité sur un espace de Banach de dimension infinie est continue de norme 1 et sa norme est atteinte.
   - ⋆ Sur l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs réelles muni de la convergence uniforme, la forme linéaire $f \mapsto \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$ est continue mais sa norme (qui vaut 2) n'est pas atteinte [FGN10b] p.45.
   - ⋆ Une forme linéaire non nulle est continue si et seulement si son noyau est fermé [FGN10b] p.44.
   - Théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace complet. Cas particulier des applications linéaires continues [Pom94] p.48.
   - ♮ Théorème de Rademacher.

   1.3 Le cas de la dimension finie.

   - Sur k^n, toutes les normes sont équivalentes [SR08] p.96.
   - ⋆ On retrouve le cas des normes p sur $\mathbb{R}^n$ introduites précédemment.
   - Application : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [SR08] p.97.
   - Application : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé [SR08] p.98.
   - Théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité [SR08] p.99.
   - Application : si E et F sont deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue [SR08] p.102.

1.4 Le théorème de Hahn-Banach analytique.

- Théorème de Hahn-Banach analytique [ZQ95] p.200 ou [Bre05] p.1.
- Corollaire sur le prolongement des applications linéaires continues [Bre05] p.3 ou [ZQ95] p.200.
- Corollaire sur le lien entre la norme d'un vecteur et la dualité [Bre05] p.4 ou [ZQ95] p.200.

2. Les espaces de Banach.

2.1 Notion d'espace de Banach.

- Définition espace de Banach [SR08] p.94.
- ⋆ Les espaces $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont des Banach d'après le théorème de Riesz-Fischer [HL09] p.125 ou [BP12] p.166.
- ⋆ L'espace des fonctions bornées sur un ensemble quelconque à valeurs dans un espace de Banach est un espace de Banach.
- Théorème de Baire [Bre05] p.15 ou [SR08] p.61.
- Remarque : c'est un théorème pour les espaces métriques complets, pas seulement pour les Banach mais les théorèmes qui en découlent concernent les espaces de Banach.

2.2 Le théorème de Banach-Steinhaus.

- Théorème de Banach-Steinhaus [ZQ95] p.195.
- Application : Toute limite simple d'une suite d'applications linéaires continues entre un espace de Banach et un espace vectoriel normé est une application linéaire continue [Bre05] p.17 ou [SR08] p.118.
- Application : Toute suite qui converge faiblement est bornée [SR08] p.142.
- Application : Il existe des applications non égales à leur série de Fourier [Far06b] p.182.

2.3 Les théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé.

- Théorème application ouverte [Bre05] p.18 ou [SR08] p.353.
- Corollaire : Toute bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach admet une réciproque continue [Bre05] p.19.
- ⋆ Un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes fermé dans $L^2[0, 1]$ est de dimension finie.
- Théorème du graphe fermé [Bre05] p.20 ou [SR08] p.355.
- Remarque : la réciproque est immédiate [SR08] p.355.

3. Les espaces de Hilbert.

3.1 Notion d'espace de Hilbert.

- Définition espace de Hilbert [SR08] p.133.
- Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
- ⋆ $(H^1(0, 1), \|.\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert [Bre05] p.120.
- ⋆ L^2 muni de la norme 2 est un espace de Hilbert, le cas de la mesure de comptage donnant le cas de $l^2(\mathbb{N})$ [Far06b] p.49 et p.50.
- ♮ Théorème de Grothendieck [Zav13] p.180 et [Rud73] p.111.

3.2 Projection orthogonale.

- Théorème de projection sur un convexe fermé non vide [HL09] p.91 ou [Bre05] p.79.
- Propriété de 1-lipschitzienneté [HL09] p.92 ou [Bre05] p.80.
- ⋆ Existence de l'espérance conditionnelle [BMP04] p.100.
- Projection orthogonale sur un sous-espace fermé [HL09] p.92 ou [SR08] p.138.
- Projeté sur le sous-espace engendré par une famille orthonormale [HL09] p.109.

  - ⋆ Contre exemple quand la partie n'est pas fermée : l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $L^2(0,1)$.
  - ⋆ Contre-exemple quand l'espace n'est pas complet : l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $L^2(0,1)$ et projection sur l'espace des fonctions continues d'intégrales nulles sur $[0,1/2]$.
- Théorème de représentation de Riesz [Bre05] p.81 ou [SR08] p.139 ou [HL09] p.96.
- Adjoint d'un opérateur [SR08] p.140 ou [HL09] p.97.
- Opération sur les adjoints [SR08] p.141 ou [HL09] p.97.
- Norme de l'adjoint [HL09] p.98.

Développements

1. Théorème de Grothendieck.
2. Théorème de Rademacher.

Leçon 209

Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Christophe Cheverry.

Remarques du Jury

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques. Les polynômes d'interpolation de Lagrange, les polynômes de Bernstein sont des classiques tout comme le théorème général de Stone-Weierstrass. En ce qui concerne le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein, un candidat plus ambitieux pourra donner une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité), et éventuellement en montrer l'optimalité. Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Comme la leçon 202, elle permet aux candidats plus ambitieux d'aller jusqu'à la résolution d'équations aux dérivées partielles (ondes, chaleur, Schrödinger) par séries de Fourier.

Squelette du plan

1. Approximation par des polynômes.

1.1 Densité dans l'espace des fonctions continues.

- Théorème de Stone-Weierstrass [SR08] p.87 ou [HL09] p.30.
- ⋆ Densité de l'ensemble des polynômes à plusieurs variables continues sur un compact de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ [HL09] p.30.
- Théorème de Weierstrass avec vitesse de convergence [ZQ95] p.518.
- La limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est un polynôme [Pom94] p.176.
- Théorème de Muntz version continue [CLF99] p.139.
- Densité de l'ensemble des polynômes dans les espaces $L^p[a,b]$ [Far06b] p.123.
- Séparabilité de $\mathcal{C}[a,b]$ et de $L^p[a,b]$ [BP12] p.173.
- ♮ Application : Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.106.
- Application : Injectivité de la transformée de Laplace [Pom94] p.179.

1.2 Approximation locale des fonctions réelles.

- Formule de Taylor avec reste intégral [Rom04] p.182 ou [FGN03] p.266.
- Formule de Taylor-Lagrange [Rom04] p.181 ou [SR08] p.166.
- Application : Inégalités de Kolmogorov sur le contrôle de la norme infinie des dérivées successives [Rom04] p.193 ou [FGN03] p.259.
- Inégalité de Taylor-Lagrange [Rom04] p.182.
- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R} : \left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| \leq \frac{|x^5|}{5!}$ [Rom04] p.189.
- Formule de Taylor-Young [Rom04] p.186 ou [SR08] p.167.
- ⋆ Exemple de calcul par développement limité : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^x$ pour tout x réel.

1.3 Polynômes orthogonaux.

- Fonction poids [Far06b] p.164.
- Densité des polynômes orthogonaux p.112 [BMP04] p.140 ou [Far06b] p.164.
- Remarque : On en déduit une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ p.112.
- Remarque : Le théorème est évident dans le cas d'un intervalle borné.
- ⋆ Polynômes de Laguerre - Polynômes d'Hermite [Far06b] p.167 et p.168.
- Remarque : Les zéros des polynômes orthogonaux interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul d'intégral [Far06b] p.170.

2. Interpolation par des polynômes.

2.1 Interpolation de Lagrange.

- Polynôme de meilleur approximation [Dem06] p.39 et p.40.
- Existence et unicité du polynôme de meilleur approximation pur la norme uniforme [Dem06] p.40.
- Principe d'interpolation de Lagrange [Dem06] p.21.
- Formule d'erreur [Dem06] p.23.
- Interpolation en des points équidistants [Dem06] p.26.
- Polynômes de Tchebytchev [Dem06] p.29.
- Zéros des polynômes de Tchebytchev [Dem06] p.29.
- Erreur de l'interpolation en les zéros des polynômes de Tchebytchev [Dem06] p.30.
- Remarque : Il se peut que l'interpolation se passe mal aux bords de l'intervalle de travail [Dem06] p.36.

2.2 Opérateur d'interpolation de Lagrange.

- Opérateur d'interpolation de Lagrange [Dem06] p.46.
- Norme de l'opérateur d'interpolation de Lagrange [Dem06] p.46.
- Distance d'une fonction à son polynôme interpolateur de Lagrange [Dem06] p.47.
- Cas particulier des points équidistants [Dem06] p.47.
- Cas particulier des zéros des polynômes de Tchebytchev - Constante de Lebesgue [Dem06] p.48.

2.3 Quelques applications.

- Intégration numérique : Méthode de Simpson [Pom94] p.372.
- Multiplication rapide de polynômes [Pey04] p.118.
- Calcul efficace de résultants pour des polynômes de plusieurs variables : au lieu d'effectuer un calcul exacte avec la pivot de Gauss, on utilise une approximation de Lagrange.

3. Approximation par des polynômes trigonométriques.

3.1 Séries de Fourier.

- Coefficients de Fourier [Far06b] p.148.
- Base hilbertienne (e_n) [Far06b] p.148 et p.150.
- Convergence en norme L^2 et formule de Parseval [Far06b] p.150.

⋆ Calcul de $\zeta(2)$ [Far06b] p.151.

3.2 Convergence uniforme.

- Théorème de Weierstrass trigonométrique [HL09] p.31.
- Remarque : On va dans cette partie expliciter des suites de polynômes trigonométriques qui converge vers une fonction continue périodique donnée (sous réserve de régularité).
- Convergence uniforme dans le cas où la fonction est continue et la série de ses coefficients de Fourier converge absolument [Far06b] p.152.
- Application : Injectivité des coefficients de Fourier [BMP04] p.128.
- Remarque : Le résultat précédent s'applique pour les fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux [Far06b] p.153.
- Remarque : Le théorème précédent est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass.

⋆ Développement en série de la valeur absolue [Far06b] p.153.

♮ Equation de la chaleur [ZQ95] p.105.

♮ Théorème de Fejer [Far06b] p.157.

3.3 Convergence ponctuelle.

- Théorème de Dirichlet [Far06b] p.155.
- ⋆ Développement de exp en série de polynômes trigonométriques [Far06b] p.159.
- Constante de Lebesgue sur la divergence ponctuelle des séries de Fourier [Far06b] p.183.
- Phénomène de Gibbs [Far06b] p.180.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 213

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Ismael Bailleul.

Remarques du Jury

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gram-Schmidt. Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne et illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, ...). Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules $x = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x|e_n)e_n$ et $\|x\| = \sum_{n\in\mathbb{N}}|(x|e_n)|^2$ en précisant les hypothèses sur la famille (e_n) et en justifiant la convergence.
La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon.
Pour des candidats solides, le programme permet d'aborder la résolution, et l'approximation, de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert devrait être plus souvent explorée.
Enfin, pour les plus valeureux, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut être abordé.

Squelette du plan

1. Espaces de Hilbert.
   1.1 Produit scalaire et espaces de Hilbert.
   - Produit scalaire [SR08] p.131.
   - Inégalité de Cauchy-Schwarz [SR08] p.132.
   - Norme et produit scalaire [SR08] p.132.
   - Identité du parallélogramme [HL09] p.87.
   - Caractérisation des normes euclidiennes [FGN10a] p.10.
   - Identité de polarisation [SR08] p.133.
   - Espace préhilbertien [SR08] p.133.
   - Espace de Hilbert [SR08] p.134.
   - ⋆ Les espaces préhilbertiens de dimension finie sont des espaces de Hilbert.
   - ⋆ L^2 est un espace de Hilbert [BP12] p.161.
   - ♮ L'espace de Bergman est un espace de Hilbert [AM03] p.122.
   - ⋆ Les espaces de polynômes ne sont des espaces de Hilbert pour aucun produit scalaire.

   1.2 Projection sur un convexe fermé.
   - Théorème de projection sur un convexe fermé non vide [HL09] p.91 ou [Bre05] p.79.
   - Propriété de 1-lipschitzienneté [HL09] p.92 ou [Bre05] p.80.
   - ⋆ Existence de l'espérance conditionnelle [BMP04] p.100.
   - Théorème de représentation de Riesz [Bre05] p.81 ou [SR08] p.139 ou [HL09] p.96.
   - Adjoint d'un opérateur [SR08] p.140 ou [HL09] p.97.
   - Opération sur les adjoints [SR08] p.141 ou [HL09] p.97.
   - Norme de l'adjoint [HL09] p.98.

   1.3 Topologie faible dans les Hilbert.
   - Convergence faible des suites [SR08] p.142 ou [HL09] p.99.

- Convergence faible et convergence forte [HL09] p.100.
- Toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente [HL09] p.100.
- Théorème du point fixe de Browder [SR08] p.144.

2. Orthogonalité.

2.1 Orthogonalité dans les Hilbert.

- Vecteurs orthogonaux [SR08] p.133.
- Famille orthogonale [HL09] p.107.
- Théorème de Pythagore [HL09] p.88.
- Une famille orthogonale sans élément nul est libre [HL09] p.107.
- Orthogonal d'une partie [SR08] p.137.

2.2 Théorème du supplémentaire orthogonal.

- Projection orthogonale sur un sous-espace fermé [HL09] p.92 ou [SR08] p.138.
- Projeté sur le sous-espace engendré par une famille orthonormale [HL09] p.109.
- ⋆ Contre exemple quand la partie n'est pas fermée : l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $L^2(0,1)$.
- ⋆ Contre-exemple quand l'espace n'est pas complet : l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $L^2(0,1)$ et projection sur l'espace des fonctions continues d'intégrales nulles sur $[0,1/2]$.
- ⋆ Distance de 1 à un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ [FGN10a] p.30.
- ⋆ Distance d'une matrice à $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ [FGN10a] p.33.
- Sous-espace fermé et orthogonal [HL09] p.93.
- Critère de densité par l'orthogonal [HL09] p.93.
- ⋆ Mise en défaut quand le sous-espace n'est pas fermé [BMP04] p.98.
- Orthogonal double et sous-espace fermé [HL09] p.94.

2.3 Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

- Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt [HL09] p.112.
- Inégalité de Hadamard [CLFM95] p.203.
- Théorème de Grothendieck [Zav13] p.180 et [Rud73] p.111.

3. Bases hilbertiennes et séries de Fourier.

3.1 Notion de base hilbertienne.

- Base hilbertienne [HL09] p.108.
- ⋆ Base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N})$ [HL09] p.108.
- Inégalité de Bessel [HL09] p.109.
- Théorème de Bessel-Parseval [HL09] p.109.
- Ecriture dans une base hilbertienne [HL09] p.111.
- Base hilbertienne de l'espace de Bergman [AM03] p.122.
- Un préhilbertien est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable [HL09] p.112 ou [Bre05] p.86.
- Densité des polynômes orthogonaux [BMP04] p.140 et [Far06b] p. 163.
- ⋆ Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ [BMP04] p.112.

3.2 Application aux séries de Fourier.

- Coefficients de Fourier d'une fonction périodique [Far06b] p.148.
- Série de Fourier d'une fonction périodique [Far06b] p.148.
- Convergence en norme L^2 de la série de Fourier [Far06b] p.150.
- Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ [Far06b] p.150.

- ⋆ Calculs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et de leur série impaire [Far06b] p.151 et p.152.
- • Condition suffisante de convergence normale [Far06b] p.153.
- • Condition suffisante de convergence simple [Far06b] p.155.
- ♮ Résolution de l'équation de la chaleur [ZQ95] p.105.

4. Résolution de quelques problèmes elliptiques.

4.1 Espaces de Sobolev.

- • Espaces de Sobolev $H^1(0,1)$ [Bre05] p.121.
- • $H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert séparable [Bre05] p.121.
- • Existence d'un représentant continu [Bre05] p.122.
- • Espace $H_0^1(0,1)$ [Bre05] p.132.
- • Inégalité de Poincaré [Bre05] p.134.

4.2 Problème avec condition de Dirichlet.

- ⋆ $-u'' + u = f$ avec $u(0) = u(1) = 0$ [Bre05] p.135.
- • Formulation variationnelle [Bre05] p.136.
- • Résolution par le théorème de Riesz [Bre05].

4.3 Problème avec condition de Von-Neumann.

- • Théorème de Lax-Milgram [All05] p.74 ou [Bre05] p.84.
- ⋆ $-u'' + u = f$ avec $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$ [Bre05] p.140.
- • Formulation variationnelle [Bre05] p.140.
- • Résolution par le théorème de Lax-Milgram [Bre05] p.140.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Théorème de Grothendieck.

Leçon 214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Isabelle Gruais.

Remarques du Jury

Il s'agit d'une belle leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

Remarques

1. Mettre un exemple de développement limité de fonction implicite peut être bien.
2. Illustrer par des sous-variétés est une bonne chose.

Exercices et questions

1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère également $S = \{g = 0\}$ que l'on suppose connexe. Supposons que pour tout $x \in \Omega$, $Dg(x) \neq 0$ et

$$\forall x \in \Omega, \exists \lambda_x \in \mathbb{R} : Df(x) = \lambda_x Dg(x).$$

   Montrer que f est constante sur S.

   Réponse : On fixe $a \in \Omega$. Comme $Dg(a)$ est non nul, on peut supposer que $\partial_{a_1} g(a) \neq 0$. Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe V un voisinage de (a_2, a_3), W un voisinage de a_1 et $\varphi : V \to W$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $g(x, y) = 0$ si et seulement si $x \in V$ et $y = \varphi(x)$. On différentie alors par rapport à x_2 et x_3 $f(x, \varphi(x))$ et $g(x, \varphi(x))$ pour obtenir que $\{(x, y) \in S : f(x, y) = f(a)\}$ est ouvert. Cette partie est également fermée dans le connexe S donc est égale à S et donc f est constante sur S.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|f'| \leq k < 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + f(y), y + f(x)) \end{array}$$

   est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

   Réponse : L'injectivité se traite à la main et d'après le théorème d'inversion locale, l'image de g est ouverte et fermée dans le connexe $\mathbb{R}^2$ donc g est surjective. Le théorème d'inversion globale montre alors que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Squelette du plan

On se donne n et m sont deux entiers naturels non nuls.

1. Le théorème d'inversion locale.

   1.1 Notion de difféomorphisme.

   - Notion de $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme [SR08] p.215 ou [Laf10] p.21.
   - ⋆ $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ [Laf10] p.24.
   - ⋆ $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x, \sin y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et possède en chaque point une différentielle inversible mais est non injectif [SR08] p.216.

- ⋆ $x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est dérivable en 0 mais n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}$ car n'est pas injective au voisinage de 0 donc n'est pas un difféomorphisme local au voisinage de 0 [Rou09] p.206.
- La somme et la composée de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme [SR08] p.215.

1.2 Inversions locales et globales.

- Théorème d'inversion locale [Rou09] p.188 ou [SR08] p.218 ou [Laf10] p.23.
- Application : Morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [Laf10] p.37.
- Application : Il existe W un voisinage de la matrice identité dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ tel que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ contenu dans W, alors G est trivial [Laf10] p.37.
- Théorème d'inversion global [Rou09] p.190.
- ⋆ Perturbation de l'identité [FGN12] p.25.
- ⋆ $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local sur $\mathbb{R}^2$ mais pas un difféomorphisme global [Rou09] p.204.
- Existence de racine carré pour les matrices symétriques défini-positifs [FGN12] p.28.

1.3 Le lemme de Morse.

- Réduction différentielle des matrices symétriques réelles [Rou09] p.201.
- ♮ Lemme de Morse [Rou09] p.344.
- Etude d'une surface par rapport à son plan tangent [Rou09] p.321.

2. Le théorème des fonctions implicites.

2.1 Le théorème des fonctions implicites.

- Théorème des fonctions implicites [Rou09] p.192 ou [SR08] p.221.
- ⋆ Développement asymptotique des racines d'un polynôme du troisième degré [Rou09] p.245.
- Application : L'ensemble des polynômes scindés simples de degré n est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$ [BMP04] p.12.
- ⋆ Equation de Burgers [Rou09] p.257.

2.2 Application à l'optimisation.

- Théorème des extrema liés [Gou08] p.317.
- ⋆ Isopérimétrie sur les parallélépipèdes rectangles [Rou09] p.406.
- Minimisation de la norme 2 sur $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ [Gou94] p.321.
- Inégalité de Hadamard [Rou09] p.399.

3. Les sous variétés et leurs caractérisations.

3.1 Notion de sous-variété.

- Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ [Laf10] p.28 ou [Rou09] p.197.
- ⋆ Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ [CG13] p.268.
- Caractérisation des sous-variétés [Laf10] p.29 ou [Rou09] p.200.
- ⋆ $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$ [Laf10] p.30.
- ⋆ $\mathbb{T}^n$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$ [Laf10] p.30.

3.2 Espace tangent.

- Vecteur tangent à une sous-variété en un point [Laf10] p.33 ou [Rou09] p.198.
- Espace tangent d'une sous-variété en un point [Laf10] p.34.
- Structure d'espace vectoriel de dimension p pour une sous-variété de dimension p [Laf10] p.33 ou [Rou09] p.199.
- Espaces tangents selon les différentes caractérisations [Rou09] p.192 ou [Rou09] p.201.

- Condition nécessaire d'extremum sur une sous-variété [Ave83] p.103.
- Formes linéaires liées [Ave83] p.103.
- Remarque : On retrouve alors le théorème des extrema liés [Ave83] p.103.

3.3 Exemples matriciels.

- Algèbre de Lie associé à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [GT98] p.81.
- L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel [GT98] p.82.

♮ Théorème de Von-Neumann [GT98] p.83.

⋆ $\mathrm{O}(p,q)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n(n-1)/2$ [Rou09] p.275.

⋆ L'espace tangent en l'identité de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques [Rou09] p.277.

⋆ $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension n^2-1 et son plan tangent en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle [Rou09] p.275.

⋆ L'ensemble des matrices de rang r est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2-(n-r)^2$ [Rou09] p.277.

♮ Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.273.

Développements

1. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$.
2. Lemme de Morse.
3. Théorème de Cartan-Von Neumann.

Leçon 215

Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Dominique Cerveau.

Remarques du Jury

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivés partielles. Une bonne maîtrise du théorème de différentiation composée est attendue. L'énoncé doit être connu et compris ; il faut pouvoir l'appliquer dans des situations simples. Signalons aussi que cette application pose souvent problème lorsque l'une des fonctions en jeu est une fonction réelle de variable réelle, comme lorsque que l'on calcule la différentielle de l'application $x \mapsto \|x\|$ pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
La notion de différentielle seconde est attendue au moins pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ainsi que les applications classiques quant à l'existence d'extremums locaux.

Squelette du plan

1. Application différentiable.

   1.1 Notion de différentielle.

   - Notations de Landau [SR08] p.171.
   - Fonction différentiable en un point d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ [SR08] p.173.
   - Différentielle d'une fonction en un point [SR08] p.174.
   - Différentielle d'une application dérivable sur un ouvert de $\mathbb{R}$ [SR08] p.175 ou [Rou09] p.41.
   - Application bilinéaires continues et différentiabilité [SR08] p.190 ou [Gou08] p.310.
   - ⋆ Différentielle de l'élévation à la puissance p sur $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ [Gou08] p.310.
   - Une fonction différentiable est continue [SR08] p.174.
   - Fonction différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ [SR08] p.176.
   - ⋆ Différentielle du carré de la norme euclidienne.
   - ⋆ Différentielle de l'inverse [Rou09] p.51.
   - ⋆ Différentielle du déterminant [Rou09] p.76.
   - Somme, produit, composée de fonctions différentiables [SR08] p.176 à p.178.
   - Fonctions différentiables et coordonnées [SR08] p186.
   - Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ [SR08] p.176.
   - Opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ [SR08] p.176.
   - Remarque : Le rang de la différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas nécessairement localement constant [SR08] p.228.
   - Rang de la différentielle [SR08] p.228.
   - Théorèmes de l'immersion et de la submersion [Laf10] p.26 et p.27.

   1.2 Dérivées partielles.

   - Dérivée directionnelle [Rou09] p.43.
   - Dérivées partielles en un point [SR08] p.191.
   - Matrice jacobienne [SR08] p.193.
   - Dérivées partielles et différentielle [SR08] p.192.
   - ⋆ La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ admet des dérivées partielles en 0 mais n'est pas différentiable en $(0,0)$ [Rou09] p.43.

- Gradient d'une fonction différentiable à valeurs réelles [BMP04] p.5.
- Interprétations du gradient [Rou09] p.80 ou [BMP04] p.5.
- Expression de la matrice jacobienne [SR08] p.194.
- Jacobienne d'une composée [SR08] p.194.
- Dérivées partielles et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ [SR08] p.192.

1.3 Accroissements finis.

- Théorème des accroissements finis [SR08] p.179 ou [Rou09] p.97.
- Application différentiable de différentielle nulle [SR08] p.180.
- Dérivées partielles continues et applications différentiables [Rou09] p.107 ou [BMP04] p.8.
- Prolongement des applications différentiables sur un ouvert épointé [SR08] p.183.

1.4 Limites et applications différentiables.

- Limite de fonctions différentiables [SR08] p.183 ou [Rou09] p.109.
- ⋆ L'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ [Rou09] p.109.
- Différentiabilité sous le signe intégral [SR08] p.185.

2. Inversion locale et fonctions implicites.

2.1 Difféomorphismes et inversion locale.

- Difféomorphisme [SR08] p.215.
- ⋆ Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ non injective possédant des différentielles inversibles [SR08] p.216.
- Théorème d'inversion locale [SR08] p.218.
- Remarque : Le caractère $\mathcal{C}^1$ est fondamental [Rou09] p.196.
- ⋆ Différentielle de l'exponentielle en 0 [Rou09] p.51.
- ⋆ L'exponentielle est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur son image [Laf10] p.36.
- Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ [Laf10] p.37.
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit [Mne06] p.59.
- Remarque : On peut montrer que $\sqrt{3}$ est une borne pour le théorème précédent [FGN09a] p.186.
- Théorème d'inversion global [Rou09] p.182.
- $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme local au voisinage de chaque point mais n'est pas un difféomorphisme global [Rou09] p.196.
- Les dilatations sont des inversions globales [Rou09] p.212.

2.2 Théorème des fonctions implicites.

- Théorème des fonctions implicites [SR08] p.221.
- ⋆ Solutions d'une équation polynomiale de degré 3 [Rou09] p.234.
- ⋆ Equation de Burgers [Rou09] p.248.
- ⋆ L'ensemble des polynômes scindés simples de degré n est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$ [BMP04] p.12.

2.3 Sous-variétés.

- Sous-variétés [Laf10] p.28 ou [Rou09] p.189.
- Caractérisation des sous-variétés [Laf10] p.29 ou [Rou09] p.192.
- ♮ Théorème de Von-Neumann [GT98] p.83.
- Espace tangent en un point [Laf10] p.34 ou [Rou09] p.190.
- Caractérisation des espaces tangents [Laf10] p.34.
- ⋆ $\mathrm{O}(p,q)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n(n-1)/2$ [Rou09] p.275.

- ⋆ $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^1 - 1$ et son plan tangent en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle [Rou09] p.275.
- ⋆ L'ensemble des matrice de rang r est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - (n-r)^2$ [Rou09] p.277.
- ♮ Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2,1)$ [CG13] p.273.

3. Différentielles d'ordre supérieur.

3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

- Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ [SR08] p.199.
- Isométrie entre $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$ et $\mathcal{B}(E,F)$ [SR08] p.199.
- Différentielle seconde [SR08] p.200 ou [Rou09] p.283.
- Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ [SR08] p.200 et p.201.
- Dérivées partielles secondes [SR08] p.201.
- Dérivées partielles seconde et fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ [SR08] p.202.
- Théorème de Schwarz [SR08] p.206 ou [Rou09] p.284.
- Contre-exemple de Peano au théorème de Schwarz [Gou08] p.309.
- Matrice hessienne [SR08] p.205 ou [Rou09] p.284.
- La matrice hessienne est symétrique grâce au lemme de Schwarz.

3.2 Formule de Taylor.

- Inégalité de Taylor [SR08] p.207.
- Formule de Taylor-Young [Rou09] p.287 ou [SR08] p.207.
- Formule de Taylor avec reste intégrale [Rou09] p.288.
- Lemme de Hadamard [Gou08] p.311.
- Formule de Taylor-Lagrange [Rou09] p.288.

3.3 Lemme de Morse.

- Réduction différentielle des matrices symétriques réelles [Rou09] p.201.
- ♮ Lemme de Morse [Rou09] p.344.
- Etude d'une surface par rapport à son plan tangent [Rou09] p.321.

4. Optimisation.

4.1 Points critiques.

- Point critique [SR08] p.240 ou [Rou09] p.360.
- Extrema et points critiques [SR08] p.239 ou [Rou09] p.360.
- ⋆ La fonction $f : x \mapsto x^3$ a un point critique mais pas d'extremum local sur $\mathbb{R}$.
- Points critiques et applications convexes différentiables [SR08] p.240 ou [Rou09] p.371.

4.2 Etude de la hessienne.

- Condition nécessaire portant sur la hessienne [SR08] p.245 ou [Rou09] p.360.
- Condition suffisante portant sur la hessienne [SR08] p.247 ou [Rou09] p.361.
- ⋆ Etude de $(x,y) \mapsto x^2 - y^2 + y^4/2$ [Rou09] p.368.
- Notations de Monge [Rou09] p.365.
- Notations de Monge et extrema [Rou09] p.365 à p.368.

4.3 Extrema liés.

- Extremum d'une fonctions différentiable sur une sous-variété.
- ♮ Théorème des extrema liés [Ave83] p.103.
- Minimisation de la norme 2 sur $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ [Gou94] p.321.
- Inégalité de Hadamard [Rou09] p.399.

Développements

1. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.
2. Lemme de Morse.
3. Théorème de Von Neumann.
4. Théorème des extrema liés.

Leçon 217
Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

Professeur encadrant : Ismael Bailleul.

Remarques du Jury

Cette leçon n'a pas eu beaucoup de succès, c'est bien dommage. Elle ne saurait être réduite à un cours de géométrie différentielle abstraite ; ce serait un contresens. Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite. Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations, ...) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques. Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variétés. L'illustration de la leçon par des dessins est la bienvenue.
Le théorème des extremums liés devient assez transparent lorsqu'on le traite par les sous-variétés. Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

Remarques

1. Les sous-variétés ont été introduites par les physiciens pour étudier le mouvement des planètes. Les surfaces de niveau d'une énergie sont des sous-variétés.
2. Il ne suffit pas de restreindre l'espace d définition d'une courbe paramétrée pour avoir une sous-variété, *cf* une droite de pente rationnelle dans un tore qui est dense.
3. Il faut exclure le cas discret dans le théorème de Von-Neumann.

Exercices et questions

1. L'exponentielle est-elle une difféomorphisme global de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$?

   Réponse : Non, puisqu'elle n'est pas injective
   $$\exp(0) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}.$$
   exp est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur maximum une boule de taille $\sqrt{2}$.

2. Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et V un champs de vecteur tangent à M en tout point. On considère le problème différentiel
   $$\begin{cases} x_0 \in M \\ \dot{x} = V(x) \end{cases}$$
   Montrer que la solution de ce système reste dans M pour tout temps.

   Réponse : Soit I l'intervalle d'existence de la solution. Considérons
   $$t_0 = \inf\{t \in I : x(t) \notin M\}.$$
   Pour tout $t < t_0$, $x(t)$ appartient à $T_{x(t)}M$. Grâce au schéma classique sur les sous-variétés, v est tangent à M donc est contenu dans $\mathbb{R}^d$. Ses coordonnées verticales dans $\mathbb{R}^n$ sont nulles et la solution est contenue dans $\mathbb{R}^d$.

3. Montrer que deux sous variétés difféomorphes de $\mathbb{R}^n$ ont même dimension.

   Réponse : Immédiat avec un schéma.

4. Soient $M \subset \mathbb{R}^3$ une sous-variété de dimension 2 à droite d'un hyperplan, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ à gauche de cet hyperplan. Montrer que
   $$A = \{x \in M : x_0 \in T_xM\}$$
   est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

   Réponse : Avec une ellipsoïde, on obtient une ellipse.

Squelette du plan

Soit n un entier naturel non nul.

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.
   1.1 Eléments de calcul différentiel.
   - Théorème d'inversion locale [Rou09] p.188.
   - Théorème des fonctions implicites [Rou09] p.192.
   - Immersion [Laf10] p.27
   - Submersion [Laf10] p.27.
   - Théorème d'immersion [Laf10] p. 26.
   - Théorème de submersion [Laf10] p.27.

   1.2 Notion de sous-variété.
   - Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ [Laf10] p.28 ou [Rou09] p.197.
   - ⋆ Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ [CG13] p.268.
   - Caractérisation des sous-variétés [Laf10] p.29 ou [Rou09] p.200.
   - ⋆ $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$ [Laf10] p.30.
   - ⋆ $\mathbb{T}^n$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$ [Laf10] p.30.

   1.3 Ne pas être une sous-variété.
   - Mise en place : On donne des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas des sous-variétés.
   - ⋆ Fonction non lisse : $y = |x|$ [Rou09] p.260.
   - ⋆ Point double : $x^2 - y^2 = 0$ [Rou09] p.260.
2. Espace tangent.
   2.1 Notion d'espace tangent.
   - Vecteur tangent à une sous-variété en un point [Laf10] p.33 ou [Rou09] p.198.
   - Espace tangent d'une sous-variété en un point [Laf10] p.34.
   - Structure d'espace vectoriel de dimension p pour une sous-variété de dimension p [Laf10] p.33 ou [Rou09] p.199.
   - Espaces tangents selon les différentes caractérisations [Rou09] p.192 ou [Rou09] p.201.
   - M, N sous variétés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ inclus dans des ouverts U et V, $f : U \to V$ telle que $f(M) \subset N$ une application différentiable. Pour tout a de M, f envoie T_aM sur $T_{f(a)}N$ [Dem89] p.61.
   - ⋆ Contour apparent d'une ellipsoïde [Rou09] p.274.

   2.2 Position d'une surface par rapport à un plan tangent.
   - Surface de $\mathbb{R}^3$ [Laf10] p.34.
   - Espace tangent en un point avec la caractérisation par la submersion [Laf10] p.34.
   - Espace tangent en un point avec la caractérisation par la paramétrisation [Laf10] p.34.
   - Réduction différentielle des matrices symétriques réelles [Rou09] p.201.
   - Lemme de Morse [Rou09] p.344.
   - Etude d'une surface par rapport à son plan tangent en un point [Rou09] p.321 ou [Laf10] p.34 et p.47.

   2.3 Extremum sur une sous-variété.
   - Condition nécessaire d'extremum sur une sous-variété [Ave83] p.103.
   - Formes linéaires liées [Ave83] p.103.
   - Théorème des extrema liés [Ave83] p.103.
   - Minimisation de la norme 2 sur $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ [Gou94] p.321.

- Inégalité de Hadamard [Rou09] p.399.

3. Matrices et sous-variétés.

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ [CG13] p.268.
- Algèbre de Lie associé à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ [GT98] p.81.
- L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel [GT98] p.82.
- ♮ Théorème de Von-Neumann [GT98] p.83.
- ⋆ $\mathrm{O}(p, q)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n(n-1)/2$ [Rou09] p.275.
- ⋆ L'espace tangent en l'identité de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques [Rou09] p.277.
- ⋆ $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$ et son plan tangent en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle [Rou09] p.275.
- ⋆ L'ensemble des matrices de rang r est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - (n-r)^2$ [Rou09] p.277.
- ♮ Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ [CG13] p.273.

Développements

1. Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(2, 1)$.
2. Théorème de Cartan-Von Neumann.

Leçon 218
Applications des formules de Taylor.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Il faut connaître les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent.
De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue.
Il y a de très nombreuses applications en géométrie et probabilités (par exemple le théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités $\|f^k\| \leq 2^{k(n-k)/2}\|f\|^{1-k/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}$ (lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées). On soignera particulièrement le choix des développements.

Squelette du plan

1. Les trois formules de Taylor.
   1.1 Formule de Taylor avec reste intégral.
   - Formule de Taylor avec reste intégral [Rou09] p.298.
   - Théorème de Division [FGN03] p.261.
   - ♮ Etude de VP$(\frac{1}{x})$ [Zui02] p.23.

   1.2 Formule de Taylor-Lagrange.
   - Formule de Taylor-Young à une variable [Rom05] p.181.
   - Inégalité de Taylor-Lagrange [Rom05] p.182.
   - Formule de Taylor-Lagrange générale [Rom05] p.183.
   - ⋆ Inégalités pour cos, sin et exp [Rom05] p.189.
   - Inégalités de Kolmogorov [FGN03] p.259 ou [Pom94] p.101.

   1.3 Formule de Taylor-Young.
   - Formule de Taylor-Young [Rou09] p.297.
   - Théorème de Glaeser [FGN03] p.254.
2. Etude des suites et des fonctions.
   2.1 Etude asymptotique.
   - *i* Développements limités.
   - Développement limité d'une fonction en un point [Rom05] p.207.
   - Le théorème de Taylor-Young donne une condition suffisante d'existence de développements limités [Rom05] p.208.
   - ⋆ Développements limités usuels [Rom05] p.209.
   - ⋆ Un calcul de limite [Rom05] p.228.
   - Les développement imités permettent d'étudier des suites et des séries [Rom05] p.216.
   - Continuité, dérivabilité et développements limités [Rom05] p.208.
   - Etre régulier est suffisant pour admettre un développement limité mais n'est pas nécessaire [Rom05] p.208.
   - ⋆ $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas deux fois dérivable en 0 mais admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 [Hau07] p.179.

ii Méthode de Laplace.
♮ Méthode de Laplace [Rou09] p.349 ou [ZQ95] p.338.
⋆ Formule de Stirling [Rou09] p.349 ou [ZQ95] p.341.

2.2 Développement en séries entières.
- Théorème de Bernstein [Pom94] p.103 ou [Rom05] p.196.
- Développement en série entière et reste dans la formule de Taylor [Gou08] p.240.

⋆ Développement en série entière des fonctions usuelles [Gou08] p.242.

2.3 Suites récurrentes linéaires.
- Points attractifs, superattractifs et répulsifs [Rou09] p.150.
- Point attractif et suites récurrentes [Rou09] p.149.
- Point superattractif et suites récurrentes [Rou09] p.149.
- Point répulsif et suites récurrentes [Rou09] p.150.
- Méthode de Newton [Rou09] p.152.

⋆ Une suite récurrente et estimation de l'erreur [Rou09] p.152.

2.4 Problèmes d'extrema.
- Mise en place du problème [Rou09] p.341.
- Réduction différentielle des formes quadratiques [Rou09] p.209.

♮ Lemme de Morse [Rou09] et p.354.
- Position d'une surface par rapport à son plan tangent [Rou09] p.341.
- Jacobienne et extremum [Rou09] p.371.

⋆ $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 mais d'extremum local en ce point [Rou09] p.371.
- Hessienne et extremum [Rou09] p.371.

⋆ Etude de $(x, y) \mapsto x^2 - y^2 + y^4/4$ [Rou09] p.379.
⋆ $x \mapsto x^3$ a une dérivée seconde positive en 0 mais n'y admet pas de minimum local [Rou09] p.371.
⋆ $x \mapsto x^4$ a une dérivée seconde nulle en 0 mais y admet une minimum local [Rou09] p.371.
- Notations de Monge [Rou09] p.375.
- Notations de Monge et extrema [Rou09] p.377 et p.378.

3. Analyse numérique.

3.1 Calcul approché d'intégrales.
- Sommes de Riemann d'une fonction continue [Rom05] p.194.
- Développement asymptotique pour une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ [Rom05] p.194.

⋆ Etude asymptotique de tranche de la série harmonique et de la fonction ζ [Rom05] p.195.
⋆ Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2\right)\, d\theta$ [Gou08] p.179.

3.2 Méthode d'Euler.
- Mise en place du problème [Dem06] p.219.
- Méthode d'Euler [Dem06] p.221 ou [Pom94] p.377.
- Majoration de l'erreur [Pom94] p.376 ou [Dem06] p.221.
- Convergence vers la solution exacte [Pom94] p.376.

3.3 Schéma numérique pour les équations de transport.
- Schéma upwind pour l'équation de transport [DM09] p.92.
- Consistance et précisions du schéma upwind [DM09] p.95.

4. Une utilisation en probabilités.

- Fonction caractéristique et formules de Taylor [Ouv00] p.313.
- Une majoration pour les nombres complexes de module 1.
- ♮ Théorème central limite [Ouv00] p.314.
- Le théorème central limite permet par exemple d'établir des intervalles de confiance en statistique.

Développements

1. Etude de $\mathrm{VP}(\frac{1}{x})$.
2. Lemme de Morse.
3. Méthode de Laplace.
4. Théorème central limite.

Leçon 219

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Il faut bien faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.
L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode de gradient, preuve de la convergence de la méthode de gradient à pas optimal, ... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, devrait être totalement maîtrisé. Les candidats devraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés et les équations normales qui y sont attachées. Enfin, les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extremums liés, la notion de multiplicateur de Lagrange et, là encore, des algorithmes peuvent être présentés et analysés.

Exercices et questions

1. Démontrer que tout endomorphisme symétrique réelle admet une valeur propre réelle.

   Réponse : Soit u un endomorphisme symétrique sur un espace euclidien E. Considérons les applications différentiables

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x), x\rangle \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, x\rangle \end{array}.$$

   On considère également S la sphère unité de E. Puisque S est fermé et borné dans l'espace de dimension finie E, S est compacte. La fonction f continue sur E atteint son maximum sur S en un point e. Par ailleurs, pour tout x de E :

$$\forall h \in E : Df(x).h = 2\langle u(x), h\rangle \quad Dg(x).h = 2\langle x, h\rangle.$$

   Or, d'après le théorème des extrema liés, il existe λ un réel tel que $Df(e) = \lambda Dg(e)$, soit $u(e) = \lambda e$, ce qui fournit le résultat. On démontre ensuite par récurrence que E admet une base orthonormale constituée de vecteurs propre de u.

2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f. Soit x_0 un point de minimum global strict de f. Existe t-il une suite (x_n) avec x_n un point de minimum strict de f_n qui converge vers x_0 ?

   Réponse : Les f_n étant continues sur le compact $[a, b]$, elles admettent un point de minimum x_n. Toujours par compacité (x_n) admet une valeur d'adhérence x_∞. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b] : f_n(x_n) \leq f_n(x)$$

   En passant à la limite, il s'ensuit :

$$\forall x \in [a, b] : f(x_\infty) \leq f(x),$$

   et comme f admet en x_0 un minimum global strict, il s'ensuit que $x_\infty = x_0$. La réponse est donc positive.

Squelette du plan

Définitions des extrema locaux et globaux. L'objectif est de les rechercher et de les étudier. Un premier exemple est donné par l'inégalité isopérimétrique dans le plan et en dimension supérieure [ZQ95] p.103 et [CLFM95] p.203.

1. Compacité et extrema.
   1.1 Continuité sur un compact.
   - Fonctions semi-continues inférieurement et supérieurement [Bre05] p.8.
   - Sur un compact, les fonctions semi-continues inférieurement et supérieurement atteignent respectivement leur borne inférieure et leur borne supérieure [Bre05] p.8.
   - Cas particulier : fonctions continues sur un compact [SR08] p.42.
   - Existence du point de Fermat [SR08] p.240 ou [Rou09] p.386.
   - Remarque : c'est à cause de ce genre de théorème que l'on recherche les compacts.
   - Application : Les normes sont équivalentes en dimension finie [SR08] p.96 ou [Tes12] p.49.

   1.2 Principe du maximum.
   - Propriété de sous-moyenne [AM03] p.153.
   - Extrema des fonctions vérifiant la propriété de la sous-moyenne [AM03] p.153.
   - Principe du maximum [AM03] p.155.
   - Remarque : on appliquera ces théorèmes aux fonctions holomorphes.
2. Utilisation de la convexité.
   2.1 Fonctions coercives.
   - Mise en place : on donne dans ce paragraphe un théorème d'existence d'extremum que l'on utiliser dans le cadre des fonctions convexes.
   - Fonction coercive [Tes12] p.46.
   - Une fonction continue coercive est minorée et atteint son minimum [BMP04] p.31 ou [Tes12] p.46.

   2.2 Ensembles convexes.
   - Ensembles convexes [BMP04] p.26.
   - Théorème de projection dans les Hilbert [Bre05] p.79.
   - Caractère 1-lipschitzien et cas particulier de projection sur un sous-espace vectoriel fermé [Bre05] p.80.
   - Corollaire : Théorème de représentation de Riesz [Bre05] p.81.
   - Application : Existence de l'espérance conditionnelle [Ouv00] p.155.
   - Théorème de Lax-Milgram. Minimisation dans le cas symétrique [All05] p.74.
   - Application : problème de Dirichlet pour le Laplacien [All05] p.112.

   2.3 Extrema des fonctions convexes.
   - Fonctions convexes, strictement convexes, fortement convexes [All05] p.298 et p.299.
   - Les minima locaux des fonctions convexes sur un ensemble convexe sont en fait globaux et ils forment un ensemble convexe. De plus, une fonctions strictement convexe admet au plus un minimum [All05] p.296 ou [BMP04] p.30.
   - Remarque : une fonction strictement convexe n'admet pas toujours de minimum comme le montre la fonction exp sur $\mathbb{R}$.
   - Les fonctions fortement convexes sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert admet un unique minimum sur ce convexe [All05] p.299.
   - $J : v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv \, dx$ est fortement convexe sur $H_0^1(\Omega)$ fermé convexe de $H^1(\Omega)$ donc admet un unique minimum sur $H_0^1(\Omega)$. Le problème de Dirichlet du Laplacien est donc résolu [All05] p.289 et p.116.
   - Les fonctions convexes continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum [All05] p.300.

- Application : Etude de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ [BMP04] p.32.

3. Liens avec le calcul différentiel - Cas des fonctions holomorphes.

3.1 Différentiabilité.

- Point critique [BMP04] p.16 ou [SR08] p.240.
- Tout extremum est un point critique [BMP04] p.16 ou [SR08] p.239.

⋆ La réciproque est fausse comme le montre $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$. De plus, il faut être sur un ouvert comme le montre la fonction identité sur $[0, 1]$ [BMP04] p.17.

- Notations de Monge [Rou09] p.375.
- Condition nécessaire de second ordre [SR08] p.245 ou [Gou08] p.316.
- Condition suffisante de second ordre [SR08] p.247 ou [Gou08] p.316.

⋆ La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^4$ montre que la condition n'est pas nécessaire [Rou09] p.379.

3.2 Extrema liés.

♮ Théorème des extrema liés [Ave83] p.103 et [Gou08] p.321.

- Application : Isopérimètrie pour les parallélépipèdes rectangles [Rou09] p.406.
- Application : Toute matrice symétrique réelle admet un vecteur propre [BMP04] p.21.
- Application : $V_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x^4 + y^4 + z^4 = r\right\}$ est non vide si et seulement si $r \geq 3$, auquel cas c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

3.3 Fonctions holomorphes.

- Théorème de Liouville pour les extrema globaux des fonctions entières [AM03] p.150.
- Applications du principe du maximum : extrema du module d'une fonction holomorphe [AM03] p.154 et [Tes12] p.229.
- Corollaire dans le cas d'un ouvert borné [AM03] p.155.
- Lemme de Schwarz [AM03] p.156 ou [SR08] p.335.
- Inégalité de Borel-Carathéodory sur les extrema locaux des fonctions entières sur les cercles [AM03] p.156.
- Lemme de Hadamard sur les fonctions holomorphes sur le disque unité nulles en 0 dont la partie réelle est bornée [SR08] p.336.

4. Approximation des extrema.

4.1 Méthode du gradient à pas optimal.

- Inégalité de Kantorivitch [FGN10a] p.139.
- Principe de la méthode du gradient à pas optimal [HU09] p.53.

♮ Convergence de l'algorithme [HU09] p.54.

- Majoration de l'erreur de l'algorithme [HU09] p.54.
- Conditionnement en norme 2 et convergence [HU09] p.55.

4.2 Méthode de Newton.

- Principe de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Convergence de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Cas des fonctions convexes [Rou09] p.152.
- Estimation de l'erreur [Rou09] p.152.

⋆ Estimation du nombre d'or [Rou09] p.153.

⋆ Estimation des racines carrées [Rou09] p.152.

- Méthode de Newton pour les polynômes [CLF99] p.204.
- Méthode pour approcher toutes les racines d'un polynôme réel scindé [CLF99] p.205.
- Inconvénient de la méthode [Dem06] p.100.

- Méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.
- Convergence de la méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.

⋆ Résolution de $x^2 + xy - 2y^2 = 0$, $xe^x + ye^y = 0$ [Dem06] p.109.

4.3 Méthode de la sécante.

- Principe de la méthode de la sécante [Dem06] p.100.
- Convergence de la méthode de la sécante [Dem06] p.101.
- Vitesse inférieure à celle de la méthode de Newton [Dem06] p.102

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Equation de la chaleur.
3. Théorème des extrema liés.

Leçon 220

Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Professeur encadrant : Christophe Cheverry.

Remarques du Jury

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'espace. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires.
Le lemme de Gronwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est curieusement rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en oeuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.
Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase.
Enfin, il n'est pas malvenu d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon par exemple autour de la notion de problèmes raides et de la conception de schémas implicites pour autant que la candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

Squelette du plan

1. Existence de solutions.
   1.1 Solutions d'une équation différentielle.
   - Solution d'une EDO [Dem06] p.125.
   - Problème de Cauchy [Dem06] p.126.
   - Prolongement d'une solution [Dem06] p.128.
   - Solution maximale [Dem06] p.128.
   - Toute solution se prolonge en une solution maximale [Dem06] p.128.
   - Solution globale [Dem06] p.129.
   - ⋆ $y' = y^2$ admet des solutions maximales non globales [Dem06] p.130.
   - Régularité des solutions [Dem06] p.130.
   - Lemme de Gronwall [Gou08] p.377.
   - ⋆ Distance entre deux solutions [Gou08] p.379.
   - Théorème de sortie des compacts [Gou08] p.380.
   - ⋆ Fonctions $\mathcal{C}^1$ bornée et champ de vecteurs complets [Gou08] p.381.
   - Extension aux équations linéaires d'ordre supérieur à 1 [Dem06] p.146.

   1.2 Théorème de Cauchy-Peano.
   - Cylindre de sécurité [Dem06] p.132.
   - Méthode d'Euler [Dem06] p.133.
   - Théorème de Cauchy-Peano [Dem06] p.137.
   - ⋆ $y' = 3|y|^{3/2}$ avec $y(0) = 0$ admet au moins deux solutions maximales [Dem06] p.138.
   - ⋆ $f : (u_n) \in c_0(\mathbb{N}) \mapsto \left(\sqrt{|u_n|} + \frac{1}{n}\right) \in c_0(\mathbb{N})$ donne un contre-exemple au théorème de Cauchy-Peano en dimension infinie.

   1.3 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz.

♮ Théorème de Cauchy-Lipschitz [Dem06] p.141.
⋆ Equation du pendule [Rou09] p.180.
⋆ Etude d'un système linéaire [FGN12] p.242.
- Théorème de Cauchy-Lipschitz global [Rou09] p.179 ou [Dem06] p.144.

1.4 Les EDO linéaires.

- Cauchy-Lipschitz et EDO linéaires [Gou08] p.358.
- Espace des solutions d'une EDO linéaire [Dem06] p.198 ou [Gou08] p.358.
- Wronskien d'une EDO linéaire homogène [Gou08] p.358.
- Formule de Liouville [Gou08] p.368.
- Wronskien et base de solutions [Gou08] p.359.
- Théorème d'entrelacement de Sturm [Gou08] p.135.

2. Détermination des solutions.

2.1 Solutions des EDO linéaires.

- Solution générale des systèmes linéaires sans second membre [Dem06] p.201.

⋆ Système linéaire en dimension 3 [Gou08] p.363.
- Solution générale des systèmes linéaires [Dem06] p.202.
- Application aux EDO linéaires d'ordre fini à coefficients constants [Dem06] p.208.

⋆ Résolution de $y'' + 4y = \tan t$ [Dem06] p.209.
- Résolvante d'un système homogène [Dem06] p.210.
- Méthode de la variation de la constante [Dem06] p.215.

2.2 Equations particulières.

- Equation de Bernoulli [Dem06] p.164.
- Equation de Ricatti [Dem06] p.165.

⋆ Résolution de $(1-x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$ [Dem06] p.165.
- Equations homogènes [Dem06] p.166.

⋆ Résolution de $xy'(2y-x) = y^2$ [Dem06] p.168.

2.3 Approximation des solutions.

- Mise en place : On approche itérativement des solutions.
- Utilisation du théorème du point fixe, approximation de l'exponentielle par ses sommes partielles [Rou09] p.180.

⋆ Approximation de la solution de $y' = x^2 + y^2$ [FGN12] p.191.
⋆ Approximation de la solution de $y' = \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Problèmes de stabilité.

3.1 Notions de stabilité.

- Point d'équilibre [Dem06] p.288.
- Point d'équilibre stable [Dem06] p.282.
- Point d'équilibre asymptotiquement stable [Dem06] p.283.
- Stabilité des systèmes linéaires [Dem06] p.284.

♮ Théorème de Lyapunov [Rou09] p.143.
⋆ $x' = \alpha x^3$, $y' = \beta y^3$ et stabilité [Dem06] p.289.
⋆ Système non linéaire stable et système linéarisé stable : $x' = -x^3$.
⋆ Système non linéaire instable et système linéarisé stable : $x' = x^3$.

3.2 Portraits de phases en dimension 2.

- Schémas selon le spectre de la matrice [Dem06] p.290 à 294.

4. Liens avec les équations de transport.

- Equation de transport [DM09] p.44.
- Méthode des caractéristiques [DM09] p.34.

⋆ Résolution de $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x}{1+t^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ avec $u(x,0) = u_0(x)$ [DM09] p.36.

⋆ Résolution de $\frac{\partial u}{\partial t} + (x^2-1)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ avec $u(x,0) = u_0(x)$ [DM09] p.37.

Développements

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Théorème de Lyapunov.

Leçon 221

Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Françoise Dal'Bo.

Remarques du Jury

On attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions (dans le cas de la dimension finie, bien sûr)
Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer. Dans le cas général, certains candidats évoquent les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Squelette du plan

1. Etude des équations différentielles linéaires.
   1.1 Existence de solutions.
   - Equation différentielle linéaire du premier ordre [Dem06] p.197.
   - Equation différentielle linéaire d'ordre p [Gou08] p.357.
   - Réduction à l'étude des équation différentielles linéaires d'ordre 1 [Gou08] p.357.
   - ♮ Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire [Dem06] p.198 ou [Rou09] p.179.
   - ⋆ $y' = y^2$ avec $y(0) = 1$ admet une unique solution $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ qui explose en temps fini [Rou09] p.181.
   - ⋆ $y' = 3|y|^{2/3}$ avec $y(0) = 0$ admet deux solutions [Dem06] p.138.

   1.2 Espace des solutions.
   - Espace des solutions d'un système différentiel linéaire [Dem06] p.198.
   - Espace de solutions d'une équation différentielle linéaire [Dem06] p.206.
   - Wronskien d'un système de solution [Dem06] p.211 ou [Gou08] p.358.
   - Rang d'un système de solutions [Gou08] p.359.
   - Wronskien et base de solutions [Gou08] p.359.
   - Formule de Liouville [Rou09] p.83 ou [Gou08] p.368.
   - Théorème d'entrelacement de Sturm [FGN12] p.135.
   - Théorème de Sturm [FGN12] p.142.
   - ⋆ Zéros d'une solution non nulle de $y'' + e^t y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ [FGN12] p.142.

   1.3 Distance entre solutions.
   - Lemme de Gronwall [FGN12] p.161.
   - Distance entre les solutions de deux systèmes différentiels [FGN12] p.161.
2. Résolution des équations différentielles linéaires.
   2.1 Etude du cas général.
   - Résolvante d'un système linéaire [Dem06] p.211.
   - Propriétés de la résolvante [Dem06] p.211.
   - Méthode de variation de la constante [Dem06] p.211.

   2.2 Cas particuliers des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
   - Solution du système homogène [Dem06] p.201.

- ⋆ Système différentiel linéaire avec une matrice diagonalisable [Gou08] p.363.
- ⋆ Exponentielle de matrices qui commutent [Pom94] p.322.
- • Méthode de variation de la constante [Dem06] p.203.
- • Base de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène [Dem06] p.208.
- • Solutions d'une équation différentielle linéaire quelconque [Dem06] p.208 et p.209.
- ⋆ Résolution de $y'' + 4y = \tan t$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ [Dem06] p.209.
- ⋆ Résolution de $y^{(4)} + \alpha y = 0$ [FGN12] p.97.
- ⋆ Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f' + f$ tend vers 0 en $+\infty$, alors f tend vers 0 en $+\infty$ [Pom94] p.327.

2.3 Problèmes de recollement.

- • Mise en place : Problème quand l'équation n'est pas mise sous forme résolue.
- ⋆ Non recollement des solutions [FGN12] p.106.
- ⋆ Résolution de $y'' + |y| = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = \alpha$ où α est un nombre réel [FGN12] p.91.

2.4 Recherche et utilisation de solutions particulières.

- • Mise en place : Pour rechercher une solution particulière, on peut appliquer la méthode de variation de la constante mais il existe d'autres méthodes.
- ⋆ Avec les séries de Fourier : $y'' + y = |\sin x|$ [FGN12] p.85.
- ⋆ Avec les séries entières : équation de Bessel [FGN12] p.101.
- • Solution particulière pour un second membre polynôme exponentiel [Pom94] p.334.
- • Méthode de Liouville [Pom94] p.330.
- ⋆ Résolution de $(x+1)y'' - y' - xy = 0$ sur $]-1, +\infty[$ [Pom94] p.330.

3. Problèmes de stabilité.

3.1 Notions de stabilité.

- • Point d'équilibre [Dem06] p.288.
- • Point d'équilibre stable [Dem06] p.282.
- • Point d'équilibre asymptotiquement stable [Dem06] p.283.
- • Stabilité des systèmes linéaires [Dem06] p.284.
- ♮ Théorème de Lyapunov [Rou09] p.143.
- ⋆ $x' = \alpha x^3$, $y' = \beta y^3$ et stabilité [Dem06] p.289.
- ⋆ Système non linéaire stable et système linéarisé stable : $x' = -x^3$.
- ⋆ Système non linéaire instable et système linéarisé stable : $x' = x^3$.

3.2 Portraits de phases en dimension 2.

- • Schémas selon le spectre de la matrice [Dem06] p.290 à 294.

Développements

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz adapté.
2. Théorème de Lyapunov.

Leçon 222

Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Cette nouvelle leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).
Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ avec des conditions de Dirichlet en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.
Les séries de Fourier trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur, de Schrödinger ou des ondes dans le contexte des fonctions périodiques. La transformée de Fourier permet ceci dans le cadre des fonctions sur $\mathbb{R}^d$.
Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.
Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de Lax-Milgram, l'espace de Sobolev $H_0^1(]0,1[)$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec l'étude de solutions élémentaires d'équations elliptiques.

Squelette du plan

1. Classification des EDP.
- Equation aux dérivées partielles.
- Ordre d'une EDP [All05] p.29.
- Problème aux limites [All05] p.27.
- Problème bien posé [All05] p.27.
- Equation linéaire d'ordre 2 [All05] p.29.
- Equation elliptique [All05] p.29.
- ⋆ Le Laplacien est elliptique [All05] p.29.
- ⋆ Le problème de Cauchy pour le Laplacien est mal posé [All05] p.28.
- Equation parabolique [All05] p.29.
- ⋆ L'équation de la chaleur est parabolique [All05] p.29.
- ⋆ Modèle : Equilibre thermique [DM09] p.23.
- Equation hyperbolique [All05] p.29.
- ⋆ L'équation des ondes est hyperbolique [All05] p.29.
- ⋆ Modèle : propagation de la lumière dans le vide [DM09] p.21.
- Forme canonique des EDP d'ordre 2 par changement de variable [All05] p.30.

2. Equations de transport.

   2.1 Méthode des caractéristiques.
   - Equation de transport scalaire [DM09] p.33 et p.36.
   - Modèle : mouvement d'un fluide [DM09] p.19.
   - Courbes caractéristiques [DM09] p.34 et p.36.
   - Résolution du problème par la méthode des caractéristiques [DM09] p.34 et p.36.
   - Pas de gain de régularité [DM09] p.69.

- ⋆ Résolution de $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{x}{t^2+1}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [DM09] p.36.
- ⋆ Résolution de $\dfrac{\partial u}{\partial t} + (x^2-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ [DM09] p.37.
- Résolution du problème par transformation de Fourier dans le cas d'une vitesse constante [DM09] p.35.
- Problème aux bords du domaine de travail [DM09] p.39.
- ⋆ Résolution de $\dfrac{\partial u}{\partial t} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$ [DM09] p.39.
- Problème de régularité des solutions [DM09] p.40.

2.2 Schémas aux différences finies.

- Mise en place du problème [DM09] p.91.
- Construction du schéma explicite décentré à droite en espace [DM09] p.92.
- Schéma explicite downwinde [DM09] p.93.
- Schéma explicite centré en espace [DM09] p.93.
- Consistance et précision du schéma upwind [DM09] p.95.
- Transformée de Fourier du schéma upwind [DM09] p.97.
- Stabilité l^2 pour le schéma upwind [DM09] p.99.

2.3 Equation des ondes.

- Equation des ondes en dimension quelconque [DM09] p.53.
- Théorème de d'Alembert [DM09] p.54.
- Résolution par changement de variables [DM09] p.54.
- Résolution par l'utilisation d'équations de transport [DM09] p.57.

3. Equations de la chaleur et de Schrodinger.

3.1 Equation de la chaleur.

- Equation de la chaleur [DM09] p.65.
- Problème de Cauchy sur un domaine borné [DM09] p.71.
- Recherche de solutions particulières [DM09] p.72.
- ♮r Solution de l'équation de la chaleur [DM09] p.72.
- Principe du maximum sur un domaine borné [DM09] p.76.
- Résolution sur l'espace entier [DM09] p.65.
- Estimations d'énergie [DM09] p.69.

3.2 Equation de Schrodinger.

- Opérateur de Schrodinger [Zui02] p.152.
- Modèle : physique quantique [DM09] p.23.
- ♮ Solution fondamentale de l'opérateur de Schrodinger [Zui02] p.152.
- Equation de Schrodinger avec donnée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.152.
- Equation de Schrodinger avec donnée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.154.
- Forme de la solution [Zui02] p.155.
- Propagation à vitesse infinie [Zui02] p.157.
- Décroissance à l'infini [Zui02] p.157.
- L'équation de Schrodinger est une équation parabolique.
- Equation de Schrodinger sur un domaine borné [DM09] p.80.

4. Problèmes aux limites elliptiques.

4.1 Problèmes elliptiques en dimension 1.

- Théorème de Lax-Milgram [All05] p.74.
- Espace de Sobolev $H^1(0,1)$ [Bre05] p.120.
- Structure d'espace de Hilbert [Bre05] p.121.
- Existence d'un représentant continu [Bre05] p.122.
- Espace $H_0^1(0,1)$ et caractérisation [Bre05] p.132 et p.133.
- Inégalité de Poincaré [Bre05] p.134.

⋆ Problème de Sturm-Liouville [Bre05] p.138.

- Résolution de $-(\alpha u')' + u = f$ avec le théorème de Riesz.
- Résolution de $-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$ avec le théorème de Lax-Milgram.

4.2 Problème du Laplacien en dimension 2.

- Problème de Dirichlet [AM03] p.344.
- Modèle : équations de Maxwell dans le vide [DM09] p.21.
- Fonction harmonique [AM03] p.327.
- Fonctions harmoniques et fonctions holomorphes [AM03] p.329.
- Noyau de Poisson [AM03] p.334.
- Propriétés du noyau de Poisson [AM03] p.335.
- Formule de Poisson [AM03] p.335.
- Résolution du problème de Dirichlet [AM03] p.344.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Equation de Schrodinger.

Leçon 223

Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Isabelle Gruais.

Remarques du Jury

Le théorème de Bolzano-Weierstrass doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle (bornée), et qu'ils en maîtrisent le concept.

Squelette du plan

1. Convergence des suites numériques.

   1.1 Limites d'une suite numérique.

   - Suite numérique [Gou08] p.191.
   - Suite numérique convergente [Gou08] p.191.
   - ⋆ Etude de $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$ [FGN03] p.104.
   - Suite extraite d'une suite numérique [Gou08] p.191.
   - Suite majorée, minorée, bornée [Gou08] p.192.
   - Toute suite croissante majorée converge [Gou08] p.192.
   - ⋆ Moyenne arithmético-harmonique [FGN03] p.123.
   - Théorème d'encadrement [Gou08] p.192.
   - Suites adjacentes [Gou08] p.192.
   - Convergence des suites adjacentes [Gou08] p.192.
   - Suite de Cauchy [Gou08] p.192.
   - Convergence des suites de Cauchy numériques [Gou08] p.192.

   1.2 Valeurs d'adhérence.

   - Valeur d'adhérence [Gou08] p.19.
   - Caractérisation des valeurs d'adhérence [Gou08] p.19.
   - ⋆ Valeurs d'adhérences de $u_n = \sin n$ [Gou08] p.197.
   - Théorème de Bolzano-Weierstrass [Gou08] p.28.
   - Une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence converge [FGN03] p.76.
   - ⋆ Si (u_n) est bornée et la suite de terme général $u_n + \frac{u_{2n}}{2}$ converge, alors (u_n) converge [FGN03] p.76.
   - Limites supérieure et inférieur d'une suite numérique [ZQ95] p.2.
   - Limites supérieurs et inférieur et inégalités [ZQ95] p.3.
   - ♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.106.
   - Limites supérieurs et inférieur et valeurs d'adhérence [ZQ95] p.5.
   - ⋆ Limites supérieurs et inférieures de la suite de terme général $(-1)^n$ [ZQ95] p.4.
   - ⋆ Comportement des suites sous-additives [ZQ95] p.5.

   1.3 Comportement asymptotique.

   - Négligeabilité [Gou08] p.86.
   - Caractérisation de la négligeabilité [Rom04] p.201.
   - Domination [Gou08] p.86.

- Equivalence [Gou08] p.86.
- Caractérisation de l'équivalence [Rom04] p.204.
- Opération sur les relations de comparaison [Rom04] p.203 à p.205.
- Les équivalents en s'ajoutent pas en général [Rom04] p.206.
- Sommation des relations de comparaison [Gou08] p.202 ou [Pom94] p.124.

♮ Inversion de Mobius [FGN03] p.157.

- Mise en défaut si les séries ne sont pas à termes positifs [Hau07] p.129.
- Théorème de Césaro [Hau07] p.130 ou [Pom94] p.115.

⋆ Réciproque du résultat précédent fausse avec la série de terme général $(-1)^n$ [Hau07] p.130.

- Méthode de recherche de développement asymptotique [Rom04] p.222.
- $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$ [Rom04] p.221.
- Développement asymptotique de la suite associée [Rom04] p.223.

⋆ Avec sin : $x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ [Rom04] p.224.

⋆ Avec $\ln(1+.)$: $x_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ [Rom04] p.224.

2. Etude des suites récurrentes.

2.1 Structure de l'ensemble de suites récurrentes.

- Suite récurrente [Gou08] p.192.
- Espace des suites récurrentes linéaires [FGN03] p.115 ou [Gou08] p.193.
- Structure de l'ensemble des suites récurrentes linéaires à coefficients constants [FGN03] p.115 ou [Gou08] p.193.

⋆ Si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(n))$ [FGN03] p.115.

⋆ Equation fonctionnelle $f \circ f = 6\,\mathrm{id} - f$ [FGN03] p.113.

2.2 Monotonie des suites récurrentes.

- Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone [Gou08] p.192.

⋆ $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$. Alors $u_n = \frac{\lambda}{2^n} + \frac{4\lambda^3}{9}\frac{1}{2^{3n}} + o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right)$ [Rom05] p.294.

- Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et ont des monotonies opposées [Gou08] p.192.

⋆ $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$ avec $\lambda \in]0,1[$ et $u_0 \in]0,1[$. Le comportement diffère selon la valeur de λ. [FGN03] p.88.

- Si f n'est pas monotone, il n'y a pas de résultat en général.

⋆ $u_0 \in]0,\pi[: u_{n+1} = \sin u_n$. Alors $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ converge vers 0 [CLFM95] p.127.

⋆ $u_0 \in \mathbb{R} : u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Alors $u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ diverge [FGN03] p.102.

2.3 Suites récurrentes et points fixes.

- Si f est continue et si la suite (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f.

⋆ f continue n'assure pas la convergence comme le montre $f(x) = -x$ [Rom04] p.257.

⋆ Il n'est pas nécessaire que f soit continue comme le montre l'indicatrice de $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, (u_n) converge vers 1 le seul point fixe de f [Rom04] p.257.

- Théorème du point fixe de Banach [Rou09] p.147.
- Le résultat précédent est faux si l'espace n'est pas complet ou si l'intervalle n'est pas stable, ou si f n'est pas contractante [Rou09] p.148.

- ⋆ Illustrations de la remarque précédente [Rou09] p.148.
- Points fixes attractifs, points fixes répulsifs et points fixes superattractifs [Dem06] p.95 ou [Rou09] p.149.
- Mettre les schémas des trois situations précédentes [Rou09] p.150.
- Le cas des points attractifs : convergence quadratique [Rou09] p.149 ou [Dem06] p.95.
- Le cas des points répulsifs : la suite s'écarte du point fixe [Rou09] p.150 ou [Dem06] p.96.
- Dans le cas où la dérivée en le point fixe de f vaut 1 en valeur absolue, alors pas de résultat général [Dem06] p.96 ou [Rou09] p.150.
- ⋆ $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_{n+1} = \sinh u_n$ pour illustrer la remarque précédente [Dem06] p.96.

2.4 Convergence des suites récurrentes.

- La suite (u_n) converge si et seulement si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0 [FGN03] p.86.
- ⋆ Les suites $u_n = \ln(n)$ et $u_n = \sqrt{n}$ ne sont pas récurrentes.
- ⋆ Suites arithmétiques [Gou08] p.193.
- ⋆ Suites géométriques et convergence [Gou08] p.193.
- ⋆ Suites homographiques et convergence [Gou08] p.193.

3. Utilisation des suites numériques.

3.1 Approximation de zéros.

- Principe de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Convergence de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Cas des fonctions convexes [Rou09] p.152.
- Estimation de l'erreur [Rou09] p.152.
- ⋆ Estimation du nombre d'or [Rou09] p.153.
- ⋆ Estimation des racines carrées [Rou09] p.152.
- Méthode de Newton pour les polynômes [CLF99] p.204.
- Méthode pour approcher toutes les racines d'un polynôme réel scindé [CLF99] p.205.
- Inconvénient de la méthode [Dem06] p.100.
- Principe de la méthode de la sécante [Dem06] p.100.
- Convergence de la méthode de la sécante [Dem06] p.101.
- Vitesse inférieure à celle de la méthode de Newton [Dem06] p.102.

3.2 Méthode d'Euler.

- Principe de la méthode d'Euler [Dem06] p.123.
- Solution approchée et cylindre de sécurité [Dem06] p.124.
- Erreur des solutions construites par méthode d'Euler [Dem06] p.125.
- Convergence des solutions approchées [Dem06] p.125.
- Théorème de Cauchy-Peano [Dem06] p.127.

3.3 Schémas numériques pour l'équation de transport.

- Principe des schémas aux différences finies [DM09] p.91.
- Construction du schéma upwind [DM09] p.91.
- Schémas downwind et centrés [DM09] p.93.
- Le schéma upwind est consistant et de précision 1 en temps et en espace [DM09] p.95.
- Convergence l^2 du schéma upwind [DM09] p.92.

Développements

1. Inversion de Mobius.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 224

Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Professeur encadrant : Karel Pravda-Starov.

Squelette du plan

1. Comparaison de suites et des fonctions.

 1.1 Relations de comparaison.

 - Négligeabilité [Gou08] p.86.
 - Caractérisation de la négligeabilité [Rom04] p.201.
 - Domination [Gou08] p.86.
 - Equivalence [Gou08] p.86.
 - Caractérisation de l'équivalence [Rom04] p.204.
 - Opération sur les relations de comparaison [Rom04] p.203 à p.205.
 - Les équivalents en s'ajoutent pas en général [Rom04] p.206.
 - ⋆ Comparaison entre ln, exp et les monômes [Rom04] p.202 et p.203.
 - Notions équivalentes pour les suites [Rom04] p.206.

 1.2 Développements asymptotique.

 - Echelle de comparaison au voisinage d'un point [Rom04] p.220.
 - ⋆ Echelles de comparaison usuelles [Rom04] p.221.
 - Développement asymptotique d'une fonction [Rom04] p.221.
 - ⋆ $x^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$ [Rom04] p.221.

 1.3 Notion de développements limités.

 - Développements limité [Rom04] p.207.
 - Unicité du développements imité [Rom04] p.207.
 - Continuité, dérivabilité et développement limité [Rom04] p.208.
 - ⋆ $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ a un développement imité d'ordre 2 en 0 dans admettre de dérivée seconde en 0 [Rom04] p.208.
 - Théorème deTaylor-Young [Rom04] p.208.
 - ⋆ Développements limités usuels en 0 [Rom04] p.209.
 - ⋆ $\frac{\tan x - x}{\sin x - x} \underset{x\to 0}{\to} -2$ [Gou08] p.90.
 - ⋆ $\frac{x^{\sinh x} - \sinh^x x}{\sin^x x - x^{\sin x}} \underset{x\to 0}{1}$ [FGN03] p.213.
 - Opérations sur les développements limités [Rom04] p.210 et p.211.
 - ⋆ $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^7)$ [Rom04] p.212.
 - Intégration des développements limités [Gou08] p.88
 - Calcul de développement limité d'une fonction réciproque [Rom04] p.213.
 - ⋆ $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$ [Rom04] p.213.

2. Equivalent d'intégrales.

 2.1 Intégration des relations de comparaison.

 - Intégration des relations de comparaison [Pom94] p.125 ou [Gou08] p.159.

- ⋆ $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!x}{\ln^{k+1} x} + o\left(\frac{x}{\ln^n x}\right)$ [Pom94] p.126.
- ⋆ $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ [Pom94] p.126.
- • Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et équivalent d'intégrale [Gou08] p.168.

2.2 Développement asymptotique des intégrales à paramètres.

- • Méthode de Laplace [Gou08] p.161.
- ♮ Equivalents d'intégrales par la méthode de Laplace [ZQ95] p.338 ou [Gou08] p.161.
- ⋆ Formule de Stirling [ZQ95] p.340 ou [Gou08] p.162.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha x} t^x \, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}} t^{1/(2\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{e}\right)$ [Gou08] p.167.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x) x^t \, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^{t+2}}{t^2}$ [Gou08] p.167.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - tx\right) dx \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{1-\alpha}} t^{\frac{\alpha-2}{2(1-\alpha)}} \exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$ [Gou08] p.168.
- • Explications sur la phase stationnaire [Gou08] p.170.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^1 (\cos x) e^{it\cosh x} \, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} e^{i(t+\pi/4)}}{\sqrt{2t}}$ [Gou08] p.170.

2.3 Suites définies par des intégrales.

- ⋆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+n}$ [Pom94] p.127.
- ⋆ Equivalent des intégrales de Wallis [Pom94] p.128.
- • Equivalents de type parabolique [Pom94] p.128.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^n e^{-x} x^n \, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2}$ [Pom94] p.129.

3. Utilisation de séries.

3.1 Sommation des relations de comparaison.

- • Sommation des relations de comparaison [Gou08] p.202 ou [Pom94] p.124.
- • Mise en défaut si les séries ne sont pas à termes positifs [Hau07] p.129.
- • Théorème de Césaro [Hau07] p.130 ou [Pom94] p.115.
- ⋆ Réciproque du résultat précédent fausse avec la série de terme général $(-1)^n$ [Hau07] p.130.
- • Méthode de recherche de développement asymptotique [Rom04] p.222.
- • Suite récurrente avec $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$ [Rom04] p.221.
- • Développement asymptotique de la suite associée [Rom04] p.223.
- ⋆ Avec sin : $\displaystyle x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ [Rom04] p.224.
- ⋆ Avec $\ln(1+.)$: $\displaystyle x_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3} \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ [Rom04] p.224.
- ♮ Inversion de Mobius [FGN03] p.157.

3.2 Formule d'Euler Mac-Laurin.

- • Formule d'Euler-MacLaurin [Gou08] p.301.
- ⋆ $\displaystyle H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r-1} (-1)^{k-1} \frac{b_k}{kn^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$ [Gou08] p.302.
- ⋆ $\displaystyle n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{\theta}{1680n^7}\right)$ avec $\theta \in [0,1]$ [Dem06] p.83.

3.3 Comparaison série-intégrale.

- Mise en place de la comparaison série-intégrale [Pom94] p.156.

⋆ $\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{1-\alpha}}$ [Pom94] p.160.

⋆ $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ [Pom94] p.161.

⋆ $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ [Gou08] p.282.

4. Suites définies implicitement.

⋆ $\tan x_n = \tanh x_n : x_n = n\pi + \frac{\pi}{4} - e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-2n\pi} + o\left(e^{-2n\pi}\right)$ [Rom04] p.226.

⋆ $x_n^n - x_n - n = 0 : x_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ [Rom04] p.225.

Développements

1. Inversion de Mobius.
2. Méthode de Laplace.

Leçon 226

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin u_n$. Les suites homographiques réelles ou complexes fournissent des exemples intéressants, rarement évoqués. Cette leçon doit être l'occasion d'évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes, d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler, ...
L'aspect vectoriel est souvent négligé. Par exemple, le jury attend des candidats qu'ils répondent de façon pertinente à la question de la généralisation de l'algorithme de Newton dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque

Il est important de préciser les vitesses de convergence.

Exercices et questions

1. Donner un équivalent de la suite récurrente $x_{n+1} = \sin x_n$ (premier terme quelconque).

   Réponse : On détermine α tel la suite de terme général $x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha$ ne converge pas vers 0. On obtient $\alpha = -\frac{1}{2}$ et le théorème de Césaro donne l'équivalent
   $$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

2. Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et (x_n) une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que $f(x_n) = x_{n+1}$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (x_n) converge si et seulement si $|x_{n+1} - x_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

   Réponse : *cf* [FGN03] p.86.

Squelette du plan

Soient I une partie d'un ensemble E et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ laissant f stable I. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Par récurrence, cette suite est bien définie. L'objectif est d'en donner des propriétés.

1. Dépendances entre (u_n) et f.
   - 1.1 Quelques exemples de suites récurrentes d'ordre 1.
     - Suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n + r$ [Rom04] p.260 ou [Gou08] p.193.
     - Suites géométriques $u_{n+1} = r\, u_n$ [Rom04] p.260 ou [Gou08] p.192.
     - Suites homographiques $u_{n+1} = h(u_n)$ où h est une homographie [Rom04] p.260 ou [Gou08] p.193.
     - Comportement d'une suite homographique en fonction de l'homographie [Rom04] p.260 à 264 ou [Gou08] p.193.
   - 1.2 Monotonie des suites récurrentes.
     - On suppose que I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
     - Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone [Gou08] p.192.

   ⋆ $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$. Alors $u_n = \dfrac{\lambda}{2^n} + \dfrac{4\lambda^3}{9}\dfrac{1}{2^{3n}} + o\left(\dfrac{1}{2^{3n}}\right)$ [Rom05] p.294.

- Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et ont des monotonies opposées [Gou08] p.192.

⋆ $u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2$ avec $\lambda \in]0,1[$ et $u_0 \in]0,1[$. Le comportement diffère selon la valeur de λ. [FGN03] p.88.

- Si f n'est pas monotone, il n'y a pas de résultat en général.

⋆ $u_0 \in]0,\pi[: u_{n+1} = \sin u_n$. Alors $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ converge vers 0 [CLFM95] p.127.

⋆ $u_0 \in \mathbb{R} : u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Alors $u_n = \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ diverge [FGN03] p.102.

1.3 Une étude de la convergence.

♮ Suite de polygones qui converge.

- On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- La suite (u_n) converge si et seulement si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0 [FGN03] p.86.

⋆ Les suites $u_n = \ln(n)$ et $u_n = \sqrt{n}$ ne sont pas récurrentes.

- Théorèmes classiques sur les suites numériques : suites croissantes majorées, suites décroissantes minorées entre autres [Rom04].

2. Les points fixes de f.

2.1 Convergence et points fixes de f.

- Si f est continue et si la suite (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f.

⋆ f continue n'assure pas la convergence comme le montre $f(x) = -x$ [Rom04] p.257.

⋆ Il n'est pas nécessaire que f soit continue comme le montre l'indicatrice de $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, (u_n) converge vers 1 le seul point fixe de f [Rom04] p.257.

2.2 Le théorème du point fixe.

- On suppose que E est un espace métrique complet.
- Théorème du point fixe de Banach [Rou09] p.147.
- Application : théorème de Cauchy-Lipschitz [Rou09] p.179.
- Le résultat précédent est faux si l'espace n'est pas complet ou si l'intervalle n'est pas stable, ou si f n'est pas contractante [Rou09] p.148.

⋆ Illustrations de la remarque précédente [Rou09] p.148.

2.3 Attraction, répulsion et superattraction.

- Points fixes attractifs, points fixes répulsifs et points fixes superattractifs [Dem06] p.95 ou [Rou09] p.149.
- Mettre les schémas des trois situations précédentes [Rou09] p.150.
- Le cas des points attractifs : convergence quadratique [Rou09] p.149 ou [Dem06] p.95.
- Le cas des points répulsifs : la suite s'écarte du point fixe [Rou09] p.150 ou [Dem06] p.96.
- Dans le cas où la dérivée en le point fixe de f vaut 1 en valeur absolue, alors pas de résultat général [Dem06] p.96 ou [Rou09] p.150.

⋆ $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_{n+1} = \sinh u_n$ pour illustrer la remarque précédente [Dem06] p.96.

- Condition pour qu'un point soit attractif en dimension finie quelconque [Dem06] p.107.
- La convergence est quadratique [Dem06] p.107.

2.4 Points périodiques.

- Un point est périodique de période p s'il est point fixe de f^p mais pas des f^k avec $k < p$ [FGN03] p.87.

⋆ $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 2 - u_n^2$ a des points d'ordre p pour tout $p \in \mathbb{N}$ [FGN03] p.89.

- Théorème de Sarkowski [FGN03] p.89.
- ⋆ Le fonction tente illustre le théorème précédent, le plus petit point fixe de T^n est un point n-périodique [FGN03] p.91.
- ⋆ La fonction $x \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto \frac{1}{1-x} \in [1, 2]$ n'a que des points d'ordre 3 et $[0, \frac{1}{2}]$ n'est pas stable.

3. Suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

- Espace des suites récurrentes linéaires [FGN03] p.115 ou [Gou08] p.193.
- Explication sur le fait que l'on se ramène à une suite récurrente linéaire d'ordre 1.
- Structure de l'ensemble des suites récurrentes linéaires à coefficients constants [FGN03] p.115 ou [Gou08] p.193.
- ⋆ Suite de Fibonacci.
- ⋆ Si P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, relation de récurrence vérifiée par la suite $(P(n))$ [FGN03] p.115.
- ⋆ Equation fonctionnelle $f \circ f = 6\,\mathrm{id} - f$ [FGN03] p.113.

4. Utilisation des suites récurrentes d'ordre 1.

4.1 Méthodes d'approximation de zéros.

- Principe de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Convergence de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- Cas des fonctions convexes [Rou09] p.152.
- Estimation de l'erreur [Rou09] p.152.
- ⋆ Estimation du nombre d'or [Rou09] p.153.
- ⋆ Estimation des racines carrées [Rou09] p.152.
- Méthode de Newton pour les polynômes [CLF99] p.204.
- Méthode pour approcher toutes les racines d'un polynôme réel scindé [CLF99] p.205.
- Inconvénient de la méthode [Dem06] p.100.
- Méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.
- Convergence de la méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.
- ⋆ Résolution de $x^2 + xy - 2y^2 = 0$, $xe^x + ye^y = 0$ [Dem06] p.109.

4.2 Résolution de systèmes linéaires par méthode de décomposition.

- Principe des méthodes de décomposition [All05] p.430.
- Décomposition régulière d'une matrice inversible [All05] p.430.
- Convergence et rayon spectral [All05] p.430.
- Erreur d'approximation [All05] p.432.
- Méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Convergence de la méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Convergence de la méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Méthode de relaxation [All05] p.433.

4.3 Algorithme du gradient à pas optimal.

- Inégalité de Kantorivitch [FGN10a] p.139.
- Principe de la méthode du gradient à pas optimal [HU09] p.53.
- ♮ Convergence de l'algorithme [HU09] p.54.
- Majoration de l'erreur de l'algorithme [HU09] p.54.
- Conditionnement en norme 2 et convergence [HU09] p.55.

4.4 Méthode de Kacmarz.

- Principe de la méthode de Kacmarz.
- Matrice des projections orthogonales sur un hyperplan.
- ♮ Convergence de la méthode de Kacmarz.
- Complexité de la méthode de Kacmarz.

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

Leçon 228

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Ismael Bailleul.

Remarques du Jury

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité par passage à la limite doit être comprise par les candidats.
Pour les candidats aguerris, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes relève de cette leçon. Les applications du théorème d'Ascoli (par exemple les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, . . .), sont les bienvenues.
Pour les candidats qui maîtrisent la notion de dérivée au sens des distributions tempérées, l'étude de la dérivée au sens des distributions de la primitive d'une fonction intégrable est un résultat intéressant.

Remarques

1. Le module de continuité d'une fonction non constante et au plus en δ (avec des notations usuelles).
2. Le dual des fonctions continues, *ie* l'ensemble des mesures de Radon, à sa place dans la leçon.
3. Le lien entre les fonctions monotones est intéressant.
4. Les théorèmes de Dini sont des grands classiques et ont leur place ici.
5. Suggestions de développements : théorème de Borel, théorème de représentation de Riesz, théorème de Helly, théorème taubérien, les sous-espaces fermés de l'ensemble des fonctions continues qui sont $\mathcal{C}^1$ sont de dimension finie.

Exercices et questions

1. A quoi servent le polynômes de Hermite ?

   Réponse : ils forment une base hilbertienne pour un certain produit scalaire sur l'espace des fonctions continues.
2. Théorème de Dini. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[0,1]$. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

   Réponse : Pas dur mais plus tard.
3. Soit $I \in (\mathcal{C}[0,1])'$. Montrer qu'il existe $F \in L^1[0,1]$ telle que

   $$\forall u \in \mathcal{C}^1[0,1] : I(u) = \int_0^1 F(t)u'(t)dt.$$

   Réponse : Voici le corrigé faux de Bailleul. On va montrer que $F(t) = I(\mathbf{1}_{[0,t]})$ convient. Soit $u \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Alors

   $$u = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} u\left(\frac{k}{2^n}\right) \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}[} = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Alors la fête commence maintenant :

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) \right) u\left(\frac{k}{2^n}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{2^n-1} \left(u\left(\frac{k}{2^n}\right) - u\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right) F\left(\frac{k}{2^n}\right) \\
&= \frac{-1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \left(u\left(\frac{k}{2^n}\right) - u\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right) F\left(\frac{k}{2^n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(u) = \int_0^1 F(t)u'(t)dt,
\end{aligned}$$

car I est continue.

Squelette du plan

Dans toute la leçon, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Notions de continuité et de dérivabilité.

   1.1 Continuité.

   - Continuité d'une fonction en un point de I. Fonctions continues sur I [SR08] p.20 et p.21.
   - ⋆ La valeur absolue est continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même [SR08] p.24, la fonction inverse est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.
   - ⋆ La fonction $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ est discontinue en 0.
   - Opérations arithmétiques sur les fonctions continues [SR08] p.24.
   - ⋆ Les fonctions polynomiales sont continues.
   - Caractérisation séquentielle de la continuité [SR08] p.22.
   - Application : $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.
   - Application : deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense de I sont égales sur I.
   - Théorème de prolongement par continuité.
   - ⋆ La fonction $x \mapsto x^x$ se prolonge par continuité en 0.
   - ⋆ La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0 [Rom04] p.40.
   - L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable [FGN03] p.215.

   1.2 Continuité sur un compact et uniforme continuité.

   - Une fonction réelle continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes [SR08] p.42.
   - ⋆ Le maximum de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $1/2$ et vaut $1/4$.
   - Définition de l'uniforme continuité [SR08] p.28.
   - ⋆ Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues [SR08] p.28.
   - Domination des fonctions uniformément continues [FGN03] p.246.
   - ⋆ La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ [FGN03] p.247.
   - Théorème de Heine [SR08] p.43.

   1.3 Dérivabilité.

   - Dérivées à gauche et à droite en un point de I [SR08] p.153.
   - Fonction dérivable en un point de I, fonction dérivable sur I, [SR08] p.153.

- ⋆ Les fonctions affines et les fonctions monômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ [SR08] p.154.
- • Dérivable implique continue [SR08] p.154.
- ⋆ La valeur absolue est continue non dérivable en 0.
- • Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables, formule de Leibniz [SR08] p.154-155 et [ZQ95] p.160.
- ⋆ Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- ♮ Théorème de Rademacher.
- • Application du théorème de Baire : une fonction dérivée est continue sur une partie dense [Gou08] p.399.
- • Fonctions de classe $\mathcal{D}^n$, $\mathcal{C}^n$ et de classe C^∞.
- • Schéma d'inclusion des différents espaces précédents.
- ⋆ La fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable en 0 mais sa dérivée n'est pas continue en 0 [Hau07] p.166.

2. Théorèmes fondamentaux.

2.1 Théorème de Rolle et accroissements finis.

- • Le théorème de Rolle [SR08] p.156.
- • Application : le polynôme dérivé d'un polynôme scindé est scindé [Rom04] p.141.
- • Le théorème des accroissements finis [SR08] p.157.
- • L'inégalité des accroissements finis [SR08] p.157.
- • Application à l'étude des variations des fonctions dérivables [SR08] p.157.
- ⋆ Pour tout x réel non nul, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$ [MCDT93] p.115.
- • Corollaire : dérivée de la réciproque d'une fonction bijective dont la dérivée est strictement positive [SR08] p.158.
- ⋆ La fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ [MCDT93] p.115.
- • Prolongement $\mathcal{C}^1$ [Rom04] des fonctions p.157 ou [Pom94] p.90.
- • Le prolongement $\mathcal{C}^k$ se fait alors par récurrence.

2.2 Le théorème des valeurs intermédiaires.

- • Théorème des valeurs intermédiaires [Rom04] p.56.
- ⋆ L'image d'un intervalle par une fonction non continue n'est pas forcément un intervalle comme le prouve la fonction $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ qui n'est pas continue en 0 et vérifie $\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.
- • Corollaire sur l'existence des zéros de fonctions [Rom04] p.56.
- ⋆ La fonction $x \mapsto x^3 - 3x + 1$ s'annule entre 0 et 1.
- • Théorème de Darboux [FGN03] p.238.

2.3 Formules de Taylor.

- • Formule de Taylor avec reste intégral [Rom04] p.182 ou [FGN03] p.266.
- • Application : factorisation d'un fonction de classe $\mathcal{C}^n$ qui admet un zéro d'ordre n [FGN03] p.278 pour le cas des zéros d'ordre 1.
- • Formule de Taylor-Lagrange [Rom04] p.181 ou [SR08] p.166.
- • Application : Inégalités de Kolmogorov sur le contrôle de la norme infinie des dérivées successives [Rom04] p.193 ou [FGN03] p.259.
- • Inégalité de Taylor-Lagrange [Rom04] p.182.
- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R} : \left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| \leq \frac{|x^5|}{5!}$ [Rom04] p.189.

- Formule de Taylor-Young [Rom04] p.186 ou [SR08] p.167.

⋆ Exemple de calcul par développement limité : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^x$ pour tout x réel.

3. Suites et séries de fonctions.

3.1 Théorèmes de continuité.

- La limite uniforme de fonctions continues est continue [Pom94] p.187 ou [RDO93c] p.60 ou [Gou08] p.222.

⋆ Contre exemple dans le cas de la convergence simple avec la suite de monômes sur $[0,1]$.

- Remarque : on a les résultats analogues pour les séries de fonctions.
- Théorème de Dini dans le cas où la suite est croissante [FGN09b] p.156.
- Théorème de Dini dans le cas où les fonctions sont croissantes [FGN09b] p.156.

3.2 Théorèmes de dérivabilité.

- Théorème de dérivabilité pour les suites de fonctions [Pom94] p.189 ou [RDO93c] p.66 ou [Gou08] p.223.

⋆ La limite uniforme d'applications dérivables peut ne pas être dérivable comme le montre la suite de fonction de terme général $x \mapsto \left(t^2+\frac{1}{n}\right)^{1/2}$ [RDO93c] p.67.

- Remarque : même type de théorème pour les séries de fonctions [Gou08] p.223.
- Théorème de Borel [Rou09] p.359.

♮ Equation de la chaleur [ZQ95] p.105.

4. Intégrales à paramètre.

- Théorème de continuité pour les intégrales à paramètre [Far06b] p.93.
- Théorème de dérivabilité pour les intégrales à paramètre [Far06b] p.93.
- Intégrale de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ [FGN10b] p.214.

5. Un peu de topologie sur l'espace des fonctions continues.

5.1 Le théorème d'Ascoli.

- Théorème d'Ascoli [SR08] p.83 ou [HL09] p.39.
- Application à la compacité des opérateurs à noyau [HL09] p.39.
- Application : Théorème de Cauchy-Peano.

5.2 Résultats de densité.

- Théorème de Stone-Weirestrass [SR08] p.87.
- Cas particulier du théorème de Weirestrass [Gou08] p.224.
- Application : $\mathcal{C}[a,b]$ est séparable.
- Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.105.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Théorème de Rademacher.

Leçon 229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Hélène Hivert.

Remarques du Jury

Les propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle sont attendues. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs, même si ces dessins ne peuvent remplacer un calcul. On notera que la monotonie concerne (à ce niveau) les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation.
Pour les candidats solides, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon.
Pour les candidats aguerris, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité et les candidats bien préparés peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

Squelette du plan

1. Fonctions monotones.
   - 1.1 Régularité des fonctions monotones.
     - • Fonction monotone [Hau07] p.190.
     - ⋆ L'indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est monotone sur aucun intervalle.
     - • Point de discontinuité d'une fonction monotone [FGN03] p.215.
     - • Parties de $\mathbb{R}$ et points de discontinuité [FGN03] p.226.
     - • Une fonction monotone est dérivable presque partout [VP94] p.123.
     - ⋆ L'escalier du diable est une fonction continue croissante de dérivée presque partout nulle sur $[0,1]$ [BP12] p.282.
     - • Dérivées et fonctions monotones [SR08] p.157.
     - • La dérivée d'une fonction monotone est une mesure de Radon positive [Bon01] p.100.
     - • Fonctions absolument monotones [FGN09b] p.230.
     - • Théorème de Bernstein [FGN09b] p.230.
   - 1.2 Utilisation de la monotonie.
     - • Théorèmes de Dini [FGN09b] p.155.
     - • Les théorèmes de Dini peuvent être mis en défaut [Hau07] p.237.
     - ⋆ $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $x \mapsto e^{-x}$ [Pom94] p.168.
     - • Comparaison série [Gou08] p.204.
     - ⋆ Existence de la constante d'Euler [Gou08] p.204.
     - ⋆ Convergence des séries de Riemann [Gou08] p.202.
     - ⋆ Convergence des séries de Bertrand [Gou08] p.204.
     - • Monotonie des suites récurrentes [Gou08] p.192 et p.193.
   - 1.3 Fonctions monotones en probabilités.
     - • Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle [FF12] p.48 [Ouv00] p.8.
     - • Une fonction de répartition est croissante cadlag tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en ∞ [FF12] p.48.
     - • Caractérisation des fonctions de répartition [BL07] p.46.

- Point de continuité de la fonction de répartition et atomes [FF12] p.50.
- Une variable aléatoire réelle a un nombre fini d'atomes [FF12] p.50.
- La fonction de répartition caractérise la loi [BL07] p.46.

2. Fonctions convexes.

2.1 Fonctions convexes et caractérisations.

- Fonctions convexes et strictement convexes [Rom04] p.233 ou [HUL93] p.143 ou [BMP04] p.27.
- Fonctions fortement convexes [All05] p.297.
- Remarque : une fonction est concave si son opposée est convexe.
- ⋆ Les normes d'espaces vectoriels sont convexes [Rom04] p.235.
- Une fonction est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes [Rom04] p.234.
- ⋆ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq 1$. Application au calcul de l'intégrale de Fresnel par l'analyse complexe.
- Inégalités des pentes croissantes [BMP04] p.27.
- Convergence des suites de fonctions convexes [FGN09b] p.160.
- Caractérisation de la convexité dans le cas continu [Rom04] p.237.
- Caractérisation de la convexité dans le cas dérivable [Rom04] p.245.
- ⋆ Γ est convexe.
- Equivalent en dimension supérieure [Rou09] p.329 et [BMP04] p.29.
- La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⋆ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x$ [Rom04] p.248.
- ⋆ Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue et y est une solution de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$. Si y s'annule en deux points distincts, alors elle est identiquement nulle [Rom04] p.255.
- Inégalité de Jensen [Rom04] p.249.
- ♮ Inégalité de Hoeffding [Ouv00] p.129.
- ⋆ Inégalité de Young. Application aux inégalités de Hölder et Minkowski [Rom04] p.248 et [BP12] p.155 et p.158.
- ⋆ Les polynômes de Bernstein sont convexes sur $[0, 1]$ [Rom04] p.256.
- ⋆ Inégalité harmonico-arithmético-géométrique [Rom04] p.252.
- ⋆ Concavité logarithmique du logarithme sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives [FGN10a] p.222.

2.2 Fonctions convexes et régularité.

- Fonctions convexes et dérivées [Tes12] p.248.
- ⋆ Fonction convexe non dérivable dans un dénombrable dense de son ensemble de définition [Hau07] p.201.
- Fonctions convexes et continuité en dimension quelconque [Tes12] p.249.
- ⋆ $\|.\|_\infty$ est convexe non continue dans $(\mathcal{C}[0, 1], \|.\|_1)$ [BMP04] p.28.
- Différentiabilité des fonctions convexes [Tes12] p.257.
- Fonctions convexes et lipschitzianité en dimension finie [BMP04] p.28.

2.3 Optimisation et fonctions convexes.

- Les minima locaux des fonctions convexes sur un ensemble convexe sont en fait globaux et ils forment un ensemble convexe. De plus, une fonctions strictement convexe admet au plus un minimum [All05] p.296 ou [BMP04] p.30.

- Remarque : une fonction strictement convexe n'admet pas toujours de minimum comme le montre la fonction exp sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions fortement convexes sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert admet un unique minimum sur ce convexe. On a de plus une majoration de l'erreur [All05] p.299.
- $J : v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_\Omega fv\, dx$ est fortement convexe sur $H_0^1(\Omega)$ fermé convexe de $H^1(\Omega)$ donc admet un unique minimum sur $H_0^1(\Omega)$. Le problème de Dirichlet du Laplacien est donc résolu [All05] p.289 et p.116.
- Fonctions coercives [Tes12] p.46.
- Les fonctions continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum [Tes12] p.46.
- Cas particulier : les fonctions convexes continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum [All05] p.300.
- Application : Etude de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ [BMP04] p.32.
- Une fonction convexe admet un minimum en tout point critique sur un ouvert convexe où elle est définie [Rou09] p.381.
- Application : Moindres carrés [Rou09] p.384.
- Application : Maximisation de l'entropie [Rou09] p.411.
- Inégalité de Kantorovitch [FGN10a] p.139.
- ♮ Algorithme du gradient à pas optimal [HU09] p.53.

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Inégalité de Hoeffding.

Leçon 230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Remarques du Jury

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être véritablement hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Le thème central de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, ...) et leurs applications diverses, comme par exemple des résultats d'irrationalité, voire de transcendance. Enfin on rappelle que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

Squelette du plan

1. Notion de série numérique.
   1.1 Convergence des séries.
   - Série numérique [Gou08] p.200.
   - Série convergente [Gou08] p.200.
   - Convergence vers 0 du terme général d'une série convergente.
   - Lemmes de Borel-Cantelli [Ouv00] p.51.
   - Suite des restes et des sommes partielles [Gou08] p.200.
   - ⋆ Séries arithmétiques et géométriques [Gou08] p.201.
   - ⋆ Séries télescopiques.
   - ⋆ Nombres de Liouville [FGN03] p.25.

   1.2 Convergence absolue.
   - Série absolument convergente [Gou08] p.201.
   - Critère de Cauchy pour les séries [Gou08] p.201.
   - ⋆ La série harmonique diverge.
   - Série convergente et terme général décroissant [FGN03] p.135.
   - ⋆ Contre-exemple au résultat précédent [Hau07] p.117.
   - Série semi-convergente [Gou08] p.206.
   - ⋆ La série harmonique alternée est semi-convergente [Hau07] p.112.
   - Produit de Cauchy [Gou08] p.208.
   - Convergence absolue et produit de Cauchy [Gou08] p.208.
   - ⋆ Produit convergeant de séries divergentes [Hau07] p.127.

   1.3 Action des permutations sur les séries.
   - Série commutativement convergence [Gou08] p.207.
   - Série absolument convergentes et commutativement convergentes [Gou08] p.207 et [FGN03] p.202.
   - Théorème de Riemann [FGN03] p.206.
   - ⋆ Modification de la série harmonique alternée [Hau07] p.123.

   1.4 Séries doubles.
   - Théorème de Fubini pour les séries [Gou08] p.209.
   - ⋆ Deux sommations différentes [Hau07] p.125.

- Etude de séries doubles [FGN03] p.194.

2. Critères de convergence.

2.1 Cas des séries à termes positifs.

- Série à termes positifs et suite des sommes partielles [Gou08] p.201.
- Majoration et séries à termes positifs [Gou08] p.201.
- Séries à termes positifs et relations de comparaison [Gou08] p.201.
- ⋆ La série de terme général $1/p_n$ diverge [Gou08] p.154.
- Comparaison logarithmique [Gou08] p.205.
- Règle de Raabe-Duhamel [Gou08] p.205.
- Règles de d'Alembert et de Cauchy [Gou08] p.206.
- ⋆ Existence et irrationalité de e [FGN03] p.21.

2.2 Utilisation d'une intégrale.

- Comparaison série-intégrale [Gou08] p.204.
- ⋆ Natures des séries de terme général u_n/S_n^α et u_n/R_n^α [FGN03] p.128.
- ⋆ Séries de Riemann [Gou08] p.202.
- ⋆ Séries de Bertrand [Gou08] p.204.
- ⋆ Estimation d'une somme partielle [FGN03] p.143.

2.3 Transformation d'Abel.

- Principe de la transformation d'Abel [Gou08] p.207.
- Théorème d'Abel [Gou08] p.207.
- ⋆ La série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0$.
- ⋆ La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$ converge [Hau07] p.116.
- Théorème de Kronecker [FGN03] p.177.

3. Etude des restes et des sommes partielles.

3.1 Reste des séries alternées.

- Critère special des séries alternées [Gou08] p.206.
- ⋆ La série de terme général $\sin\sqrt{1+n^2\pi^2}$ est semi-convergente [FGN03] p.166.
- ⋆ Contre-exemple au théorème de majoration pour les séries à termes positifs [Hau07] p.113.
- ⋆ Contre-exemple au théorème sur les relations de comparaison en lien avec les séries à termes positifs [Hau07] p.113 et p.114.
- ⋆ Série produit divergente de deux séries convergentes [Hau07] p.126.
- ⋆ La série de fonctions de terme général $(-1)^n \sin^{\circ n}(x)$ converge uniformément mais pas normalement sur $\mathbb{R}$ [FGN03] p.97.
- ⋆ $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\left\lfloor \frac{k}{n}\right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln 2$ [FGN03] p.183.
- Transformation d'Euler [FGN03] p.171.
- Accélération de la convergence [FGN03] p.173.

3.2 Sommation des relations de comparaison.

- Sommation des relations de comparaison [Gou08] p.202.
- ⋆ $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ [Gou08] p.203 ou [FGN03] p.145.
- Le résultat peut-être mis en défaut si les séries ne sont pas à termes positifs [Hau07] p.129.

- • Théorème de Césaro [Hau07] p.130.
- ⋆ La réciproque du résultat précédent est faux comme le montre la série de terme général $(-1)^n$ [Hau07] p.130.
- ♮ Inversion de Mobius [FGN03] p.157.

3.3 Autres comportements.

- • Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et reste d'une série [Gou08] p.212.
- ⋆ $\sum_{p\geq n} e^{-p^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^2}$ [Gou08] p.212.

4. Séries numériques et séries de fonctions.

4.1 Séries de Fourier et formule de Parseval.

- • Coefficients de Fourier [Far06b] p.148.
- • Convergence en norme L^2 [Far06b] p.150.
- ⋆ $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ [Far06b] p.151 et p.152.
- • Théorème de convergence uniforme [Far06b] p.152.
- ⋆ $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$ sur $[-\pi, \pi]$ [Far06b] p.153.
- • Théorème de Dirichlet [Far06b] p.155.

4.2 Lien avec les séries entières.

- • Théorème d'Abel [Gou08] p.252.
- ⋆ $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$ [Gou08] p.253.
- • La réciproque du théorème d'Abel est fausse [Gou08] p.253.
- ♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.106.

4.3 Polynômes de Bernoulli.

- • Nombres de Bernoulli [Gou08] p.299.
- • Polynômes de Bernoulli [Gou08] p.299.
- • Développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli [Gou08] p.299.
- ⋆ Fonction ζ en les entiers impairs [Gou08] p.299.
- • Formule d'Euler-Mac-Laurin [Gou08] p.301.
- ⋆ Développement asymptotique quelconque de H_n [Gou08] p.302.

Développements

1. Inversion de Mobius.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 232

Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Trop de candidats se limitent au simple cas où X est une variable scalaire. Il serait bon d'envisager les extensions des méthodes classiques dans le cas vectoriel. Au delà de la méthode de Newton, d'intéressants développements peuvent s'intéresser à la résolution de systèmes linéaires, notamment par des méthodes itératives. À propos de la version bidimensionnelle de la méthode de Newton, il convient de comprendre la généralisation en dimension supérieure de la division par la dérivée.

Squelette du plan

1. Zéros des fonctions numériques.
   1.1 Algorithme de dichotomie.
   - Algorithme de dichotomie [Rom04] p.57.
   - Majoration de l'erreur d'approximation [Rom04] p.57.
   - Nombre suffisant d'itérations [Rom04] p.58.

   1.2 Recherche de point fixe.
   - Recherche de zéro par recherche de point fixe.
   - Théorème du point fixe de Banach [Rou09] p.147 ou [Dem06] p.93.
   - Vitesse de convergence [Rou09] p.147 ou [Dem06] p.94.
   - Mise en défaut lorsque les hypothèses ne sont pas vérifiées [Rou09] p.148.
   - Généralisation par les étirées [Rou09] p.169 ou [Dem06] p.94.
   - Points fixes attractifs, superattractifs et répulsifs [Rou09] p.150 ou [Dem06] p.95 et p.96.
   - Vitesse de convergence pour un point attractif [Dem06] p.95.
   - Vitesse de convergence pour un point superattractif [Dem06] p.95.
   - Comportement dans le cas critique [Dem06] p.96.
   - ⋆ Etude de $x^3 - 4x + 1 = 0$ [Dem06] p.96.

   1.3 Méthode de Newton.
   - Principe de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
   - Convergence de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
   - Cas des fonctions convexes [Rou09] p.152.
   - Estimation de l'erreur [Rou09] p.152.
   - ⋆ Estimation du nombre d'or [Rou09] p.153.
   - ⋆ Estimation des racines carrées [Rou09] p.152.
   - Méthode de Newton pour les polynômes [CLF99] p.204.
   - Méthode pour approcher toutes les racines d'un polynôme réel scindé [CLF99] p.205.
   - Inconvénient de la méthode [Dem06] p.100.
   - Méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.
   - Convergence de la méthode de Newton-Raphson [Dem06] p.108.
   - ⋆ Résolution de $x^2 + xy - 2y^2 = 0$, $xe^x + ye^y = 0$ [Dem06] p.109.

   1.4 Méthode de la sécante.
   - Principe de la méthode de la sécante [Dem06] p.100.

- Convergence de la méthode de la sécante [Dem06] p.101.
- Vitesse inférieure à celle de la méthode de Newton [Dem06] p.102.

2. Résolution des systèmes linéaires.

2.1 Méthodes de décomposition.

- Principe des méthodes de décomposition [All05] p.430.
- Décomposition régulière d'une matrice inversible [All05] p.430.
- Convergence et rayon spectral [All05] p.430.
- Erreur d'approximation [All05] p.432.
- Méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Convergence de la méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Convergence de la méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Méthode de relaxation [All05] p.433.

2.2 Algorithme du gradient à pas optimal.

- Inégalité de Kantorovitch [FGN10a] p.139.
- Principe de la méthode du gradient à pas optimal [HU09] p.53.
- $\natural$ Convergence de l'algorithme [HU09] p.54.
- Majoration de l'erreur de l'algorithme [HU09] p.54.
- Conditionnement en norme 2 et convergence [HU09] p.55.

2.3 Méthode de Kacmarz.

- Principe de la méthode de Kacmarz.
- Matrice des projections orthogonales sur un hyperplan.
- $\natural$ Convergence de la méthode de Kacmarz.
- Complexité de la méthode de Kacmarz.

3. Approximation des solutions d'EDO et d'EDP.

3.1 Méthode d'Euler.

- Principe de la méthode d'Euler [Dem06] p.123.
- Solution approchée et cylindre de sécurité [Dem06] p.124.
- Erreur des solutions construites par méthode d'Euler [Dem06] p.125.
- Convergence des solutions approchées [Dem06] p.125.
- Théorème de Cauchy-Peano [Dem06] p.127.

3.2 Solutions des équations de transport.

- Principe des schémas aux différences finies [DM09] p.91.
- Construction du schéma upwind [DM09] p.91.
- Schémas downwind et centrés [DM09] p.93.
- Le schéma upwind est consistant et de précision 1 en temps et en espace [DM09] p.95.
- Convergence l^2 du schéma upwind [DM09] p.92.

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

Leçon 233

Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Professeur encadrant : Maxime Tusseau.

Remarques du Jury

Cette leçon puise une bonne part de son contenu dans le programme complémentaire de l'oral, commun aux différentes options. Les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont bien sûr centrales pour ce sujet où le rôle du conditionnement dans l'étude de sensibilité des solutions de systèmes linéaires doit être bien identifié. L'analyse de convergence des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, en identifiant leurs avantages par rapport aux méthodes directes, trouve naturellement sa place dans cette leçon, tout comme l'étude d'algorithmes de recherche d'éléments propres, avec la méthode de la puissance (ou la méthode QR) et des applications à des matrices vérifiant les hypothèses des théorèmes de Perron-Frobenius. Le cas particulier des matrices symétriques définies positives doit amener à faire le lien avec les problèmes de minimisation et les méthodes de gradient. On notera d'ailleurs que de tels développements peuvent aussi être exploités avec bonheur dans la leçon 226.
Les techniques d'analyse permettent aussi l'investigation des propriétés spectrales de matrices et la localisation de valeurs propres de matrices (théorème de Gershgörin, suites de Sturm). Le jury encourage les candidats à illustrer leur propos d'exemples pertinents issus de la théorie de l'interpolation ou de la résolution approchée de problèmes aux limites, incluant l'analyse de stabilité de méthodes numériques.

Squelette du plan

1. Normes matricielles.
   1.1 Normes matricielles et rayon spectral.
   - Norme subordonnée [All05] p.412.
   - Sous-multiplicativité des normes subordonnées [All05] p.412.
   - Il existe des normes non subordonnées [All05] p.412.
   - ⋆ Normes subordonnées 1, 2 et ∞ [All05] p.413.
   - Rayon spectral [All05] p.413.
   - Rayon spectral et matrices normales [All05] p.413.
   - Rayon spectral et norme subordonnée [All05] p.415.
   - Convergence des puissances d'une matrice [All05] p.414.

   1.2 Conditionnement.
   - Conditionnement d'une matrice [All05] p.415.
   - Conditionnement et perturbations [All05] p.415.
   - Minoration du conditionnement [All05] p.416.
   - Matrice bien conditionnée [All05] p.416.
   - Conditionnement en norme 2 [All05] p.416.
2. Résolutions directes des systèmes linéaires.
   2.1 Méthode de Gauss.
   - Passage à un système triangulaire [All05] p.418.
   - Méthode d'élimination de Gauss [All05] p.418.
   - Calcul de déterminant en parallèle [All05] p.419.

   2.2 Factorisation LU.
   - Existence d'une factorisation LU [All05] p.420.

- Calcul pratique de la factorisation LU [All05] p.422.
- Coût de l'algorithme [All05] p.423.
- Calcul de l'inverse [All05] p.424.
- Coût du calcul de l'inverse [All05] p.424.

2.3 Méthode de Cholesky.

- Décomposition de Cholesky [All05] p.424.
- Calcul pratique de la décomposition de Cholesky [All05] p.425.
- Coût de l'algorithme [All05] p.426.

3. Résolution itératives des systèmes linéaires.

3.1 Méthodes de décomposition.

- Principe des méthodes de décomposition [All05] p.430.
- Décomposition régulière d'une matrice inversible [All05] p.430.
- Convergence et rayon spectral [All05] p.430.
- Erreur d'approximation [All05] p.432.
- Méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Convergence de la méthode de Jacobi [All05] p.432.
- Méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Convergence de la méthode de Gauss-Seidel [All05] p.433.
- Méthode de relaxation [All05] p.433.

3.2 Algorithme du gradient à pas optimal.

- Inégalité de Kantorovitch [FGN10a] p.139.
- Principe de la méthode du gradient à pas optimal [HU09] p.53.

♮ Convergence de l'algorithme [HU09] p.54.

- Majoration de l'erreur de l'algorithme [HU09] p.54.
- Conditionnement en norme 2 et convergence [HU09] p.55.

3.3 Méthode de Kacmarz.

- Principe de la méthode de Kacmarz.
- Matrice des projections orthogonales sur un hyperplan.

♮ Convergence de la méthode de Kacmarz.

- Complexité de la méthode de Kacmarz.

4. Recherche de valeurs propres et de vecteurs propres.

- Mise en place [All05] p.442.

4.1 Localisation des valeurs propres.

- Mise en place [FGN09a] p.72.
- Disques de Gershgörin [FGN10a] p.72.
- Théorème de Sturm [FGN01] p.238.

4.2 Méthode de la puissance.

- Algorithme de la méthode de la puissance [All05] p.443.
- Convergence de l'algorithme de la puissance dans le cas des matrices symétriques réelles [All05] p.443.
- Algorithme de la méthode de la puissance inverse [All05] p.443.
- Convergence de l'algorithme de la puissance inverse dans le cas des matrices symétriques réelles [All05] p.443.

4.3 Méthode de Givens-Householder.

- Lemme de Householder [All05] p.445.
- Valeurs propres des matrices tridiagonales [All05] p.446.
- Changement de signe et racines des matrices tridiagonales [All05] p.447.
- Algorithme de bissection de Givens [All05] p.448.

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

Leçon 234

Espaces L^P, $1 \leq p \leq \infty$.

Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

Remarques du jury

Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p > q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (exemple $L^1 \star L^1$). Par ailleurs, les espaces associés à la mesure de décompte sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux.

Remarques

1. Parler des l^p peut être une bonne chose mais pas la peine d'en mettre trop non plus.
2. Penser à la topologie des espaces L^p : théorème de Grothendieck sur les fermés, théorème de Fréchet-Kolmogorov sur les parties relativement compactes.
3. Le théorème de Riesz-Fischer est un bon développement.
4. Mettre des exemples avec la mesure de Lebesgue.
5. L'inégalité de Hardy peut-être une bonne illustration.

Exercices et questions

1. Peut-on métriser la convergence en probabilité ?

   Réponse : On peut métriser la convergence en probabilité avec la distance
   $$d(X,Y) = \mathbb{E}\left(1 \wedge |X-Y|\right).$$
2. Si $1 \leq p \leq q$ et μ est finie, montrer que l'inclusion $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ est topologique.

   Réponse : C'est immédiat avec l'inégalité de Hölder.
3. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

   Réponse : Soit μ un mesure de probabilité. Avec la question précédente, $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}$ soit $\limsup \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}$. Soit à présent $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble
   $$A_\varepsilon = \{x : |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\}.$$
   Par définition de sup essentiel, $\mu(A) > 0$. Alors :
   $$\int |f|^p \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} |f|^p \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\right)^p \, d\mu = \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\right)^p \mu(A_\varepsilon)$$
   et on en déduit que $\|f\|_{L^p} \geq \mu(A_\varepsilon)^{1/p}\left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\right)$ puis $\liminf |f|_{L^p} \geq \left(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\right)$. On fait alors tendre ε vers 0 pour obtenir le résultat.

Squelette du plan

On se place sur un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

1. Construction des $L^p(\mu)$.
   - 1.1 Les espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$.
     - Définitions des $\mathcal{L}^p(\mu)$ [BP12] p.153 et p.171 pour le sup essentiel ou [Bre05] p.55-56.
     - Propriété d'espace vectoriel [BP12] p.153 ou [Bre05] p.57.
     - Inégalité de Hölder [BP12] p.154 ou [Bre05] p.56.
     - Inégalité de Minkowski [BP12] p.158 ou [Bre05] p.57.
   - 1.2 Les $L^p(\mu)$ comme espaces vectoriels normés.

- Définition de $L^p(\mu)$ comme quotient de $\mathcal{L}^p$ par l'ensemble des fonctions nulles presque partout [BP12] p.161.
- Propriété d'espace vectoriel normé [BP12] p.161.
- Si la mesure μ est finie, on a une inclusion topologique entre les $L^p(\mu)$ [BP12] p.154. De plus, $\lim \|f\|_p = \|f\|_\infty$ dans la cas d'une mesure de probabilité. En règle générale, les L^p ne sont pas ordonnés pour l'inclusion.
- Introduction des espaces l^p avec la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et inclusion entre les l^p [BP12] p.154.

1.3 Dualité.

- Théorème de représentation de Riesz pour les $L^p(\mu)$ avec $1 < p < \infty$ [Bre05] p.61.
- Théorème de représentation de Riesz pour $L^1(\mu)$ [Bre05] p.63.
- Le dual de $L^\infty(\mu)$ contient strictement $L^1(\mu)$ [Bre05] p.65.
- Remarque : on aura une application de ce résultat avec le théorème de Rademacher.

2. Complétude des espaces L^p - Résultats de convergence.

2.1 Théorème de complétude.

- Théorème de Riesz-Fischer : complétude des $L^p(\mu)$ et lien entre convergence L^p et convergence presque partout [BP12] p.162 et p.172 pour $L^\infty(\mu)$ ou [Bre05] p.57 ou [Far06b] p.46.
- ⋆ Exemple de convergence $L^p(\mu)$ mais non presque partout [BP12] p.164.
- Théorème de convergence L^p- dominée [BP12] p.165.

2.2 Convergence dans les espaces de probabilité.

- Faire le lien avec le théorème de Riesz-Fisher.
- Théorème de Vitali reliant convergence en probabilité et convergence L^p [Ouv00] p.96.
- Convergence presque sure des martingales : surmartingales positives, bornées dans L^1 [MPB98] p.30.
- Une martingale converge dans L^1 si et seulement si elle est fermée [MPB98] p.32.
- ⋆ Contre exemple d'une martingale bornée dans L^1 qui ne converge pas dans L^1 [Ouv00] p.375.
- Convergence des martingales bornées dans les $L^p(\mu)$ presque-sûrement et dans les $L^p(\mu)$ pour $1 < p \leq \infty$ [MPB98] p.32.

3. Densité dans les espaces L^p.

3.1 Séparabilité.

- Densité des fonctions en escalier intégrables dans les $L^p(\mu)$ quand $1 \leq p < +\infty$ et densité des fonctions en escalier positives dans $L^\infty(\mu)$ [BP12] p.165 et p.173 ou [HL09] p.126.
- L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans les L^p pour $1 \leq p < \infty$ [Bre05] p.61.
- $L^p(\lambda)$ est séparable si $1 \leq p < \infty$ [BP12] p.173 ou [Bre05] p.61.
- $L^\infty(\lambda)$ n'est pas séparable [Bre05] p.66.

3.1 Notion de convolution.

- Définition de la convolution [HL09] p.148 ou [Bre05] p.66.
- Propriété d'uniforme continuité associativité et caractère borné [HL09] p.148 et [Bre05] p.67.
- Support du produit de convolution [Bre05] p.68.
- Régularité du produit de convolution [Bre05] p.69.
- Inégalité de Young [HL09] p.149.

3.2 Suites régularisantes.

- Définition de suite régularisante [HL09] p.152 ou [Bre05] p.70.
- L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}_0^\infty$ est dense dans $L^p(\lambda)$ pour $1 \leq p < \infty$ [HL09] p.152 ou [Bre05] p.71.
- Application : Inégalité de Hardy [BP12] p.185.
- ♮ Théorème de Rademacher.

4. Le cas particulier de $L^2(\mu)$.

4.1 Structure hilbertienne.

- Introduction du produit scalaire sur $L^2(\mu)$ [Bre05] p.78 ou [BP12] p.175.
- ♮ Etude de l'espace de Bergman.
- Faire le lien avec le théorème de représentation de Riesz [Bre05] p.81 ou [BP12] p.176.
- Théorème de projection sur un convexe fermé [Bre05] p.79 [BP12] p.175.
- ♮ Théorème de Grothendieck [Zav13] p.180 et [Rud73] p.111.

4.2 Séries de Fourier.

- Coefficients de Fourier [Far06b] p.148.
- Base hilbertienne (e_n) [Far06b] p.148 et p.150.
- Convergence en norme L^2 et formule de Parseval [Far06b] p.150.
- ⋆ Calcul de $\zeta(2)$ [Far06b] p.151.
- Convergence uniforme dans le cas où la fonction est continue et la série de ses coefficients de Fourier converge absolument [Far06b] p.152.
- Remarque : le résultat précédent s'applique pour les fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux [Far06b] p.153.

4.3 Transformée de Fourier.

- Transformée de Fourier pour les fonctions L^1 [Far06b] p.130 ou [Zui02] p.119.
- Transformée de Fourier d'une convolée [Far06b] p.131.
- Formule d'inversion [Far06b] p.133.
- Formule de Plancherel [BP12] p.313 [Far06b] p.136.
- Théorème de Plancherel [BP12] p.314 ou [Far06b] p.137.

4.4 L'espace de Sobolev $H^1(0,1)$.

- Introduction de l'espace $H^1(0,1)$ [Bre05] p.120.
- Caractère espace de Hilbert séparable [Bre05] p.121.
- Existence d'un unique représentant continu [Bre05] p.121.

Développements

1. Espace de Bergman.
2. Théorème de Grothendieck.
3. Théorème de Rademacher.

Leçon 235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Professeur encadrant : Dimitri Yafaev.

Exercices et questions

1. Etudier la convergence de l'intégrale
$$\int_0^\infty \left(e^{-a/x^2} - e^{-b/x^2}\right) dx.$$
Réponse : L'intégrale converge, c'est immédiat avec un développement limité.

2. Etudier la convergence de l'intégrale
$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$
Réponse : Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue et si $0 < \alpha \leq 1$, il y a convergence (par intégration par parties) mais pas convergence absolue (sinon, une intégrale de Riemann divergente convergerait).

3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose f dérivable en 0 et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ intégrable sur $[1, +\infty[$. Que dire de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \,?$$
Réponse : *cf* [FGN10b] p.192. Cette intégrale est convergente et vaut
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Squelette du plan

1. Interversions limites - intégrales.

   1.1 Théorème de convergence dominée.

   - Théorème de convergence monotone [BP12] p.131.
   - Lemme de Fatou [BP12] p.132.
   - Théorème de convergence dominée [Far06b] p.17 ou [BP12] p.134.
   - ♮ Formule des compléments [AM03] p.249.
   - Remarque : les théorèmes d'interversion dans le cas où on intègre sur un compact deviennent alors évident [Pom94] p.187.
   - ⋆ $f_n : x \mapsto n^2 x\, \mathbf{1}_{[0,1/n]}(x) + (2n - n^2 x)\, \mathbf{1}_{]1/n,2/n[}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle mais la suite des intégrales ne converge pas vers 0 (mettre le dessin) [Hau07] p.244.
   - Interversion somme et intégrale [Far06b] p.17 ou [BP12] p.137.
   - ♮ Etude de l'espace de Bergman [AM03] p.122.
   - Application : théorème de Borel-Cantelli [BP12] p.137.

   1.2 Etude des intégrales à paramètres.

   - Mise en place : on considère un espace mesuré et on veut étudier une intégrale à paramètre. Introduction des notations f et F.
   - Théorème de continuité [Far06b] p.93 ou [BP12] p.138.
   - ⋆ $f : (x, t) \mapsto xe^{-xt}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$ mais F n'est pas continue en 0 [Hau07] p.224.
   - Théorème de dérivation [Far06b] p.94 ou [BP12] p.141.

- Remarque : on étend ce résultat à $\mathbb{R}^n$ [SR08] p.185.

⋆ $f : (x,t) \mapsto x^2 e^{-t|x|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mais F n'est pas dérivable en 0 [Hau07] p.226.

- Théorème d'holomorphie [Far06b] p.95.
- Un théorème d'analyticité sur $\mathbb{R}$ analogue au théorème d'holomorphie est faux comme le montre l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\lambda x)}{1+x^2} dx = e^{-|\lambda|}$ [Far06b] p.96.

1.3 Application aux intégrales de Fourier.

- Mise en place : on considère un certain type d'intégrale [Far06b] p.105.
- Lemme de Riemann-Lebesgue [Far06b] p.106.
- Généralisation aux intégrales de Riemann [Far06b] p.106.

2. Interversions limites - limites.

2.1 Le cas des suites et des séries de fonctions.

- Préservation de la continuité par limite uniforme [Pom94] p.187.

⋆ $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction discontinue [Hau07] p.231.

- Interversion de limite dans le cas de la convergence uniforme de fonctions [Pom94] p.188.

⋆ $f_n : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$ a pour limite $\dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$ alors que sa limite simple a pour limite 0 en $+\infty$.

- Préservation du caractère $\mathcal{C}^1$ pour une limite de fonctions dont la suite des dérivées converge uniformément [Pom94] p.189.

⋆ La suite $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers $|x|$, donc une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ peut ne pas être dérivable [Pom94] p.188.

- On applique les résultats de la partie précédente aux séries de fonctions.
- Préservation de la continuité par limite uniforme [Pom94] p.189.

⋆ La série de terme général $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers une fonction discontinue et même non bornée [Hau07] p.258.

- Interversion de limite dans le cas de la convergence uniforme d'une série de fonctions [Pom94] p.190.

⋆ $f_n : x \mapsto (x-n+1)\mathbf{1}_{n-1\leq x<n} + (n+1-x)\mathbf{1}_{n\leq x<n+1}$ est continue, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ mais on ne peut pas intervertir les limites en n et en $+\infty$ [Hau07] p.259.

- Préservation du caractère $\mathcal{C}^1$ pour une limite uniforme de série de fonctions dont la série des dérivées converge uniformément [Pom94] p.191.
- Extension du résultat précédent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

♮ Equation de la chaleur [ZQ95] p.105.

2.2 Le cas particulier des séries entières.

- Théorème d'Abel-Dirichlet [Gou08] p.252.

⋆ Contre-exemple : $\sum(-1)^n z^n$ a pour rayon de convergence 1, sa somme vaut $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ en 1 mais la série $\sum(-1)^n$ diverge [FGN09b] p.220.

- Applications : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [FGN09b] p.180.

♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [Gou08] p.289.

2.3 Interversion et calcul différentiel.

- Lemme de Schwarz [Rom04] p.172 ou [SR08] p.206.

- ⋆ La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ car ne vérifie pas l'égalité des dérivées partielles croisées en $(0,0)$ [Hau07] p.280.
- • Suite des fonctions différentiables [SR08] p.184.

3. Interversion intégrales - intégrales.

3.1 Théorème de Fubini.

- • Théorème de Fubini-Tonelli [Far06b] p.61 ou [BP12] p.221.
- ⋆ Intégrale de Gauss [Gou08] p.335.
- ⋆ Moyenne d'une variable aléatoire gaussienne.
- • Théorème de Fubini [Far06b] p.59 ou [BP12] p.222.
- ⋆ $f : (x,y) \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ est borélienne non intégrable et les intégrales interverties donnent deux résultats différents [BP12] p.223.
- ⋆ Adjoints des opérateurs à noyaux [HL09] p.98.

3.2 Application aux séries doubles.

- • Théorème de Fubini pour les séries doubles [BP12] p.226 ou [Far06b] p.62.
- ⋆ L'interversion des sommes pour la suite double $u_{n,p} = 1\,\mathbf{1}_{n=p} - \frac{1}{2^{p-n}}\,\mathbf{1}_{n<p}$ donne deux résultats différents [Hau07] p.125.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Formule des compléments.
4. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Remarques du Jury

Dans cette leçon, il est souhaitable de présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples. On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ ne devrait pas poser de problèmes insurmontables.

Remarques

1. Ne pas oublier de préciser f mesurable quand c'est nécessaire.
2. Eviter de mettre les règles de Bioche.

Exercices et questions

1. Calcul de l'intégrale
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx.$$
Réponse : Il faut se souvenir de ses formules de trigo pour trouver $\dfrac{3\pi \ln \sqrt{2}}{4}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue de moyenne nulle. On note α et β respectivement le minimum et le maximum de f sur $[0,1]$. Montrer que
$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \leq -\alpha\beta.$$
Réponse : Il suffit de remarquer que $(f-\alpha)(\beta-f)$ est positif, de développer puis d'intégrer.
3. Soit f une fonction positive décroissante sur $\mathbb{R}_+$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0.$$
Réponse : Comme f est intégrale, on peut utiliser un critère de Cauchy et considérer l'intégrale de f en entre $x/2$ et x. La décroissance de f donne ensuite le résultat.

Squelette du plan

On se fixe un espace mesuré. Toutes les fonctions considérées seront au moins mesurables et on manipulera des fonctions intégrables ou localement intégrables.

1. Méthodes directes.

   1.1 Pour une fonction d'une variable réelle.

   - Utilisation d'une primitive [BP12] p.137.
   - ⋆ N'importe quelle primitive fait l'affaire ici.
   - Théorème du changement de variable [BP12] p.25 [Gou08] p.123.
   - ⋆ Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ [Gou08] p.174.
   - ⋆ Intégrales abéliennes [Gou08] p.139.
   - Intégration par parties [BP12] p.25 ou [Gou08] p.123.
   - ⋆ Intégrales de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$ [Gou08] p.126.

- ⋆ Une primitive de arctan est $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ [BP12] p.25.

1.2 Pour une fonction de plusieurs variables réelles.

- • Théorème de Fubini [BP12] p.221 et p.222.
- ⋆ Variables séparables.
- • Application : Formule d'intégration par parties généralisée [BP12] p.224.
- • Théorème de changement de variable [BP12] p.239.
- ⋆ Intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ [Gou08] p.245 ou [Gou08] p.335.
- ⋆ Calcul du volume de la boule unité [BP12] p.246.

2. Méthodes impliquant l'étude d'une fonction ou d'une suite.

2.1 Suites et séries de fonctions.

- • Théorème de convergence dominée [BP12] p.134.
- ⋆ Calcul de $\int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx$ [Far06b] p.21.
- • Théorème d'interversion série intégrale [Gou08] p.223.
- ⋆ Calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ en introduisant une suite de fonctions [FGN10b] p.212.

2.2 Intégrales à paramètre.

- • Théorème de continuité sous le signe intégral [BP12] p.138.
- • Théorème de dérivation sous le signe intégral [BP12] p.141.
- ⋆ Intégrale de Dirichlet $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ [FGN10b] p.214.
- ♮ Solution élémentaire de l'opérateur de Schrodinger [Bon01] p.187 et [Zui02] p.109 et p.115.

2.3 Utilisation de la variable complexe.

- • Théorème de Cauchy [AM03] p.190.
- ⋆ Intégrale de Fresnel $\int_{\mathbb{R}} e^{ix^2}\,dx$ [FGN10b] p.223.
- • Théorème des résidus [AM03] p.240.
- ♮ Formule des compléments pour prolonger la fonction ζ [AM03] p.249.

3. Méthode de calcul par transformée de Fourier.

3.1 Notion de transformée de Fourier.

- • Transformée de Fourier d'une fonction L^1 [Far06b] p.130.
- ⋆ La transformée de Fourier de la fonction $f : t \mapsto e^{-\alpha x^2}$ est $\widehat{f} : t \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\alpha}\right)$ [Far06b] p.130.
- • Formule d'inversion dans le cas où la transformée de Fourier est intégrable [Far06b] p.133.
- ⋆ $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)^{2\alpha}}\,dt = 2^{2-2\alpha}\pi\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}$ [Far06b] p.144.
- • Transformée de Fourier et produit de convolution [Far06b] p.131.

3.2 Prolongement aux fonction de carré intégrable.

- • Formule de Plancherel [BP12] p.313 ou [Far06b] p.136.
- • Inégalité de Hadamard [CLFM95] p.203.
- • Théorème de Plancherel [BP12] p.314 ou [Far06b] p.137.
- ⋆ $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$ [BP12] p.316 et p.355.

4. Méthodes approchées.

   4.1 Sommes de Riemann.

   - Définition de la somme de Riemann pour une subdivision pointée [BP12] p.26 ou [Gou08] p.124.
   - Théorème sur les sommes de Riemann [BP12] p.26 ou [Gou08] p.124.
   - ⋆ Calcul de $\int_0^{\pi} \ln(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)\, d\theta$ [Gou08] p.179.
   - Précisions sur la méthode quand la fonction considérée a une certaine régularité [FGN09b] p.36.

   4.2 Méthode de Monte-Carlo.

   - Présentation de la méthode : on cherche à calculer l'intégrale $\int f(x)g(x)\, dx$ où f est une densité de probabilité. On interprète la quantité comme une espérance que l'on approche par la réalisation de n variables aléatoires indépendantes grâce à la loi des grands nombres [Tou99] p.79.
   - Intervalle de confiance de l'intégrale à calculer grâce au théorème central limite. Distinguer les cas où on connait la variance de celui où on ne la connait pas et qui nécessite le lemme de Slutsky [Tou99] p.80.

Développements

1. Equation de Schrodinger.
2. Formule des compléments.

Leçon 239

Fonctions définies par une intégrales dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Adrien Fontaine.

Remarques du Jury

Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace, ...) relèvent aussi de cette leçon.

Squelette du plan

1. Régularité et comportement des intégrales à paramètre.
   1.1 Continuité sous le signe intégral.
   - Théorème de continuité sous le signe intégral [BP12] p.140.
   - ⋆ $f : (x,t) \mapsto xe^{-xt}$ donne naissance à une fonction non continue [Hau07] p.224.
   - ⋆ $\forall a, b > 0 : \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$ [FGN10b] p.189.

   1.2 Dérivation sous le signe intégral.
   - Théorème de dérivation sous le signe intégral [BP12] p.144.
   - ⋆ $f : (x,t) \mapsto x^2 e^{-t|x|}$ donne naissance à une fonction non dérivable en 0 [Hau07] p.226.
   - ⋆ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ [FGN10b] p.214.

   1.3 Holomorphie sous le signe intégral.
   - Théorème d'holomorphie sous le signe intégral.
   - ⋆ Fonction Γ d'Euler [AM03] p.95.
   - ⋆ Prolongement méromorphe de la fonction Γ [AM03] p.148.
   - ⋆ $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(z) \underset{z \to -n}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n!} \dfrac{1}{z+n}$ [AM03] p.148.

   1.4 Comportement asymptotique.
   - Méthode de Laplace [Gou08] p.161.
   - ♮ Equivalents d'intégrales par la méthode de Laplace [ZQ95] p.338 ou [Gou08] p.161.
   - ⋆ Formule de Stirling [ZQ95] p.340 ou [Gou08] p.162.
   - ⋆ $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{-\alpha x} t^x \, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}\, t^{1/(2\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{e}\right)$ [Gou08] p.167.
   - ⋆ $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x) x^t \, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^{t+2}}{t^2}$ [Gou08] p.167.
   - ⋆ $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - tx\right) dx \underset{t \to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{1-\alpha}}\, t^{\frac{\alpha-2}{2(1-\alpha)}} \exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} t^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)$ [Gou08] p.168.
   - Explications sur la phase stationnaire [Gou08] p.170.
2. Notion de convolution.
   2.1 Convolution des fonctions.
   - Fonctions convolables [HL09] p.149.
   - Le produit de convolution est symétrique [HL09] p.149.
   - Support d'un produit de convolution [HL09] p.149.
   - Inégalité de Young [HL09] p.149.
   - Associativité du produit de convolution [HL09] p.151.

- Structure d'algèbre commutative non unitaire pour $L^1(\mathbb{R}^n)$ [HL09] p.151.

2.2 Régularité du produit de convolution et densité.
- Régularité du produit de convolution pour les fonctions [Zui02] p.16.
- Approximation de l'unité [Zui02] p.16.
- Convolution et convergence [HL09] p.152 ou [BP12] p.305.
- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$ et dans $L^p(\Omega)$ [BP12] p.308 ou [Zui02] p.17.
- Noyau de Dirichlet et fonctions périodiques [Gou08] p.286.
- Noyau de Féjer et fonctions périodiques [Gou08] p.286.
- Théorème de Féjer [Far06b] p.157 et [Gou08] p.286.

3. Transformées de Fourier et de Laplace.

3.1 Transformée de Fourier des fonctions intégrables.
- Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ [Far06b] p.130.
- ⋆ Transformées de Fourier de fonctions intégrables [Far06b] p.130.
- Transformation de Fourier et intégration [Zui02] p.111.
- ⋆ Equation de la chaleur dans l'espace entier [DM09] p.65.
- Transformée de Fourier et convolution [Far06b] p.131.
- Transformée de Fourier inverse [Far06b] p.133.
- ⋆ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = 2^{2-2\alpha}\pi\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}$ [Far06b] p.144.
- Injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ [Far06b] p.133.
- ⋆ Densité des polynômes orthogonaux [BMP04] p.140.
- ⋆ Si $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, alors f est nulle.
- Calcul d'une transformée de Fourier par méthode des résidus [AM03] p.249.
- ⋆ $\forall x \in \mathbb{R} : \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ [AM03] p.249.

3.2 Espace de Schwartz et transformée de Fourier.
- Transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.108.
- ⋆ Transformée de Fourier d'une gaussienne [Zui02] p.108.
- La transformation de Fourier est bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.109.
- Formule sommatoire de Poisson [Gou08] p.272.
- ⋆ $\forall s > 0 : \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/s}$ [Gou08] p.273.
- Transformée de Fourier d'une distribution tempérée [Zui02] p.114.
- La transformation de Fourier est bijective bicontinue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.114.
- Propriétés de la transformation de Fourier [Zui02] p.114.
- ♮ Equation de Schrodinger [Bon01] p.187 et [Zui02] p.109 et p.115.

3.3 Transformée de Laplace.
- Transformée de Laplace d'une fonction localement intégrable [AM03] p.114.
- Abscisse de convergence absolue [AM03] p.114.
- Abscisse de convergence [AM03] p.114.
- La transformée de Laplace se prolonge de façon holomorphe [AM03] p.114.
- Injectivité de la transformée de Laplace [Pom94] p.179.

Développements

1. Equation de Schrodinger.
2. Méthode de Laplace.

Leçon 240

Produit de convolution, Transformation de Fourier. Applications.

Professeur encadrant : Christophe Cheverry.

Remarques du Jury

Cette leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définition et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales.
La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 ainsi que les inégalités de Young sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier paraissent nécessaires.
Les candidats solides peuvent aborder ici la résolution de l'équation de la chaleur, de Schrödinger pour des fonctions assez régulières, ou la détermination des solutions élémentaires du Laplacien ou de l'opérateur $k^2 - \frac{d^2}{dx^2}$.
La transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées trouvent leur place ici mais sont réservées aux candidats aguerris. On peut aussi considérer l'extension de la transformée de Fourier à la variable complexe, riche d'applications par exemple dans la direction du théorème de Paley-Wiener.

Squelette du plan

1. Le produit de convolution.
   1.1 Convolution des fonctions et des distributions.
   - Fonctions convolables [HL09] p.149.
   - Le produit de convolution est symétrique [HL09] p.149.
   - Support d'un produit de convolution [HL09] p.149.
   - Inégalité de Young [HL09] p.149.
   - Associativité du produit de convolution [HL09] p.151.
   - Structure d'algèbre commutative non unitaire pour $L^1(\mathbb{R}^n)$ [HL09] p.151.
   - Produit de convolution d'une distribution par une distribution à support compact [Zui02] p.68.
   - Support du produit de convolution pour les distributions [Zui02] p.69.
   - Le produit de convolution pour les distributions est symétrique et δ_0 est un neutre [Zui02] p.68.
   - Produit de convolution des distributions et dérivation [Zui02] p.68.
   - Associativité du produit de convolution pour les distributions [Zui02] p.69.

   1.2 Régularité du produit de convolution et densité.
   - Régularité du produit de convolution pour les fonctions [Zui02] p.16.
   - Approximation de l'unité [Zui02] p.16.
   - Convolution et convergence [HL09] p.152 ou [BP12] p.305.
   - $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}^k(\Omega)$ et dans $L^p(\Omega)$ [Zui02] p.17.
   - $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.108.
   - $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ [Zui02] p.71.
   - Noyau de Dirichlet et fonctions périodiques [Gou08] p.286.

- Noyau de Féjer et fonctions périodiques [Gou08] p.286.
- Théorème de Féjer [Far06b] p.157 et [Gou08] p.286.

1.3 Convolution des mesures bornées.

- Convolution de deux mesures bornées [Ouv00] p.61.
- Loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes [Ouv00] p.61.
- Densité d'une somme de variables aléatoires indépendantes [Ouv00] p.62.

⋆ La somme de deux lois Gamma indépendantes est une loi Gamma [Ouv00] p.62.

2. Transformée de Fourier.

2.1 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- Transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.108.

⋆ Transformée de Fourier d'une gaussienne [Zui02] p.108.

- La transformation de Fourier est bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.109.
- Transformation de Fourier et intégration [Zui02] p.111.
- Transformation de Fourier et convolution, produit, dérivation [Zui02] p.111.
- La transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.
- Formule sommatoire de Poisson [Gou08] p.272.

⋆ $\forall s > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/s}$ [Gou08] p.273.

2.2 Transformée de Fourier des distributions tempérées.

- Transformée de Fourier d'une distribution tempérée [Zui02] p.114.
- La transformation de Fourier est bijective bicontinue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.114.
- Propriétés de la transformation de Fourier [Zui02] p.114.

⋆ Transformée de Fourier d'un Dirac et d'une constante [Zui02] p.115.

⋆ Transformée de Fourier du peigne de Dirac.

⋆ Transformée de Fourier d'une gaussienne [Zui02] p.115.

♮ Transformée de Fourier de VP $\left(\frac{1}{x}\right)$ et de H [Zui02] p.117.

- Transformation de Fourier des distributions à support compact [Zui02] p.117.
- Transformée de Fourier et convolution [Zui02] p.120.

⋆ Transformée de Fourier de la mesure de surface de $\mathbb{S}^2$ [Zui02] p.118.

- Cas particulier : transformée de Fourier d'une mesure bornée [Ouv00] p.191.
- Fonction caractéristique d'une loi [Ouv00] p.191.

⋆ Fonction caractéristique d'une loi normale.

- Fonction caractéristique et indépendance [Ouv00] p.202.

2.3 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$.

- Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ [Far06b] p.130.

⋆ Transformées de Fourier de fonctions intégrables [Far06b] p.130.

- Fonction caractéristique de variable aléatoire à densité [Ouv00] p.193.
- Transformée de Fourier et convolution [Far06b] p.131.
- Transformée de Fourier inverse [Far06b] p.133.

⋆ $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha}} = 2^{2-2\alpha}\pi \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}$ [Far06b] p.144.

- Injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ [Far06b] p.133.

- ⋆ Densité des polynômes orthogonaux [BMP04] p.140.
- • Théorème de Plancherel [Far06b] p.137.
- ⋆ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$ [BP12] p.316 et p.355.

3. Résolution de l'équation de Schrodinger.

- • Opérateur de Schrodinger [Zui02] p.152.
- • Solution élémentaire de l'opérateur de Schrodinger [Bon01] p.187 et [Zui02] p.109 et p.115.
- ♮ Problème de Cauchy avec donnée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.152.
- • Problème de Cauchy avec donnée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.154.
- • Forme de la solution [Zui02] p.155.
- • Propagation à vitesse infinie [Zui02] p.157.
- • Décroissance à l'infini de la solution [Zui02] p.157.

Développements

1. Equation de Schrodinger.
2. Etude de VP $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Leçon 241

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Professeur encadrant : Nicolleta Tchou

Remarques du jury

Une fois les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, série de Fourier. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de Dirichlet.

Exercice

Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est elle-même une fonction polynomiale.

Réponse : Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. D'après le critère de Cauchy, il existe un entier N tel que pour tous $m \geq N$ et $n \geq N$,

$$\|P_n - P_m\|_\infty \leq 1.$$

Or, un polynôme borné sur un intervalle non borné est constant donc pour tout $n \geq N$, $P_n = P_N + a_n$, où a_n est un réel. En appliquant de nouveau le critère de Cauchy à la suite (P_n), il vient que la suite (a_n) est de Cauchy et donc (P_n) converge vers le polynôme $P_N + \lim a_n$.

Squelette du plan

1. Convergence des suites et séries de fonctions

   1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions.

   - Convergence simple d'une suite de fonctions d'un ensemble dans un espace métrique [Pom94] p.164.
   - ⋆ $f_n : x \mapsto \min\left(\frac{1}{x}, n\right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \frac{1}{x}$ [Hau07] p.234.
   - Convergence uniforme d'une suite de fonctions d'un ensemble dans un espace métrique [Pom94] p.164.
   - ⋆ $f_n : x \mapsto x\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x$ [Hau07] p.238.
   - ⋆ $f_n : x \mapsto \frac{x}{x+n}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle mais ne converge pas uniformément [Pom94] p.167.
   - Pour les suites de fonctions lipschitziennes sur un compact, la convergence simple et la convergence uniforme sont équivalentes. Il en est de même sur $\mathbb{R}_n[X]$ [FGN09b] p.160 et [Pom94] p.170.
   - Théorème de Dini [FGN09b] p.156.
   - Application : $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $x \mapsto e^{-x}$ [Pom94] p.168.
   - Deuxième théorème de Dini [FGN09b] p.156.
   - Critère de Cauchy pour les suites de fonctions à valeurs dans un espace complet [Pom94] p.169.
   - Application : la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes est nécessairement un polynôme [Pom94] p.178.

   1.2 Le cas des séries de fonctions.

   - L'espace d'arrivé est ici un espace vectoriel normé.

- Convergence simple et uniforme des séries de fonctions [Pom94] p.170.
- Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si son reste converge uniformément vers 0 [Pom94] p.170.
- Critère de Cauchy pour les séries de fonctions [Pom94] p.171.
- Convergence normale [Pom94] p.172.
- La convergence normale implique la convergence uniforme [Pom94] p.172.

⋆ La série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto (-1)^n \sin(\sin(\ldots(\sin(x))\ldots))$ avec n itérations de sin converge uniformément mais pas normalement sur $\mathbb{R}$ [FGN09b] p.97.

1.3 Régularité des fonctions limites.

- La continuité et la dérivabilité sont des notions locales, la convergence sur tout compact suffisent dans les théorèmes qui suivent.
- La convergence uniforme conserve le caractère continue [Pom94] p.187.

⋆ $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonctions discontinue [Hau07] p.231.

- La convergence uniforme des dérivées conserve le caractère $\mathcal{C}^k$ [Pom94] p.189.

⋆ $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers une fonction qui n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ [Hau07] p.241.

- Les théorèmes précédents s'adaptent aux séries [Pom94] p.189.

♮ Equation de la chaleur [ZQ95] p.105.

- Théorème de Borel [Rou09] p.359.

2. Séries entières et séries de Fourier.

- Mise en place : on illustre les notions introduites au paragraphe précédent.

2.1 Séries entières et cercle d'incertitude.

- Lemme d'Abel [Pom94] p.215 ou [Gou08] p.236.
- Définition du rayon de convergence d'une série entière [Pom94] p.215.
- Convergence normale sur les compacts du disque de convergence [Pom94] p.216.
- Théorème d'Abel-Dirichlet [Gou08] p.252.

⋆ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [FGN09b] p.180.

- Application : Existence du produit de Cauchy de deux série convergente ainsi que leur produit de Cauchy [Pom94] p.234.

♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.289.

2.2 Convergence des séries de Fourier.

- Coefficients de Fourier [Far06b] p.148.
- Base hilbertienne (e_n) [Far06b] p.148.
- Convergence dans le cas d'une fonction continue dont la série des coefficients de Fourier converge absolument [Far06b] p.152.
- Remarque : le théorème précédent s'applique pour les fonctions continues $\mathcal{C}^1$ par morceaux [Far06b] p.153.
- Théorème de Dirichlet [Far06b] p.135.

3. Convergences en théorie de la mesure.

3.1 Convergence dans les espaces L^p.

- Convergence presque-sûre [Ouv00] p.87.
- Théorème de Riesz-Fischer : complétude des $L^p(\mu)$ et lien entre convergence L^p et convergence presque partout [BP12] p.162 et p.172 pour $L^\infty(\mu)$ ou [Bre05] p.57 ou [Far06b] p.46.

- ⋆ Exemple de convergence $L^p(\mu)$ mais non presque partout [BP12] p.164.
- • Théorème de convergence L^p- dominée [BP12] p.165.

3.2 Théorèmes d'interversion.

- • Théorème de convergence monotone [BP12] p.131.
- • Lemme de Fatou [BP12] p.132.
- • Théorème de convergence dominée [Far06b] p.17 ou [BP12] p.134.
- • Remarque : les théorèmes d'interversion dans le cas où on intègre sur un compact deviennent alors évident [Pom94] p.187.
- ⋆ $f_n : x \mapsto n^2 x\, \mathbf{1}_{[0,1/n]}(x) + (2n - n^2 x)\, \mathbf{1}_{]1/n,2/n[}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle mais la suite des intégrales ne converge pas vers 0 (mettre le dessin) [Hau07] p.244.
- • Interversion somme et intégrale [Far06b] p.17 ou [BP12] p.137.

3.3 Convergences probabilistes.

- ♮ Inégalité de Hoeffding [Ouv00] p.129.
- • Convergence en probabilité [Ouv00] p.87.
- • Théorème de Vitali [Ouv00] p.96.
- ⋆ X_n de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_0$ converge en probabilité vers 0 mais pas en norme L^1 [Ouv00] p.98.
- • Convergence en loi [Ouv00] p.303.
- • La convergence en loi implique la convergence en probabilités.
- ⋆ $X_n = X$ de loi $b\left(\frac{1}{2}\right)$ converge en loi vers $1 - X$ mais pas en probabilité [Ouv00] p.306.
- • Schéma récapitulatif en annexe.
- • Convergence presque sûre des martingales : surmartingales positives, bornées dans L^1 [MPB98] p.30.
- • Une martingale converge dans L^1 si et seulement si elle est fermée [MPB98] p.32.
- ⋆ Contre exemple d'une martingale bornée dans L^1 qui ne converge pas dans L^1 [Ouv00] p.375.
- • Convergence des martingales bornées dans les $L^p(\mu)$ presque-sûrement et dans les $L^p(\mu)$ pour $1 < p \leq \infty$ [MPB98] p.32.

4. Convergence des fonctions holomorphes et méromorphes.

- • Théorème de Weierstrass [SR08] p.284 ou [AM03] p.91.
- ⋆ Fonction ζ de Riemann [AM03] p.91.
- • Convergence uniforme sur tout compact des séries de fonctions méromorphes [SR08] p.323.
- ⋆ $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ [SR08] p.324.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Inégalité de Hoeffding.
3. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 243

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Remarques du jury

Le théorème d'Abel (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Il est regrettable de voir beaucoup de candidats qui maîtrisent raisonnablement les classiques du comportement au bord du disque de convergence traiter cette leçon en faisant l'impasse sur la variable complexe. C'est se priver de beaux exemples d'applications ainsi que du théorème de composition, pénible à faire dans le cadre purement analytique et d'ailleurs très peu abordé. Le jury attend aussi que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série.

Remarques

1. Le lien entre holomorphie et analyticité est indispensable.
2. Parler de la composition au travers de la variable complexe.

Exercices et questions

1. On considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}.$$
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est développable en série entière sur $]-1,1[$:
$$\forall x \in]-1,1[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$
Cependant, le rayon de cette série entière est 1 (critère de d'Alembert), expliquer ce phénomène.

   Réponse : On prolonge f à $\mathbb{C}$. Alors n'est pas définie en i ni en $-i$ donc le rayon de convergence de son développement en série entière au voisinage de 0 ne peut peut pas être supérieur à 1.

2. Soit f la somme d'une série entière définie sur un disque centré en 0. On suppose que 0 est un point d'accumulation de zéros de f. Montrer que f est nulle.

   Réponse : Par l'absurde, on met en facteur le plus petit coefficient non nul dans la série qui définit f et on obtient une contradiction en mettant également en facteur la puissance de z correspondante et en regardant ce qui se passe au niveau de la suite des zéros de f qui converge vers 0. On remarque que la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin\left(\frac{1}{1-z}\right) \end{array}$$
a des zéros qui s'accumulent vers un point du cercle de convergence.

3. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{n\sin(n)} z^n$.

   Réponse : Commençons par démontrer que $\limsup \sin(n) = 1$. Si $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, il existe a un réel tel que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. Alors 1 et π sont des multiples de a et π est rationnel ce qui est absurde. Ainsi, $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et par continuité de la fonction sinus, $\sin(\mathbb{Z}+\pi\mathbb{Z}) = \sin(\mathbb{Z}) = \sin(\mathbb{N})$ est dense dans $[0,1]$, ce qui donne le résultat voulu. Ainsi,

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|e^{n\sin(n)}\right|^{1/n} = e,$$

et le rayon de convergence de la série est $1/e$.

4. Soit (a_n) une suite réelle décroissante telle que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Réponse : On utilise le fait que la série est de Cauchy en considérant les termes pairs et impairs.

Squelette du plan

1. Série entières - Rayon de convergence

   1.1 Rayon de convergence.

   - Lemme d'Abel [Pom94] p.215 ou [Gou08] p.236.
   - Définition du rayon de convergence d'une série entière [Pom94] p.215.
   - ⋆ Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est 1 [Pom94] p.215.
   - Convergence de la série entière dans le disque de convergence, divergence grossière à l'intérieur et indétermination sur le cercle [Pom94] p.215.
   - ⋆ Exemple de $\sum z^n$ pour la convergence sur le bord [Pom94] p.215.
   - Convergence normale sur tout compact du disque de convergence [Pom94] p.216.
   - ⋆ La série $\sum \frac{z^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{D}(0,1)$ car diverge en 1 [Pom94] p.216.
   - Mettre le schéma représentatif à la fin du plan [Pom94] p.216.

   1.2 Opérations sur les séries entières.

   - Rayon de convergence d'une combinaison linéaire de séries entières [Pom94] p.224 ou [Gou08] p.237.
   - ⋆ Les séries entières $\sum z^n$ et $\sum(-z^n)$ ont pour rayon de convergence 1 mais leur somme a pour rayon de convergence $+\infty$ [Gou08] p.238.
   - Existence et rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières [Pom94] p.224.
   - Remarque : on ne peut rien dire si le rayon de convergence des deux séries est identiques.
   - ⋆ Le rayon de convergence de la série entière $\sum(-1)^n z^n$ est 1, celui de $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 2$ si n est pair et 2^n sinon est $\frac{1}{2}$ alors que le rayon de convergence de leur produit est $+\infty$.
   - Rayon de convergence des séries dérivées et expression des coefficients en fonctions de la somme de la série dérivée [Pom94] p.220.

   1.3 Méthodes de calcul du rayon de convergence.

   - ⋆ Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, où a_n est la n-ième décimale de $\sqrt{2}$ est 1 [Pom94] p.217.
   - Comparaison de fonctions : équivalents, inégalités, $\mathcal{O}$ [Pom94] p.217.
   - ⋆ Le rayon de convergence de $\sum(1-\tanh)^n$ est e^2 [Pom94] p.217.
   - Utilisation d'un point frontière [Pom94] p.217.
   - ⋆ Le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$ est 1 [Pom94] p.217.
   - Formule d'Hadamard [Pom94] p.217.
   - ⋆ Le rayon de convergence de $\sum \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ est, selon la différence entre α et 3, 1, $\sqrt{e}$ ou 0 [Pom94] p.217.

- Règle de d'Alembert [Pom94] p.217.

⋆ Le rayon de convergence de $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ est $1/e$ [Pom94] p.218.

2. Théorèmes de régularité.

2.1 Résultats généraux.

- La somme d'une série entière est continue sur le disque de convergence [Gou08] p.238.
- Définition fonction analytique [Pom94] p.220.
- La somme d'une série entière de rayon de convergence non nulle est analytique [Pom94] p.221.
- Principe des zéros isolés [Pom94] p.357 ou [Gou08] p.239.
- Corollaire : théorème de prolongement analytique [Gou08] p.239 ou [Pom94] p.357.
- Corollaire : unicité du développement en série entière en un point.
- Formule de Cauchy pour une série entière de rayon de convergence non nul [Gou08] p.239.

2.2 Le cas de la variable réelle.

- La somme d'une série entière en la variable réelle est dérivable sur le disque de convergence et sa dérivée et donnée par la série entière dérivée [Gou08] p.238 ou [Pom94] p.222.

⋆ Sur $]-1,1[$: $\dfrac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n\geq 1} \binom{n-p-1}{p-1} x^n$.

- Corollaire : la somme d'une série entière en la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque de convergence [Gou08] p.238.

⋆ La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Expression des coefficients d'une série entière en fonction des dérivées successives de la somme de cette série [Gou08] p.238.

⋆ Les dérivées de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en 0 sont $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{n+1}$.

- Intégration de la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul [Gou08] p.238.

⋆ On obtient le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1,1[$ en intégrant la relation $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 1} (-1)^n x^n$. Il en est de même pour $x \mapsto \arctan(1+x)$ sur $]-1,1[$.

2.3 Spécificités de la variable complexe.

- Toute fonction analytique est holomorphe [Pom94] p.354.
- Toute fonction holomorphe est analytique [Pom94] p.355.
- Le résultat est faux sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \exp(-1/x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

♮ Etude de l'espace de Bergman.

- Corollaire : si f et g sont les sommes de séries entières de rayon de convergence non nul, g ne s'annulant pas en 0, alors f/g est développable en série entière et le rayon de convergence est le module du plus petit pôle (s'il existe) de f/g [Pom94] p.225.
- Corollaire : la composée de deux séries entières est une série entière [Pom94] p.225.
- Corollaire : la réciproque d'une fonction qui ne s'annule pas en un point est développable en série entière en ce point [Pom94] p.225.
- Théorème de Liouville pour les fonctions entières [Gou08] p.248.
- Le résultat est faux sur $\mathbb{R}$. En effet, sin est analytique sur $\mathbb{R}$ bornée mais non constante.

2.4 Lien entre l'holomorphie et la réelle analyticité.

- La restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est une fonction analytique [ZQ95] p.298.

- Réciproquement, toute fonction analytique sur $\mathbb{R}$ est la restriction réelle d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ [ZQ95] p.298.
- Conséquence : la somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions analytiques sont analytiques.

3. Quelques résultats sur sur le cercle d'incertitude.

3.1 Prolongement par continuité.

- Mise en place du problème : regarder les limites en un point du cercle.
- Théorème d'Abel-Dirichlet [Gou08] p.252.

⋆ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [FGN09b] p.180.

⋆ $\sum(-1)^n z^n$ a pour rayon de convergence 1, sa somme vaut $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ en 1 mais la série $\sum(-1)^n$ diverge [FGN09b] p.220.

- Application : produit de Cauchy de deux séries convergentes [Pom94] p.234.

♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [CLFM95] p.106.

3.2 Prolongement analytique.

- Mise en place du problème : prolonger de façon analytique la somme d'une série entière en un point du cercle.
- Points réguliers et points singuliers [ZQ95] p.50.

⋆ Exemple de $\sum z^n$ [ZQ95] p.50.

- Existence d'un point singulier sur le cercle de convergence [ZQ95] p.51.
- Notion de coupure [ZQ95] p.54.
- Théorème de Steinhaus : existence d'une coupure pour les séries entières [ZQ95] p.541.

4. Exemples d'utilisation des séries entières.

4.1 Résolution d'équations différentielles.

- Explications de la méthode.

⋆ La solution de l'équation différentielle $4ty'' + 2y' - y = 0$ est $x \mapsto \cosh(\sqrt{t})$ si $t > 0$ et $\cos(\sqrt{-t})$ sinon [MVT98] p.92.

⋆ Equation de Bessel [FGN12] p.101.

4.2 Problèmes de dénombrement.

- Explications de l'utilisation.

⋆ Nombre de dérangements [FGN01] p.9.

⋆ Nombres de Catalan [FGN01] p.12.

Développements

1. Espace de Bergman.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 244

Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Remarques du jury

Exercices et questions

1. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x^2-1)(x+2)}$.

   Réponse : On décompose en éléments simples et c'est terminé.

2. Démontrer le théorème de Bernstein.

   Réponse : *cf* [Pom94] p.103.

3. A l'aide des séries de Fourier, donner un expression des coefficients d'une série entière.

   Réponse : A r fixé, on considère la fonction

$$f_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & f(re^{i\theta}) \end{array} .$$

   Alors f est continue 2π-périodique donc ses coefficients de Fourier existent. Il suffit alors d'effectuer les calculs et les coefficients apparaissent naturellement.

Squelette du plan

1. Série entière - Fonctions analytiques.

   1.1 Notions sur les séries entières.

   - Lemme d'Abel [Pom94] p.215 ou [Gou08] p.236.
   - Définition du rayon de convergence d'une série entière [Pom94] p.215.
   - ⋆ Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$ est 1 [Pom94] p.215.
   - Convergence de la série entière dans le disque de convergence, divergence grossière à l'intérieur et indétermination sur le cercle [Pom94] p.215.
   - ⋆ Exemple de $\sum z^n$ pour la convergence sur le bord [Pom94] p.215.
   - Convergence normale sur tout compact du disque de convergence [Pom94] p.216.
   - ⋆ La série $\sum \frac{z^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{D}(0,1)$ car diverge en 1 [Pom94] p.216.
   - Mettre le schéma représentatif à la fin du plan [Pom94] p.216.
   - Rayon de convergence des séries dérivées et expression des coefficients en fonctions de la somme de la série dérivée [Pom94] p.220.

   1.2 Fonctions analytiques.

   - Fonction développable en série entière en un point [Car85] p.36.
   - Fonction analytique [Car85] p.36.
   - ⋆ Les polynômes sont analytiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ grâce à la formule de Taylor, une fraction rationnelle est analytique sur le complémentaire de ses pôles [Car85] p.37.
   - La somme d'une série entière est analytique sur le disque ouvert de convergence [Car85] p.37.
   - ⋆ Exemple d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement plus grand que la minoration obtenue dans le théorème précédent [Car85] p.38.
   - Conséquence : l'ensemble des points d'analyticité d'une fonction est ouvert [Pom94] p.223.

   1.3 Résultats généraux sur les fonctions analytiques.

- Principe du prolongement analytique [Car85] p.39.
- Principe des zéros isolés [Car85] p.41.

2. Analyticité réelle.

2.1 Spécificités de la variable réelle.

- Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière si et seulement si le reste dans la formule de Taylor-Lagrange tend simplement vers 0 [Rom04] p.189 ou [Gou94] p.238.
- Conséquence : Théorème de Bernstein [Pom94] p.103 ou [Rom04] p.196.
- ⋆ La fonction tan est analytique sur $]-\pi/2, \pi/2[$ [Pom94] p.104.
- Toute fonction analytique réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ [Pom94] p.222.
- ⋆ La fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 0} \exp(2^n ix)/n!$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est analytique nulle part [Pom94] p.222.
- Condition nécéssaire et suffisante pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ soit dérivable en série entière [Car85] p.39.
- Théorème de Borel [Rou09] p.359.
- ⋆ Quelques exemples de fonctions analytiques [Gou08] p.239.

2.2 Utilisation des fonctions analytiques réelles.

- Résolution d'équations différentielles [MVT98].
- ⋆ La solution de l'équation différentielle $4ty'' + 2y' - y = 0$ est $x \mapsto \cosh(\sqrt{t})$ si $t > 0$ et $\cos(\sqrt{-t})$ sinon [MVT98] p.92.
- ⋆ Equation de Bessel [FGN12] p.101.
- Dénombrement [MVT98].
- ⋆ Nombre de Bell : dénombrement du nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ [MVT98] p.94.

3. Holomorphie et analyticité.

3.1 Fonctions holomorphes.

- Définition d'une fonction holomorphe [Pom94] p.353.
- ⋆ Les polynômes et l'exponentielle sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.
- Toute fonction analytique est holomorphe [Pom94] p.354 ou [AM03] p.70.
- Formule de Cauchy [AM03] p.84.
- Application : toute fonction holomorphe est analytique [AM03] p.87.
- ♮ Etude de l'espace de Bergman.
- Héritage des propriétés des fonctions analytique pour les fonctions holomorphes.
- ♮ Formule des compléments [AM03] p.249.
- ⋆ Prolongement de la fonction Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ [BMP04] p.82.
- Théorème de Liouville pour les fonctions entières [Gou08] p.248.
- Le résultat est faux sur $\mathbb{R}$. En effet, sin est analytique sur $\mathbb{R}$ bornée mais non constante.

3.2 Liens avec l'analyticité réelle.

- Le restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est un fonction analytique [ZQ95] p.298.
- Réciproquement, toute fonction analytique sur $\mathbb{R}$ est la restriction réelle d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ [ZQ95] p.298.
- Conséquence : la somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions analytiques sont analytiques.

4. Problèmes de prolongement.

- Mise en place du problème : on considère les sommes de série entières de rayon de convergence 1 et cherche à savoir si on peut prolonger cette somme, et en quel sens, en un point du bord.

4.1 Prolongement continu.

- ⋆ Exemple de $\sum z^n/n^2$ dont le rayon de convergence est 1 mais qui admet un prolongement continu à $\mathbb{C}$ tout entier [ZQ95] p.51.
- • Théorème d'Abel-Dirichlet [Gou08] p.252.
- ⋆ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [FGN09b] p.180.
- ⋆ $\sum(-1)^n z^n$ a pour rayon de convergence 1, sa somme vaut $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ en 1 mais la série $\sum(-1)^n$ diverge [FGN09b] p.220.
- • Application : produit de Cauchy de deux séries convergentes [Pom94] p.234.
- ♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [Gou08] p.289.
- • Une étude asymptotique au bord du disque de convergence [FGN09b] p.212.

4.2 Prolongement analytique.

- • Points réguliers et points singuliers [ZQ95] p.50.
- ⋆ Exemple de $\sum z^n$ [ZQ95] p.50.
- • Existence d'un point singulier sur le cercle de convergence [ZQ95] p.51.
- • Notion de coupure [ZQ95] p.54.
- • Théorème de Steinhaus : existence d'une coupure pour les séries entières [ZQ95] p.541.

Développements

1. Espace de Bergman.
2. Formule des compléments.

Leçon 245

Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Christophe Cheverry.

Remarques du Jury

Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le coeur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète). Pour les candidats aguerris, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan.

Squelette du plan

On se donne Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Holomorphie.

1.1 Fonctions holomorphes.

- Fonction holomorphe [SR08] p.274.
- Fonction entière [SR08] p.274.
- ⋆ L'identité est une fonction entière [AM03] p.65.
- ⋆ La conjugaison n'est pas holomorphe [AM03] p.65.
- L'holomorphie est stable par somme, produit et conjugaison [AM03] p.66.
- Lien entre holomorphie et calcul différentiel [AM03] p.66.
- Conditions de Cauchy-Riemann [AM03] p.67 ou [SR08] p.274.
- Existence de primitive [AM03] p.41 et p.312.
- ⋆ $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

1.2 Fonctions usuelles.

i Fonction $\mathbb{C}$-analytiques.

- Toute fonction analytique est holomorphe [AM03] p.70.
- On verra par la suite que la réciproque est vraie.

ii Exponentielle complexe.

- Exponentielle complexe [AM03] p.72.
- L'exponentielle est une fonction entière [AM03] p.73.
- Développement en série entière de l'exponentielle [AM03] p.73.

iii Fonctions trigonométriques.

- Fonctions sin et cos [AM03] p.76.
- sin et cos sont des fonctions entières [AM03] p.76.

iv Logarithmes et arguments.

- Logarithmes et arguments d'un nombre complexe [AM03] p.77.
- Déterminations de l'argument et du logarithme sur une partie de $\mathbb{C}$ [AM03] p.77.
- Détermination principales de l'argument et du logarithme [AM03] p.77.
- ⋆ Toute fonction continue d'un compact étoilé de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ est l'exponentielle d'une fonction continue de ce compact à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- Il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{S}^1$ [AM03] p.78.
- Arg et Log sont respectivement $\mathcal{C}^\infty$ et holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et Log$'$ est la fonction inverse [AM03] p.78.

- Déterminations de l'argument et du logarithme sur $\mathbb{C}$ privé d'une demie-droite issue de 0 [AM03] p.79.
- On définit de même des déterminations des racines k-èmes et des puissances [AM03] p.80 et p.81.

1.3 Intégration sous le signe intégral.

- Intégration sous le signe intégral [AM03] p.94.
- ⋆ Fonction Γ [AM03] p.95.

2. Formule de Cauchy et conséquences.

2.1 Formule de Cauchy.

- Théorème de Cauchy [AM03] p.81.
- Formule de Cauchy [AM03] p.81
- La dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe [AM03] p.84.
- Formule de Cauchy pour les dérivées successives [AM03] p.84.
- Inégalités de Cauchy [AM03] p.89.
- Théorème de Liouville [AM03] p.150.
- Théorème de d'Alembert-Gauss [AM03] p.150.
- Le spectre de tout élément d'une algèbre de Banach unitaire est non vide [AM03] p.151.

2.2 Analyticité complexe.

- Une fonction holomorphe est analytique [AM03] p.86.
- Zéros des fonctions holomorphes [AM03] p.131.
- Principe des zéros isolés [AM03] p.133.
- Principe de prolongement analytique [AM03] p.88.
- ⋆ Equation fonctionnelle de Γ [AM03] p.95.

2.3 Principe du maximum.

- Maxima des fonctions holomorphes [AM03] p.153.
- Principe du maximum [AM03] p.155.
- Théorème de l'image ouverte [AM03] p.154.

2.4 Singularités.

- Coefficient de Laurent [AM03] p.141.
- Série de Laurent associée à une fonction holomorphe dans une couronne [AM03] p.141.
- Développement d'une fonction holomorphe en série de Laurent [SR08] p.141.
- Singularité isolée d'une fonction holomorphe [AM03] p.144.
- Singularité effaçable [AM03] p.144.
- Fonction bornée et singularité isolée [AM03] p.144.
- Théorème de Casorati-Weierstrass [AM03] p.145.
- Fonction méromorphe [AM03] p.147.
- ⋆ Prolongement méromorphe de Γ [AM03] p.148.

3. Résidus.

3.1 Théorème des résidus.

- Résidus d'une fonction holomorphe [AM03] p.239.
- Théorème des résidus [AM03] p.239.
- On retrouve le théorème de Cauchy.
- Calcul pratique d'un résidu [AM03] p.241.
- ⋆ Intégrale trigonométrique : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ [AM03] p.246.

- ⋆ Fonction rationnelle sans pôle réel : $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$ [AM03] p.247.
- ⋆ Intégrale de Fourier : $\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$ [AM03] p.249.
- ♮ Formule des compléments [AM03] p.249.

3.2 Principe de l'argument.

- Principe de l'argument [AM03] p.242.
- Explication du terme argument [AM03] p.242.
- Théorème de Rouché [AM03] p.243.

4. Topologie de l'espace des fonctions holomorphes.

4.1 Topologie de la convergence sur tout compact.

- Théorème de Weierstrass [SR08] p.319.
- ⋆ Fonction ζ [AM03] p.91.
- ⋆ Prolongement méromorphe de la fonction ζ [AM03] p.149.
- ♮ Etude de l'espace de Bergman [AM03] p.122.
- Topologie de la convergence locale uniforme [SR08] p.319.
- Distance associée à la topologie de la convergence locale uniforme [AM03] p.93.
- Continuité de la somme, du produit et de la dérivation dans $\mathcal{H}(\Omega)$ [SR08] p.320.

4.2 Familles normales.

- Parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$ [SR08] p.321.
- Théorème de Montel [AM03] p.92 ou [SR08] p.322.
- La topologie de la convergence locale uniforme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normable.

4.3 Séries de fonctions méromorphes.

- Convergence normale des séries de fonctions méromorphes [SR08] p.323.
- Somme d'une série de fonctions méromorphes [SR08] p.323.
- ⋆ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ [SR08] p.324.

Développements

1. Espace de Bergman.
2. Formule des compléments.

Leçon 246
Série de Fourier. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Grégory Boil.

Remarques du Jury

Les différents modes de convergence (L^2, Fejer, Dirichlet, ...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet.
Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier. La résolution des équations de la chaleur, de Schrödinger et des ondes dans le cadre de fonctions assez régulières peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon.

Squelette du plan

1. Structure hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.
   1.1 Coefficients de Fourier.
   - Coefficients de Fourier d'une fonction périodique [Far06b] p.148.
   - Coefficients de Fourier trigonométriques [Far06b] p.149.
   - Coefficients de Fourier et fonctions régulières [Pom94] p.258.
   - Lemme de Riemann-Lebesgue [FGN09b] p.41.

   1.2 Série de Fourier d'une fonction périodique.
   - Série de Fourier d'une fonction périodique [Far06b] p.148.
   - Fonctions paires, impaires et série de Fourier [Far06b] p.149.
   - Série de Fourier et séries trigonométriques [Pom94] p.254.

   1.3 Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.
   - Théorème de Weierstrass trigonométrique [FGN09b] p.332.
   - Les fonctions (e_n) forment une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{T})$ [Far06b] p.150.
   - Convergence en norme L^2 de la série de Fourier [Far06b] p.150.
   - Formule de Parseval [Far06b] p.150.
   - ⋆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ [Far06b] p.151.
   - ⋆ $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ [Far06b] p.152.
   - ⋆ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ [Far06b] p.152.
   - Inégalité de Wirtinger [FGN09b] p.313.
   - Inégalité isopérimétrique [ZQ95] p.105 ou [Far06b] p.178.
2. Convergences ponctuelle et uniforme des séries de Fourier.
   2.1 Convergence ponctuelle.
   - Noyau de Dirichlet [Far06b] p.154.
   - Expression du noyau de Dirichlet [Far06b] p.154.
   - ⋆ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ [Pom94] p.256.
   - Théorème de Dirichlet [Far06b] p.155 ou [Pom94] p.256.
   - Cas particulier des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux [Far06b] p.155.
   - Phénomène de Gibbs [Far06b] p.180.

- Norme infinie et polynômes trigonométriques [Pom94] p.258.
- Constantes de Lebesgue [Far06b] p.183.
- Divergence des constantes de Lebesgue [Far06b] p.184.
- Existence de fonctions différentes de leur série de Fourier [Far06b] p.182.

⋆ $f : x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left(\left(2^{p^3}+1\right)\frac{x}{2}\right)$ est différente de sa série de Fourier [Gou08] p.264.

2.2 Convergence uniforme.

- Convergence absolue de la série des coefficients de Fourier et convergence uniforme [Far06b] p.152.
- Fonctions à coefficients de Fourier positifs [FGN09b] p.343.

⋆ $\forall x \in [-\pi, \pi] : |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x$ [Far06b] p.153.

- Application aux fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux [Far06b] p.153.
- Formule sommatoire de Poisson [Gou08] p.272.

⋆ $\forall s > 0 : \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/s}$ [Gou08] p.273.

⋆ Equation fonctionnelle de θ [FGN09b] p.306.

⋆ Calcul de $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{\cosh a - \sin x}\, dx$ [FGN09b] p.293.

⋆ Développement eulérien du sinus [Gou08] p.262.

2.3 Convergence au sens de Césaro.

- Somme de Césaro d'une fonction périodique [Far06b] p.156.
- Noyau de Féjer [Far06b] p.157.
- Expression du noyau de Féjer [Far06b] p.157.

♮ Théorème de Féjer [Far06b] p.157 et [Gou08] p.286.

- On retrouve le théorème de Weierstrass trigonométrique [Far06b] p.159.

2.4 Séries de Fourier et analyticité.

- Fonction holomorphe et séries de Fourier [AM03] p.86.
- Retour sur la régularité des fonctions et domination de leur coefficients de Fourier [FGN09b] p.328.
- Condition suffisante d'analyticité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ [FGN09b] p.328.

3. Séries de Fourier et EDO - EDP.

3.1 Recherche de solution particulière d'EDO.

- Si le second membre d'une EDO est développable en série de Fourier, on peut rechercher une solution particulière de l'EDO de cette forme.

⋆ $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$ [FGN12] p.86.

⋆ Résolution de l'EDO $y'' + y = |\sin x|$ [FGN12] p.85.

3.2 Résolution d'EDP linéaires.

- Mise en place [DM09] p.72.
- Equation de la chaleur sur un domaine borné [DM09] p.71.

♮ Résolution du problème de la chaleur sur un domaine borné [ZQ95] p.105 ou [DM09] p.72.

- Propriétés asymptotiques à l'infini [DM09] p.73.
- Equation de Schrodinger sur un domaine borné [DM09] p.81.
- Résolution de l'équation de Schrodinger sur un domaine borné [DM09] p.81.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Résolution d'un problème aux limites non linéaires.

Leçon 247

Exemples de problèmes d'interversion de limites.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Exercices et questions

1. Montrer que la convergence uniforme conserve la continuité.

   Réponse : Immédiat.

2. Soient $\sum u_v$ et $\sum v_n$ deux suites convergentes telles que leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge. Montrer que
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$
   Réponse : Il suffit de considérer le produit de Cauchy des séries entières $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ dont le rayon de convergence est au moins 1. Pour conclure, il suffit d'invoquer le théorème d'Abel.

3. Montrer que
$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$
   Réponse : On développe en série entière et on intervertit.

Squelette du plan

1. Interversions limites - intégrales.

- Mise en place : on considère les intégrales comme des limites d'intégrales sur des segments.

  1.1 Théorème de convergence dominée.
  - Lemme de Fatou [BP12] p.132.
  - Théorème de convergence dominée [Far06b] p.17 ou [BP12] p.134.
  - ♮ Formule des compléments [AM03] p.249.
  - Remarque : les théorèmes d'interversion dans le cas où on intègre sur un compact deviennent alors évident [Pom94] p.187.
  - ⋆ $f_n : x \mapsto n^2 x\, \mathbf{1}_{[0,1/n]}(x) + (2n - n^2 x)\, \mathbf{1}_{]1/n,2/n[}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle mais la suite des intégrales ne converge pas vers 0 (mettre le dessin) [Hau07] p.244.
  - ♮ Etude de l'espace de Bergman [AM03] p.122.
  - Théorème de Beppo-Lévy [Far06b] p.17 ou [BP12] p.137.
  - Application : théorème de Borel-Cantelli [BP12] p.137.

  1.2 Etude des intégrales à paramètres.
  - Mise en place : on considère un espace mesuré et on veut étudier une intégrale à paramètre. Introduction des notations f et F.
  - Théorème de continuité [Far06b] p.93 ou [BP12] p.138.
  - ⋆ $f : (x,t) \mapsto xe^{-xt}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$ mais F n'est pas continue en 0 [Hau07] p.224.
  - Théorème de dérivation [Far06b] p.94 ou [BP12] p.141.
  - Remarque : on étend ce résultat à $\mathbb{R}^n$ [SR08] p.185.
  - ⋆ $f : (x,t) \mapsto x^2 e^{-t|x|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mais F n'est pas dérivable en 0 [Hau07] p.226.
  - Théorème d'holomorphie [Far06b] p.95.
  - Un théorème d'analyticité sur $\mathbb{R}$ analogue au théorème d'holomorphie est faux comme le montre l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\lambda x)}{1+x^2}dx = e^{-|\lambda|}$ [Far06b] p.96.

1.3 Application aux intégrales de Fourier.

- Mise en place : on considère un certain type d'intégrale [Far06b] p.105.
- Lemme de Riemann-Lebesgue [Far06b] p.106.
- Généralisation aux intégrales de Riemann [Far06b] p.106.

2. Interversions limites - limites.

2.1 Le cas des suites et des séries de fonctions.

- Préservation de la continuité par limite uniforme [Pom94] p.187.

⋆ $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction discontinue [Hau07] p.231.

- Interversion de limite dans le cas de la convergence uniforme de fonctions [Pom94] p.188.

⋆ $f_n : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$ alors que sa limite simple a pour limite 0 en $+\infty$.

- Préservation du caractère $\mathcal{C}^1$ pour une limite de fonctions dont la suite des dérivées converge uniformément [Pom94] p.189.

⋆ La suite $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers $|x|$, donc une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ peut ne pas être dérivable [Pom94] p.188.

- On applique les résultats de la partie précédente aux séries de fonctions.
- Préservation de la continuité par limite uniforme [Pom94] p.189.

⋆ La série de terme général $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers une fonction discontinue et même non bornée [Hau07] p.258.

- Interversion de limite dans le cas de la convergence uniforme d'une série de fonctions [Pom94] p.190.

⋆ $f_n : x \mapsto (x-n+1)\mathbf{1}_{n-1\le x<n} + (n+1-x)\mathbf{1}_{n\le x<n+1}$ est continue, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ mais on ne peut pas intervertir les limites en n et en $+\infty$ [Hau07] p.259.

- Préservation du caractère $\mathcal{C}^1$ pour une limite uniforme de série de fonctions dont la série des dérivées converge uniformément [Pom94] p.191.
- Prolongement du théorème précédent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

♮ Equation de la chaleur [ZQ95] p.105.

2.2 Le cas particulier des séries entières.

- Théorème d'Abel-Dirichlet [Gou08] p.252.

⋆ Contre-exemple : $\sum(-1)^n z^n$ a pour rayon de convergence 1, sa somme vaut $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ en 1 mais la série $\sum(-1)^n$ diverge [FGN09b] p.220.

- Applications : $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n\ge0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ [FGN09b] p.180.

♮ Théorème taubérien de Hardy-Littlewood [Gou08] p.289.

2.3 Interversion et calcul différentiel.

- Lemme de Schwarz [Rom04] p.172 ou [SR08] p.206.

⋆ La fonction $(x,y) \mapsto \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ car ne vérifie pas l'égalité des dérivées partielles croisées en $(0,0)$ [Hau07] p.280.

- Suite des fonctions différentiables [SR08] p.184.

3. Interversion intégrales - intégrales.

- Mise en place : comme dans la première partie, on considère les intégrales comme des limites d'intégrales sur des segments.

3.1 Théorème de Fubini.

- Théorème de Fubini-Tonelli [Far06b] p.61 ou [BP12] p.221.
- ⋆ Intégrale de Gauss [Gou08] p.335.
- ⋆ Moyenne d'une variable aléatoire gaussienne.
- Théorème de Fubini [Far06b] p.59 ou [BP12] p.222.
- ⋆ $f : (x, y) \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ est borélienne non intégrable et les intégrales interverties donnent deux résultats différents [BP12] p.223.
- ⋆ Adjoints des opérateurs à noyaux [HL09] p.98.

3.2 Application aux séries doubles.

- Théorème de Fubini pour les séries doubles [BP12] p.226 ou [Far06b] p.62.
- ⋆ L'interversion des sommes pour la suite double $u_{n,p} = 1\, \mathbf{1}_{n=p} - \frac{1}{2^{p-n}}\, \mathbf{1}_{n<p}$ donne deux résultats différents [Hau07] p.125.

Développements

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Formule des compléments.
4. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Leçon 249

Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Professeur encadrant : Christophe Cheverry.

Remarques du Jury

La notion d'indépendance ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite) doivent être rappelés. La loi binômiale doit être évoquée et le lien avec la leçon expliqué.
Il peut être intéressant de donner une construction explicite d'une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
Certains candidats plus aguerris pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli), ou donner des inégalités de grandes déviations.

Squelette du plan

1. Variables de Bernoulli indépendantes.
   1.1 Indépendance des variables aléatoires.
   - Indépendance de deux tribus [Ouv00] p.39.
   - Indépendance de variables aléatoires [Ouv00] p.40.
   - Critère d'indépendance en terme de loi [Ouv00] p.41.
   - Indépendance et espérance [Ouv00] p.42.
   - Indépendance et fonctions de répartition [Ouv00] p.43.
   - Indépendance et densités [Ouv00] p.43.
   - Généralisation à des familles quelconques [Ouv00] p.46.

   1.2 Propriétés des variables aléatoires de Bernoulli.
   - Variable aléatoire de Bernoulli [Ouv00] p.27.
   - Moyenne et variance d'une variable aléatoire de Bernoulli [Ouv00] p.27.
   - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Bernoulli [Ouv00] p.27.
   - Le temps d'atteinte d'une valeur pour une suite de variables aléatoires aléatoire de même loi de Bernoulli est une loi géométrique de même paramètre.
   - La somme de Bernoulli indépendantes suit une loi binomiale.

   1.3 Construction des variables de Bernoulli indépendantes.
   - Développement dyadique d'une réel de $[0, 1[$ [Ouv00] p.52.
   - Cas de non unicité du développement dyadique [Ouv00] p.53.
   - Développement dyadique et variable aléatoire de Bernoulli [Ouv00] p.54.
   - Existence d'une suite de variables aléatoires indépendante de lois quelconque [Ouv00] p.56.
2. Résultats de convergence.
   2.1 Loi des grands nombres.
   - Théorème de Bernoulli [Ouv00] p.104.
   - Estimation des grands écarts [Les01] p.18.
   - Théorème de Weierstrass [Les01] p.14.
   - Loi forte des grands nombres [Ouv00] p.109.
   - ♮ Etude des nombres normaux [ZQ95] p.503 et p.550.
   - Moyenne empirique [CV12] p.22.

- La moyenne empirique est aussi l'estimateur du maximum de vraisemblance [CV12] p.47.
- Forte consistance de la moyenne empirique [CV12] p.25.

2.2 Théorème central limite.

- Théorème de Moivre-Laplace [Les01] p.20.
- La moyenne empirique est asymptotiquement normale [CV12] p.26.
- Intervalle de confiance asymptotique [CV12] p.40.

2.3 Évènements rares de Poisson.

- Théorème des évènements rares de Poisson [Ouv00] p.311.
- Interprétation [Ouv00] p.312.
- Théorème de Poisson [Ouv00] p.310.

3. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

3.1 Notion de marche aléatoire.

- Variable aléatoire de Rademacher [MPB98] p.37.
- Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ [MPB98] p.37.

3.2 Marche aléatoire comme martingale.

- La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ est une martingale.
- Le temps d'atteinte d'un niveau positif est fini presque surement non intégrable [MPB98] p.37 et p.42.
- Mise en défaut du théorème d'arrêt pour un temps fini presque sûrement.
- Le temps de sortie d'une bande symétrique a des moments à tous les ordres [MPB98] p.38.
- Loi du sup de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ [MPB98] p.49.
- Le temps de sortie d'une bande quelconque est intégrable [MPB98] p.113.
- Le temps de sortie d'une bande non symétrique et la valeur prise à la sortie ne sont pas indépendantes [MPB98] p.113.

3.3 Marche aléatoire comme chaine de Markov.

- La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est une chaine de Markov [MPB98] p.112.
- $\natural$ Etude de la chaine dans les cas symétriques et non symétriques [MPB98] p.112.
- Le temps de sortie d'une bande symétrique et la valeur prise à la sortie sont indépendantes [MPB98] p.113.

3.4 Ruine du joueur.

- Mise en place du problème [Ouv00] p.380.
- Nature du processus [Ouv00] p.381.
- Etude du cas non symétrique [Ouv00] p.381.
- Etude du cas symétrique [Ouv00] p.381.

Développements

1. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.
2. Nombres normaux.

Leçon 253
Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Professeur encadrant : Nicoletta Tchou.

Squelette du plan

1. Ensembles convexes
   1.1 Notion d'ensemble convexe.
   - Ensembles convexes [BMP04] p.26.
   - ⋆ Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles [BMP04] p.26.
   - Remarque : en dimension supérieure à 2 les connexes ne sont pas nécessairement convexe comme le montre $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ [BMP04] p.26.
   - Séparation des convexes au sens strict et au sens large [Bre05] p.5.
   - Théorèmes de Hahn-Banach géométriques [Bre05] p.5 et p.7.
   - Application : Caractérisation de la densité par l'orthogonal dans les espaces vectoriels normés [Bre05] p.7.
   - ⋆ Soient $0 < a < b$ des réels et (α_n) une suite bornée de nombre complexes. Pour tout entier naturel n , on pose $e_n : t \in [a, b] \mapsto t^{\alpha_n}$. Alors (e_n) est dense dans $\mathcal{C}[a, b]$.

   1.2 Projection sur un convexe fermé dans les espaces de Hilbert.
   - Théorème de projection dans les Hilbert [Bre05] p.79.
   - Caractère 1-lipschitzien et cas particulier de projection sur un sous-espace vectoriel fermé [Bre05] p.80.
   - Corollaire : Théorème de représentation de Riesz [Bre05] p.81.
   - Application : Existence de l'espérance conditionnelle [Ouv00] p.155.
2. Notion de fonction convexe.
   2.1 Caractérisation des fonctions convexes.
   - Fonctions convexes et strictement convexes [Rom04] p.233 ou [HUL93] p.143 ou [BMP04] p.27.
   - Fonctions fortement convexes [All05] p.297.
   - Remarque : une fonction est concave si son opposée est convexe.
   - ⋆ Les normes d'espaces vectoriels sont convexes [Rom04] p.235.
   - Une fonction est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes [Rom04] p.234.
   - ⋆ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : 1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq 1$. Application au calcul de l'intégrale de Fresnel par l'analyse complexe.
   - Inégalités des pentes croissantes [BMP04] p.27.
   - Convergence des suites de fonctions convexes [FGN09b] p.160.
   - Caractérisation de la convexité dans le cas continu [Rom04] p.237.
   - Caractérisation de la convexité dans le cas dérivable [Rom04] p.245.
   - ⋆ Γ est convexe.
   - Equivalent en dimension supérieure [Rou09] p.329 et [BMP04] p.29.
   - La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - ⋆ $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x$ [Rom04] p.248.
   - ⋆ Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue et y est une solution de l'équation différentielle $y'' - qy = 0$. Si y s'annule en deux points distincts, alors elle est identiquement nulle [Rom04] p.255.

2.2 Inégalité de Jensen.

- • Inégalité de Jensen [Rom04] p.249.
- ♮ Inégalité de Hoeffding [Ouv00] p.129.
- ⋆ Inégalité de Young. Application aux inégalités de Hölder et Minkowski [Rom04] p.248 et [BP12] p.155 et p.158.
- ⋆ Les polynômes de Bernstein sont convexes sur $[0, 1]$ [Rom04] p.256.
- ⋆ Inégalité harmonico-arithmético-géométrique [Rom04] p.252.
- ⋆ Concavité logarithmique du logarithme sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives [FGN10a] p.222.

3. Extrema des fonctions convexes.

3.1 Existence et lieux d'atteinte des extrema.

- Les minima locaux des fonctions convexes sur un ensemble convexe sont en fait globaux et ils forment un ensemble convexe. De plus, une fonctions strictement convexe admet au plus un minimum [All05] p.296 ou [BMP04] p.30.
- Remarque : une fonction strictement convexe n'admet pas toujours de minimum comme le montre la fonction exp sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions fortement convexes sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert admet un unique minimum sur ce convexe. On a de plus une majoration de l'erreur [All05] p.299.
- $J : v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega fv \, dx$ est fortement convexe sur $H_0^1(\Omega)$ fermé convexe de $H^1(\Omega)$ donc admet un unique minimum sur $H_0^1(\Omega)$. Le problème de Dirichlet du Laplacien est donc résolu [All05] p.289 et p.116.
- Fonctions coercives [Tes12] p.46.
- Les fonctions continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum [Tes12] p.46.
- Cas particulier : les fonctions convexes continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum [All05] p.300.
- Application : Etude de $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ [BMP04] p.32.

3.2 Aspects différentiels.

- Une fonction convexe admet un minimum en tout point critique sur un ouvert convexe où elle est définie [Rou09] p.381.
- Application : Moindres carrés [Rou09] p.384.
- Application : Maximisation de l'entropie [Rou09] p.411.

4. Algorithmes d'approximation.

4.1 Méthode de Newton.

- • Principe de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- • Convergence de la méthode de Newton [Rou09] p.152 ou [Dem06] p.98.
- • Cas des fonctions convexes [Rou09] p.152.
- • Estimation de l'erreur [Rou09] p.152.
- ⋆ Estimation du nombre d'or [Rou09] p.153.
- ⋆ Estimation des racines carrées [Rou09] p.152.

4.2 Algorithme du gradient à pas optimal.

- • Inégalité de Kantorivitch [FGN10a] p.139.
- • Principe de la méthode du gradient à pas optimal [HU09] p.53.
- ♮ Convergence de l'algorithme [HU09] p.54.
- • Majoration de l'erreur de l'algorithme [HU09] p.54.
- • Conditionnement en norme 2 et convergence [HU09] p.55.

Développements

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Inégalité de Hoeffding.

Leçon 254

Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Dérivation et transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Professeur encadrant : Bachir Bekka.

Remarques du jury

Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces leçons restent modestes. Elles se placent au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Aucune subtilité topologique portant sur l'espace des distributions tempérées n'est attendue. Par contre, on attend du candidat qu'il comprenne le rôle fondamental joué par la dualité dans la définition des opérations sur les distributions tempérées. Il faut aussi savoir faire le lien entre décroissance de la transformée de Fourier et régularité de la fonction.
Le fait que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Le passage à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ repose sur l'idée de dualité qui est le coeur de cette leçon. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ et d'autres liées à la théorie des distributions comme la détermination de la transformée de Fourier d'une constante.
Cette leçon ne doit pas se réduire à une dissertation abstraite sur le dual topologique d'un espace de Fréchet séparable. Le candidat doit maîtriser des exemples comme la valeur principale, pouvoir calculer leur dérivée et comprendre ce qu'est la transformée de Fourier d'une fonction constante. Les candidats ambitieux peuvent par exemple déterminer la transformée de Fourier de la valeur principale, la solution fondamentale du laplacien, voire résoudre l'équation de la chaleur ou de Schrödinger.

Squelette du plan

1. Espace de Schwartz.
   1.1 Structure de l'espace de Schwartz.
   - Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.107.
   - $\star$ Les fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.107.
   - $\star$ Les $x \mapsto e^{-z|x|^2}$ avec $\Re(z) > 0$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.107.
   - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par produit [Zui02] p.108.
   - Semi-normes $p_{\alpha,\beta}$ [Zui02] p.108.
   - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Fréchet [Zui02] p.108.
   - La dérivation et la multiplication par un monôme sont continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.108.
   - $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.108.
   - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dans tous les $L^p(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.108.

   1.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
   - Transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.108.
   - $\star$ Transformée de Fourier d'une gaussienne [Zui02] p.108.
   - La transformation de Fourier est bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.109.
   - Transformation de Fourier et intégration [Zui02] p.111.
   - Transformation de Fourier et convolution, produit, dérivation [Zui02] p.111.
   - La transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.
   - Formule sommatoire de Poisson [Gou08] p.272.

⋆ $\forall s > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/s}$ [Gou08] p.273.

2. Espace des distributions tempérées.

2.1 Notion de distribution tempérée.

- Espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées [Zui02] p.112.
- Les distributions tempérées sont des distributions [Zui02] p.112.
- Les distributions à support compact sont des distributions tempérées [Zui02] p.112.
- Les fonctions de $L^p(\mathbb{R}^n)$ sont des distributions tempérées [Zui02] p.113.

⋆ Les fonctions majorées par un polynôme sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.113.

⋆ $x \mapsto e^x e^{ie^x}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.113.

⋆ $x \mapsto e^{x^2}$ n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.113.

⋆ $x \mapsto \ln|x|$ est une distribution tempérée.

⋆ Le peigne de Dirac $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ est une distribution tempérée.

- Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ [Zui02] p.113.

⋆ La suite de terme général $\sum_{|k|\leq n} \delta_k$ converge vers le peigne de Dirac dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- Espaces $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ [Zui02] p.113.
- Dérivation des éléments de $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ [Zui02] p.61.
- Régularité et éléments de $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ [Zui02] p.61.

2.2 Opérations sur les distributions tempérées.

- Dérivation des distributions tempérées [Zui02] p.36.

⋆ $H' = \delta_0$ [Zui02] p.38.

⋆ $(\ln|x|)' = \mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\left(\mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\,\mathrm{PF}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ [Zui02] p.38.

- Propriétés sur la dérivation des distributions tempérées [Zui02] p.37.
- Formule des sauts [Zui02] p.40.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation partielle [Zui02] p.112.

⋆ $\mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\mathrm{PF}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sont éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.117.

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par une coordonnée [Zui02] p.112.

⋆ $x\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, $x\,\mathrm{PF}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x^2\,\mathrm{PF}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$ [Zui02] p.36.

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est stable par convolution par une distribution à support compact [Zui02] p.120.

2.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

- Transformée de Fourier d'une distribution tempérée [Zui02] p.114.
- La transformation de Fourier est bijective bicontinue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même [Zui02] p.114.
- Propriétés de la transformation de Fourier [Zui02] p.114.

⋆ Transformée de Fourier d'un Dirac et d'une constante [Zui02] p.115.

⋆ Transformée de Fourier du peigne de Dirac.

⋆ Transformée de Fourier d'une gaussienne [Zui02] p.115.

♮ Transformée de Fourier de $\mathrm{VP}\left(\frac{1}{x}\right)$ et de H [Zui02] p.117.

- Transformation de Fourier des distributions à support compact [Zui02] p.117.
- Transformée de Fourier et convolution [Zui02] p.120.

⋆ Transformée de Fourier de la mesure de surface de $\mathbb{S}^2$ [Zui02] p.118.

- Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.119.

$\star$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = 2^{2-2\alpha}\pi\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)^2}$ [Far06b] p.144.

3. Résolution de l'équation de Schrodinger.

- Opérateur de Schrodinger [Zui02] p.152.

$\natural$ Problème de Cauchy avec donnée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.152.

- Problème de Cauchy avec donnée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.152.
- Problème de Cauchy avec donnée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Zui02] p.154.
- Forme de la solution [Zui02] p.155.
- Propagation à vitesse infinie [Zui02] p.157.
- Décroissance à l'infini de la solution [Zui02] p.157.

Développements

1. Equation de Schrodinger.
2. Etude de VP $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Leçon 260
Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

Remarques du jury

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebychev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (loi des grands nombres et théorème central limite).
Le comportement des moyennes pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié.
La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée.

Squelette du plan

1. Notion d'espérance.
   1.1 Espérance d'une variable aléatoire.
   - Espérance d'une variable aléatoire intégrable [BL07] p.53.
   - Variable aléatoire centrée [Ouv00] p.18.
   - L'espérance est linéaire positive.
   - Espérance comme moyenne [BL07] p.53.
   - Théorème de transport et espérance [BL07] p.53.
   - Espérance d'une indicatrice [BL07] p.54.
   - Espérance dans les cas discret et à densité [BL07] p.54.
   - ⋆ Espérance des lois usuelles [BL07] p.55 ou [Ouv00] p.27 et p.28.
   - Espérance et fonction de répartition [BL07] p.57.
   - Inégalité de Markov [BL07] p.58.
   - Inégalité de Jensen [BL07] p.56.
   - Espérance d'un vecteur aléatoire [BL07] p.60.

   1.2 Espérance et indépendance.
   - Critère d'indépendance par l'espérance [Ouv00] p.42.
   - Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes [Ouv00] p.46.
   - ⋆ Indépendance du rayon et de l'angle polaire [Ouv00] p.65.
   - ⋆ Simulation de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ [Ouv00] p.67.

   1.3 Espérance conditionnelle.
   - Espérance conditionnelle d'une variable aléatoire intégrable [MPB98] p.2.
   - Propriétés de l'espérance conditionnelle [MPB98] p.2.
   - Espérance conditionnelle et indépendance [MPB98] p.4.
   - Espérance conditionnelle et variables aléatoires à densité [MPB98] p.6.
   - ⋆ Espérance conditionnelle et somme [MPB98] p.7.
2. Moments d'une variable aléatoire.
   2.1 Notion de moment.
   - Moments d'une variable aléatoire de puissance intégrable [Ouv00] p.18.
   - ⋆ La loi de Cauchy n'a pas de moment d'ordre 1 [Ouv00] p.28.
   - Espaces L^p [Ouv00] p.14.
   - Inégalité de Holder [Ouv00] p.15.

- Inégalité de Minkowski [Ouv00] p.16.
- Structure d'espace vectoriel normé pour les L^p et inclusions topologiques [Ouv00] p.17.
- Les inégalités valables pour le moment d'ordre 1 s'adaptent pour un ordre quelconque.

2.2 Variance, covariance et indépendance.

- Variance d'une variable aléatoire de carré intégrable [Ouv00] p.18.
- Variance comme écart à la moyenne.
- Formule de Koenig [Ouv00] p.19.
- ⋆ Variance des lois usuelles [BL07] p.57.
- Covariance de variables aléatoires intégrables [Ouv00] p.20.
- Matrice de covariance [BL07] p.60.
- Espérance conditionnelle et vecteurs gaussiens [MPB98] p.7.
- Variance et covariance [Ouv00] p.20.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev [Ouv00] p.24.
- Variance conditionnelle [MPB98] p.7.
- Théorème de Weierstrass [BL07] p.59.
- Covariance et indépendance [BL07] p.80.
- ⋆ $Y = X^2$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ montre que la réciproque est fausse.
- Variance, somme et indépendance.
- Vecteur gaussien, indépendance et covariance [Ouv00] p.252 ou [BL07] p.101.

2.3 Transformations usuelles et moments.

- Fonction caractéristique [Ouv00] p.195 ou [BL07] p.61.
- ⋆ Fonctions caractéristiques usuelles [Ouv00] p.27 et p.28.
- Fonction caractéristique et moments [Ouv00] p.209.
- ⋆ Fonction caractéristique dérivable et variable aléatoire sans moyenne [Ouv00] p.210.
- Définition de la transformée de Laplace, ensemble de définition D_X [FF12] p.159.
- ⋆ Transformées de Laplace usuelles [Ouv00] p.27 et p.28.
- Transformée de Laplace et moments [BL07] p.66 ou [FF12] p162.
- Inégalité de Hoeffding [Ouv00] p.132.
- ⋆ Moments d'une gaussienne avec sa fonction caractéristique.
- La fonction génératrice des moments a le même type de propriétés.

3. Théorèmes limites.

3.1 Loi des grands nombres.

- Loi faible des grands nombres [BL07] p.132.
- Estimation des grands écarts [Les01] p.18.
- Loi forte des grands nombres [BL07] p.132.
- ♮ Etude des nombres normaux [ZQ95] p.503 et p.550.
- Méthode de Monte-Carlo [Tou99] p.79.
- ⋆ La moyenne empirique est un estimateur fortement consistant [CV12] p.25.

3.2 Théorème central limite.

- Inégalités sur les nombres complexes de modules de module 1.
- Fonction caractéristique et formule de Taylor [Ouv00] p.324.
- ♮ Théorème central limite [Ouv00] p.325.
- Intervalles de confiance asymptotique [CV12] p.39.
- ⋆ La moyenne empirique est asymptotiquement normal [CV12] p.26.
- ⋆ Etude statistique du jeu de pile ou face [CV12] p.40.
- ⋆ Intervalle de confiance et méthode de Monte-Carlo [Tou99] p.79.

Développements

1. Nombres normaux.
2. Théorème central limite.

Leçon 261

Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

Remarques du jury

Le jury attend l'énoncé de théorème de Lévy et son utilisation dans la démonstration du théorème limite central.
Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments.
Enfin la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

Remarques

1. Ne pas répéter les théorèmes pour la fonction caractéristique et la transformée de Laplace lorsqu'ils sont identiques.
2. Parler de transformée de Fourier.
3. La loi des grands nombres faible L^1 est pertinente dans le plan.
4. Préciser les opérations sur les fonctions caractéristiques.
5. En développement, on peut penser aux points suivants :
   (a) Lois arithmétiques.
   (b) Poisson composé.
   (c) Théorème de Stein.
   (d) Infini-divisibilité.

Exercices et questions

1. Connaissez-vous d'autres formes du Théorème Central Limite ?

   Réponse : Il existe un théorème de Lindeberg qui demande une contrainte sur la suite de variables aléatoires mais ne demande pas l'identique distribution. Il existe aussi une forme pour les martingales.
2. Que dire d'une variable aléatoire dont la fonction caractéristique est intégrable ?

   Réponse : Une telle variable aléatoire est à densité. Cela se voit avec la transformée de Fourier inverse.

Squelette du plan

1. Fonction caractéristique et transformée de Laplace.
   1.1 Transformée de Fourier d'une mesure bornée - Fonction caractéristique.
   1.2 Transformée de Laplace d'une variable aléatoire.
   1.3 Caractérisation de la loi.
2. Liens avec l'indépendance.
   2.1 Caractérisations d'indépendance.
   2.2 Inégalité de Hoeffding.
   2.3 Théorème de Bernstein.
   2.4 Opérations sur les transformées de Laplace et les transformées de Fourier.
3. Liens avec les moments.

4. Liens avec la convergence en loi.
   4.1 Notion de convergence en loi.
   4.2 Le théorème central limite.
   4.3 Exemples d'utilisations du théorème centra limite.

Développements

1. Convergence d'un estimateur.
2. Théorème central limite.

Leçon 262

Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

Remarques du jury

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury.
Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. Les candidats plus aguerris pourront présenter le lemme de Slutsky (et son utilisation pour la construction d'intervalles de confiance).

Squelette du plan

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Les convergences presque sûre et en probabilité.
   1.1 Notion de convergence presque sûre.
   - Convergence presque sûre [BL07] p.109.
   - Critère de Cauchy pour la convergence presque sûre [BL07] p.110.
   - ⋆ $\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} X_i$ converge presque surement vers $\sum_{i\geq 1} 2^{-i} X_i$ [BL07] p.111.
   - Lemme de Borel-Cantelli [BL07] p.111.
   - ⋆ (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors la suite de terme général $X_n^* / \ln n$ converge presque surement vers 1 [BL07] p.112.
   - Inégalité de Hoeffding [Ouv00] p.133.
   - ⋆ Une convergence presque sûre [Ouv00] p.133.

   1.2 La convergence en probabilités.
   - Convergence en probabilités [BL07] p.113.
   - ⋆ Un exemple de convergence en probabilité [BL07] p.114.
   - Métrique pour la convergence en probabilité [BL07] p.114.
   - Complétude de L^0 pour cette métrique [BL07] p.116.
   - La convergence presque sûre implique celle en probabilité [BL07] p.110 et p. 113.
   - ⋆ Contre exemple à la réciproque [BL07] p.114.
   - Convergence en probabilité et suites extraites [BL07] p.115.

   1.3 Lois des grands nombres.
   - Loi faible des grands nombres [BL07] p.132.
   - Estimation des grands écarts [Les01] p.18.
   - Théorème de Weierstrass [Les01] p.14.
   - Loi forte des grands nombres [BL07] p.132.
   - Méthode de Monte-Carlo [Tou99] p.79.
   - Loi forte des grands nombres pour les martingales [Ouv00] p.381.
   - Théorème ergodique pour les chaînes de Markov [MPB98] p.104.
2. La convergence dans les espaces L^p.
   - Convergence dans les espaces L^p [BL07] p.117.
   - Théorème de Riesz-Fischer [Far06b] p.46.
   - ⋆ Une converge presque sûre mais pas dans L^1 [BL07] p.118.

- Théorème de convergence L^p-dominée [Far06b] p.17.
- Inégalité de Markov [BL07] p.58.
- La convergence dans L^p implique celle en probabilités [BL07] p.117.
- ⋆ Contre-exemple à la réciproque [BL07] p.117.
- Famille uniformément intégrable [BL07] p.118.
- Théorème de Vitali [BL07] p.119.

3. La convergence en loi et ses applications.
   3.1 Caractérisation de la convergence en loi.
   - Convergence en loi [Can13] p.267.
   - ⋆ Convergence en loi de variables aléatoires discrètes [Can13] p.267.
   - ⋆ Convergence en loi d'une variable aléatoire discrète vers une variable aléatoire à densité [Can13] p.268.
   - ⋆ Convergence en loi d'une variable aléatoire à densité vers une variable aléatoire discrète [Can13] p.268.
   - Continuous mapping theorem [Can13] p.268.
   - Convergence en loi et fonctions de répartition [Can13] p.271.
   - Théorème de Lévy [Ouv00] p.313.
   - ⋆ La convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques ne suffit pas [Can13] p.278.
   - Théorème de Slutsky [Ouv00] p.347.

   3.2 Liens avec les autres modes de convergence.
   - La convergence presque sûre implique celle en loi [Can13] p.269.
   - La convergence en probabilité implique celle en loi [Can13] p.280.
   - ⋆ Les réciproques des deux résultats précédents sont fausses en général [BL07] p.123.
   - Convergence en loi vers une constante et convergence en probabilité [BL07] p.123.

   3.3 Le théorème central limite.
   - Inégalités sur les nombres complexes de modules de module 1.
   - Fonction caractéristique et formule de Taylor [Ouv00] p.324.
   - ♮ Théorème central limite [Ouv00] p.325.
   - Théorème central limite pour les martingales [BC07] p.113.

   3.4 Intervalles de confiance asymptotiques.
   - Intervalles de confiance asymptotique [CV12] p.39.
   - ⋆ Etude statistique du jeu de pile ou face [CV12] p.40.

4. Un exemple d'estimateur.

- Processus autoregressif [BC07] p.120.
- Estimateur par maximum devraissemblance [BC07] p.120.
- ♮ Convergence d'un des estimateurs [BC07] p.121.

Schéma avec toutes les implications à la fin.

Développements

1. Convergence d'un estimateur.
2. Théorème central limite.

Leçon 263

Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

Remarques du jury

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation.
Le lien entre l'indépendance et la convolution pourra être étudié.
Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$ et l'intérêt de ce résultat pour la simulation informatique.
Pour aller plus loin, certains candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite.

Squelette du plan

1. Variable aléatoire à densité.
   1.1 Radon-Nikodym et densité.
   - Théorème de Radon-Nikodym [Ouv00] p.6.
   - Variable aléatoire à densité [Ouv00] p.8.
   - Fonction de répartition des variables aléatoires à densité [Ouv00] p.8.
   - La fonction de répartition est sans atome si et seulement si la variable aléatoire est à densité.
   - Fonction caractéristique et densité [Ouv00] p.195.
   - Moment des variables aléatoires à densité [Ouv00] p.19.
   - Densité des marginales [Ouv00] p.12.
   - Densité de la somme de variables aléatoires à densités indépendantes [Ouv00] p.64.

   1.2 Variable à densité usuelles.
   - Variables aléatoires à densité usuelles [Ouv00] p.28.
   - Moyenne et variance des variables aléatoires à densité usuelles [Ouv00] p.28.
   - Lois de Student et de Fisher [CV12] p.174.
   - Somme de variables aléatoires à densité usuelles [Ouv00] p.64.
   - Interprétations [FF12] p.177.

   1.3 Construction et simulation des variables aléatoires à densité.
   - Mise en place [BC07] p.29.

   i Construction de la loi uniforme.
   - Développement dyadique d'un réel [Ouv00] p.54.
   - Construction de variables aléatoires uniforme sur $[0, 1]$ [Ouv00] p.55.

   ii Simulation par pseudo-inverse.
   - Pseudo-inverse d'une fonction de répartition [BC07] p.37 ou [Ouv00] p.29.
   - Comportement d'une fonction de répartition vis a vis de sa pseudo-inverse [BC07] p.37 ou [Ouv00] p.29.
   - Loi uniforme et pseudo-inverse [BC07] p.37 ou [Ouv00] p.29.
   - ⋆ Simulation des lois exponentielles [BC07] p.44 ou [Ouv00] p.31.
   - ⋆ Simulation de la loi de Cauchy [BC07] p.44.
   - Cette méthode est moins lourde que la méthode d'inversion.

   iii Méthode de Box-Muller.

- Coordonnée polaires et loi normale [Ouv00] p.67.
- Simulation des lois normales.

2. Vecteurs gaussiens.

2.1 Notion de vecteur gaussien.

- Vecteur gaussien [BL07] p.98 ou [CV12] p.182.
- Densité d'un vecteur gaussien [CV12] p.182.
- Fonction caractéristique d'un vecteur gaussien [CV12] p.182.
- Transformation linéaire d'un vecteur gaussien [CV12] p.182.
- Vecteurs gaussiens et indépendance [BL07] p.101.

2.2 Projection des vecteurs gaussiens.

- Théorème de Cochran [CV12] p.97.
- Théorème de Fisher [CV12] p.99.

2.3 Regression linéaire.

- Modèle statistique [CV12] p.105.
- Estimation des paramètres [CV12] p.106.
- Test de l'utilité des régresseurs [CV12] p.107.

3. Théorèmes de la limite centrale

3.1 Théorème central limite.

- Inégalités sur les nombres complexes de modules de module 1.
- Fonction caractéristique et formule de Taylor [Ouv00] p.324.
- ♮ Théorème central limite [Ouv00] p.325.
- Intervalles de confiance asymptotique [CV12] p.39.
- ⋆ La moyenne empirique est asymptotiquement normal [CV12] p.26.
- ⋆ Etude statistique du jeu de pile ou face [CV12] p.40.
- ⋆ Intervalle de confiance et méthode de Monte-Carlo [Tou99] p.79.

3.2 Théorème central limite pour les martingales.

- Théorème central limite pour les martingales [BC07] p.113.
- ♮ Convergence d'un estimateur [BC07] p.120.

Développements

1. Convergence d'un estimateur.
2. Théorème central limite.

Leçon 264
Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Professeur encadrant : Jean-Christophe Breton.

Remarques du jury

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binômiale et de Poisson doit être discuté.
Les techniques spécifique aux variables discrètes devront être abordées (comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi). La notion de fonction génératrice pourra être abordée.
Pour aller plus loin, les candidats ambitieux pourront étudier les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables.

Squelette du plan

1. Variables aléatoires discrètes.
   1.1 Notion de variable aléatoire discrète.
   - Variable aléatoire discrète [FF12] p.67.
   - Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité [FF12] p.50.
   - Moments d'une variable aléatoire discrète.
   - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète [Ouv00] p.195.
   - Probabilité des marginales [Ouv00] p.13.
   - Somme de variables aléatoires discrètes [Ouv00] p.64.

   1.2 Variable aléatoires discrète usuelles.
   - Loi de Bernoulli et de Rademacher [BC07] p.297.
   - Loi binomiale et interprétation [FF12] p.68.
   - Loi hypergéométrique et interprétations [FF12] p.68.
   - Loi géométrique et interprétation [FF12] p.71.
   - Loi de poisson et interprétations [FF12] p.73.
   - Somme de variables aléatoires discrètes usuelles.

   1.3 Construction et simulation des variables aléatoires discrètes.
   - Mise en place [BC07] p.29.

   i Construction de la loi uniforme et de la loi de Bernoulli..
   - Développement dyadique d'un réel [Ouv00] p.54.
   - Construction de variables aléatoires uniforme sur $[0, 1]$ [Ouv00] p.55.
   - Construction de la loi de Bernoulli [Ouv00] p.55.

   ii Simulation de la loi de Bernoulli.
   - Loi de Bernoulli et loi uniforme [BC07] p.39.
   - Loi de Rademacher et loi uniforme [BC07] p.39.

   iii Simulation par pseudo-inverse.
   - Pseudo-inverse d'une fonction de répartition [BC07] p.37 ou [Ouv00] p.29.
   - Comportement d'une fonction de répartition vis a vis de sa pseudo-inverse [BC07] p.37 ou [Ouv00] p.29.
   - Loi uniforme et pseudo-inverse [BC07] p.37 ou [Ouv00] p.29.
   - Simulation d'une loi discrète [BC07] p.40.

   ⋆ Simulation de la loi uniforme discrète [BC07] p.41.

- ⋆ Simulation de la loi géométrique [BC07] p.41.
- ⋆ Simulation de la loi binomiale [BC07] p.41.
- ⋆ Simulation de la loi de Poisson [BC07] p.42.

2. Résultats de convergence.

2.1 Lois des grands nombres.

- Loi faible des grands nombres [Ouv00] p.107.
- Loi faible des grands nombres pour les variables de Bernoulli [Les01] p.13.
- Estimation des grands écarts [Les01] p.18.
- Théorème de Weierstrass [Les01] p.14.
- Loi forte des grands nombres [Ouv00] p.113.
- ♮ Etude des nombres normaux [ZQ95] p.503 et p.550.
- Moyenne empirique [CV12] p.22.
- La moyenne empirique est l'estimateur du maximum de vraisemblance [CV12] p.47.
- Forte consistance de la moyenne empirique [CV12] p.25.

2.2 Théorème central limite.

- Convergence en loi des variables aléatoires discrètes [Ouv00] p.317.
- Théorème de Moivre-Laplace [Les01] p.20.
- ⋆ La moyenne empirique est asymptotiquement normale [CV12] p.26.
- ⋆ Intervalle de confiance asymptotique pour le pile ou face [CV12] p.40.

2.3 Évènements rares de Poisson.

- Théorème des évènements rares de Poisson [Ouv00] p.311.
- Interprétation [Ouv00] p.312.
- Théorème de Poisson [Ouv00] p.310.

3. Chaines de Markov à espace d'états dénombrable.

3.1 Notion de chaîne de Markov.

- Chaine de Markov homogène [BC07] p.134.
- Caractérisation des chaines de Markov [BC07] p.145.
- ⋆ La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est une chaîne de Markov [MPB98] p.112.
- Noyau de transition [BC07] p.135.
- Noyaux itérés [BC07] p.138.
- Propriété de Markov forte [BC07] p.139.

3.2 Récurrence et transience.

- Opérateur potentiel [MPB98] p.94.
- Points récurrents et transitoires [MPB98] p.98.
- Partition de l'ensemble des états [MPB98] p.101.
- ⋆ Etude d'une chaîne dans une espace à 5 états [MPB98] p.116.
- Mesure invariante [MPB98] p.95.
- Mesure reversible [MPB98] p.108.
- Une mesure reversible est invariante [MPB98] p.108.
- Existence d'une mesure invariante [MPB98] p.103.
- Chaine récurrente nulle et chaine récurrente positive [MPB98] p.104.
- ⋆ Processus de vie ou de mort [BC07] p.173.
- Théorème ergodique [MPB98] p.105.
- ⋆ Etude d'une chaîne à valeurs dans un espace à 4 états [MPB98] p.116.

3.3 Périodicité.

- Période d'un état [MPB98] p.107.
- Période d'une chaine [MPB98] p.107.
- Convergence en loi d'une chaine de Markov [MPB98] p.107 et p.108.

⋆ Urne d'Ehrenfest [BC07] p.179.

♮ Etude de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ [MPB98] p.112.

Développements

1. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.
2. Nombres normaux.

Bibliographie

[AF87] Jean-Marie Arnaudiès and Henri Fraysse. *Cours de Mathématiques - 1 - Algèbre*. Dunod, 1987.

[All05] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[AM03] Eric Amar and Etienne Matheron. *Analyse complexe*. Cassini, 2003.

[Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.

[Ave83] André Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1983.

[BC07] Bernard Bercu and Djalil Chaffaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Vuibert, 2007.

[BL07] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilités*. EDP Sciences, 2007.

[BMP04] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*. HK, 2004.

[Bon01] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Editions Ecole Polytechnique, 2001.

[Bou05] Paul Bourgade. *Olympiades internationales de mathématiques*. Cassini, 2005.

[Boy15] Pascal Boyer. *Algèbre et géométries*. Calvage et Mounet, 2015.

[BP12] Marc Briane and Gilles Pagès. *Analyse : Théorie de l'intégration*. Vuibert, 2012.

[Bre05] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnel*. Dunod, 2005.

[Cal06a] Josette Calais. *Eléments de théorie des anneaux*. Ellipses, 2006.

[Cal06b] Josette Calais. *Extensions de corps*. Ellipses, 2006.

[Cal14] Josette Calais. *Eléments de théorie des groupes*. puf, 2014.

[Can13] Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilité, une introduction élémentaire*. Calvage et Mounet, 2013.

[Car81] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps*. Hermann, 1981.

[Car85] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, 1985.

[CG13] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoire hédoniste de groupes et de géométries*. Calvage et Mounet, 2013.

[CG15] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoire hédoniste de groupes et de géométries - Tome Second*. Calvage et Mounet, 2015.

[CL05] Antoine Chambert-Loir. *Algèbre corporelle*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[CLF96] Antoine Chambert-Loir and Stéphane Fermier. *Agrégation de mathématiques - Analyse 3, Exercices*. Masson, 1996.

[CLF99] Antoine Chambert-Loir and Stéphane Fermier. *Agrégation de mathématiques - Analyse 2, Exercices*. Dunod, 1999.

[CLFM95] Antoine Chambert-Loir, Stéphane Fermier, and Vincent Maillot. *Agrégation de mathématiques - Analyse 1*. Masson, 1995.

[CLRS10] Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest, and Clifford Stein. *Algorithmique*. Dunod, 2010.

[Cog00] Michel Cognet. *Algèbre linéaire*. Bréal, 2000.

[Col11] Pierre Colmez. *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Editions Ecole Polytechnique, 2011.

[Com98] François Combes. *Algèbre et géométrie*. Bréal, 1998.

[CV12] Benoît Cadre and Céline Vial. *Statistique mathématiques*. Ellipses, 2012.

[dB98] Jean de Biasi. *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation - Livre 1 : Algèbre et analyse*. Ellipses, 1998.

[Deb04] Gérard Debeaumarché. *Manuel de mathématiques - Volume 1*. Ellipses, 2004.

[Deb16] Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*. Calvage et Mounet, 2016.

[Dem89] Michel Demure. *Catastrophes et bifurcations*. Editions Ecole Polytechnique, 1989.

[Dem06] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.

[DG15] Claire David and Pierre Gosselet. *Equations aux dérivées partielles*. Dunod, 2015.

[DM09] Laurent Di Menza. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Cassini, 2009.

[dSP10] Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*. Calvage et Mounet, 2010.

[DTLQ14] Gema-Maria Diaz-Toca, Henri Lombardi, and Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*. Calvage et Mounet, 2014.

[Duv07] Daniel Duverney. *Théorie des nombres*. Dunod, 2007.

[Eid09] Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009.

[Esc00] Jean-Pierre Escofier. *Théorie de Galois*. Dunod, 2000.

[Far06a] Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie*. Calvage et Mounet, 2006.

[Far06b] Jacques Faraut. *Calcul intégral*. EDP Sciences, 2006.

[FF12] Dominique Foata and Aimé Fuchs. *Calcul des probabilités*. Dunod, 2012.

[FG97] Serge Francinou and Hervé Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1*. Masson, 1997.

[FGN01] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Algèbre 1*. Cassini, 2001.

[FGN03] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Analyse 1*. Cassini, 2003.

[FGN09a] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Algèbre 2*. Cassini, 2009.

[FGN09b] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Analyse 2*. Cassini, 2009.

[FGN10a] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Algèbre 3*. Cassini, 2010.

[FGN10b] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Analyse 3*. Cassini, 2010.

[FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X/ENS Analyse 4*. Cassini, 2012.

[Gob05] Rémi Goblot. *Algèbre linéaire*. Ellipses, 2005.

[Gou94] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : Algèbre*. Ellipses, 1994.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : Analyse*. Ellipses, 2008.

[Goz09] Ivan Gozard. *Théorie de Galois*. Ellipses, 2009.

[Gri11] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2011.

[GT96] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.

[GT98] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Calcul Différentiel*. Ellipses, 1998.

[Hau07] Bertrand Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, 2007.

[Hin08] Marc Hindry. *Arithmétique*. Calvage et Mounet, 2008.

[HL09] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 2009.

[HU09] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. *Optimisation et analyse convexe*. EDP Sciences, 2009.

[HUL93] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Springer-Verlag, 1993.

[Laf10] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences, 2010.

[Les01] Emmanuel Lesigne. *Pile ou face*. Ellipses, 2001.

[LFA78] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudies. *Cours de mathématiques, Tome 1, Algèbre*. Dunod, 1978.

[MCDT93] Jacques Moisan, Françoise Chanet, Frédérique Delmas, and Nicolas Tosel. *Mathématiques Supérieures Analyse*. Ellipses, 1993.

[Mer04] Dany-Jack Mercier. *Cours de géométrie*. Publibook, 2004.

[Mne06] Rached Mneimné. *Réduction des endomorphismes*. Calvage et Mounet, 2006.

[MPB98] Laurent Mazliak, Pierre Priouret, and Paolo Baldi. *Martingales et chaines de Markov*. Hermann, 1998.

[MT97] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1997.

[MVT98] Jacques Moisan, André Vernotte, and Nicolas Tosel. *Suites et séries de fonctions*. Ellipses, 1998.

[Mér06] Jean-Yves Mérindol. *Nombres et Algèbre*. EDP Sciences, 2006.

[Ort04] Pascal Ortiz. *Exercices d'algèbre*. Ellipses, 2004.

[Ouv00] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités 2*. Cassini, 2000.

[Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

[Pey04] Gabriel Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. Ellipses, 2004.

[Pom94] Alain Pommelet. *Agrégation de Mathématiques - Cours d'Analyse*. Ellipses, 1994.

[Rau00] Gérard Rauch. *Les groupes finis et leurs repréentations*. Ellipses, 2000.

[RDO93a] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales 1, algèbre*. Masson, 1993.

[RDO93b] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales 2, algèbre et application à la géométrie*. Masson, 1993.

[RDO93c] E. Ramis, C. Deschamps, and J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales 4, séries et équations différentielles*. Masson, 1993.

[Rom99a] Jean-Etienne Rombaldi. *Analyse matricielle, Cours et exercices résolus*. EDP Sciences, 1999.

[Rom99b] Jean-Etienne Rombaldi. *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*. EDP Sciences, 1999.

[Rom04] Jean-Etienne Rombaldi. *Eléments d'analyse réelle*. EDP Sciences, 2004.

[Rom05] Jean-Etienne Rombaldi. *Interpolation et approximation, Analyse pour l'intégration*. Vuibert, 2005.

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et l'agrégation*. Cassini, 2009.

[Rud73] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.

[Rud09] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2009.

[RW95] Jean François Ruaud and André Warusfel. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre* 3. Masson, 1995.

[Sam97] Pierre Samuel. *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, 1997.

[Ser95] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. PUF, 1995.

[Ser98] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1998.

[SP99] Philippe Saux Picart. *Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux*. Ellipses, 1999.

[SR08] Jean Saint-Raymond. *Topologie, Calcul différentiel et Variable complexe*. Calvage et Mounet, 2008.

[Szp09] Aviva Szpirglas. *Mathématiques L3 Algèbre*. Pearson Education, 2009.

[Tau94] Patrice Tauvel. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Algèbre* 2. Masson, 1994.

[Tau99] Patrice Tauvel. *Cours d'algèbre*. Dunod, 1999.

[Tau05] Patrice Tauvel. *Géométrie*. Dunod, 2005.

[Tau07] Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois*. Calvage et Mounet, 2007.

[Tes12] Frédéric Testard. *Analyse mathématiques - La maitrise de l'implicite*. Calvage et Mounet, 2012.

[Tou99] Paul S. Toulouse. *Thèmes de probabilité*. Dunod, 1999.

[Ulm12] Félix Ulmer. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2012.

[VP94] Jacques Vauthier and Jean-Jacques Prat. *Cours d'analyse mathématiques de l'agrégation*. Masson, 1994.

[Wil03] Michel Willem. *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini, 2003.

[Zav13] Maxime Zavidovique. *Un Max de Math*. Calvage et Mounet, 2013.

[ZQ95] Claude Zuily and Hervé Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, 1995.

[Zui02] Claude Zuily. *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Dunod, 2002.