

Dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite

Thomas Cavallazzi

Rapport de stage de fin de première année du Magistère de
Mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure de Rennes

Stage effectué à l'Institut mathématique de Jussieu
encadré par Pierre-Antoine Guihéneuf
15 mai - 25 juin 2017

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques correspond à l'étude de phénomènes dont l'évolution est régie par des lois déterminées. On dit souvent que cette théorie est née avec l'étude de la mécanique céleste, et ceci grâce aux lois de Newton. En effet, ces dernières permettent d'écrire des équations différentielles régissant l'évolution, de manière déterministe, d'un système physique au cours du temps. C'est Henri Poincaré qui est considéré comme l'un des fondateurs de la théorie des systèmes dynamiques. En effet, il a étudié la stabilité de certains systèmes (dont notre système solaire). De plus, c'est justement à la suite de ses travaux sur la stabilité du système solaire qu'on a commencé à s'intéresser à l'itération d'applications continues. L'itération d'une application modélise l'action du temps sur le système. Pour ce dernier type de dynamique, les orbites, c'est-à-dire les itérées d'un point par une application continue, seront au cœur de la théorie.

Dans ce mémoire, on présentera d'abord des généralités sur les systèmes dynamiques topologiques discrets : c'est-à-dire l'itération par composition d'une application continue sur un espace topologique. Ensuite on étudiera le cas où l'espace est le cercle : on s'intéressera de manière plus précise aux homéomorphismes et aux difféomorphismes du cercle. Enfin on présentera quelques résultats obtenus sur une question suggérée par mon encadrant : à quelle condition une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ correspond-elle la dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite.

Table des matières

1	Généralités sur les systèmes dynamiques topologiques discrets	4
1.1	Définition et notion d'isomorphisme entre systèmes dynamiques	4
1.2	Orbites et ensembles limites	5
1.3	Propriétés générales	8
1.3.1	Transitivité	8
1.3.2	Minimalité	9
1.4	Système dynamique mesuré et notion d'ergodicité	11
2	Les homéomorphismes et difféomorphismes du cercle	11
2.1	Définitions et notations	11
2.2	Les rotations	13
2.3	Nombre de rotation de Poincaré	14
2.4	Dynamique quand le nombre de rotation est rationnel	18
2.5	Dynamique quand le nombre de rotation est irrationnel	20
2.6	Théorème de Denjoy	23
3	Application : suite formée de la dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite	26
3.1	Quelques conditions nécessaires	26
3.1.1	Premières conditions nécessaires	26
3.1.2	Dichotomie sur les valeurs d'adhérence de la suite	27
3.1.3	Propriétés de quasi-périodicité	27
3.1.4	Convergence au sens de Cesàro de la suite	31
3.2	Cas où la suite est constante	31
3.3	Cas où la suite est périodique	33
3.4	Cas où la suite converge	34

1 Généralités sur les systèmes dynamiques topologiques discrets

1.1 Définition et notion d'isomorphisme entre systèmes dynamiques

On commence par définir ce qu'est un système dynamique topologique discret.

Définition 1 (Système dynamique topologique discret). *Un système dynamique topologique discret correspond à la donnée d'un espace topologique X et d'une application continue $f : X \rightarrow X$. On notera alors (X, f) le système dynamique. Plus précisément, il s'agit de l'action naturelle de \mathbb{N} sur $C^0(X, X)$ qu'on obtient avec les itérées de f , soit :*

$$n \in \mathbb{N} \mapsto f^n = f \circ \dots \circ f \quad n \text{ fois}$$

Dans le cas où f est une bijection, on peut définir le système dynamique topologique discret associé à f par l'action de \mathbb{Z} :

$$n \in \mathbb{Z} \mapsto f^n = f \circ \dots \circ f \quad n \text{ fois}$$

Enfin, si f est un homéomorphisme, on dira que le système dynamique est inversible.

Définissons maintenant une notion d'isomorphisme entre systèmes dynamiques topologiques discrets : la conjugaison.

Définition 2 (Conjugaison). *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques topologiques discrets. On dira que ces deux systèmes dynamiques sont isomorphes si f et g sont conjugués, c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que :*

$$h \circ f = g \circ h$$

h est appelée conjugaison entre f et g .

On introduit également une notion plus faible que la conjugaison, mais qui nous sera très utile dans la suite :

Définition 3 (Semi-conjugaison). *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques topologiques discrets. On dira que g est un facteur de f lorsqu'il existe une application continue surjective $h : X \rightarrow Y$ telle que :*

$$h \circ f = g \circ h$$

h est appelée semi-conjugaison.

En fait, en considérant un facteur g de f , on perd de l'information sur f , ce qui n'est pas le cas lorsqu'il s'agit d'une conjugaison. On a la proposition suivante :

Proposition 1.

- *Si g est un facteur de f par la semi-conjugaison h , alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h \circ f^n = g^n \circ h$$

C'est en particulier le cas si f et g sont conjugués.

- *Si f et g sont conjugués, alors f est un homéomorphisme si et seulement si g l'est également. Dans ce cas, l'égalité précédente est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.*

1.2 Orbites et ensembles limites

Dans toute la suite, on considérera un système dynamique topologique discret inversible (X, f) . f sera donc un homéomorphisme de X .

Définition 4 (Orbite). *On définit :*

- l'orbite positive de $x \in X$ comme l'ensemble $O_+(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$
- l'orbite négative de $x \in X$ comme l'ensemble $O_-(x) = \{f^{-n}(x), n \in \mathbb{N}\}$
- l'orbite de x : $O(x) = O_+(x) \cup O_-(x)$.

L'objectif de cette partie va être d'étudier la notion d'orbite. Commençons par la périodicité, qui est la notion la plus forte de récurrence.

Définition 5 (Points périodiques). *Un point $x \in X$ est dit périodique s'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$. La période de x sera le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété. Si on le note q , on dira que x est un point q -périodique de f ou également que l'orbite de x est une q -orbite.*

On notera $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f et $\text{Per}(f)$ l'ensemble des points périodiques de f .

Démontrons quelques propriétés élémentaires sur les orbites périodiques :

Proposition 2. *Soit $x \in X$ un point q -périodique. On a :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $f^n(x) = f^r(x)$ où r est le reste de la division euclidienne de n par q .*
2. $O_+(x) = O(x) = \{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$

Démonstration.

1. Commençons par le cas où $n \in \mathbb{N}$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout $s \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, on a : $f^{qs}(x) = x$. Soit $n = qs + r$ la division euclidienne de n par q . On a :

$$f^n(x) = f^r(f^{qs}(x)) = f^r(x)$$

Si $n < 0$, il suffit d'écrire, si $s < 0$:

$$f^{qs}(x) = f^{qs}(f^{-qs}(x)) = x$$

2. Il suffit de montrer, d'après le point 1. que les $f^r(x)$, pour $0 \leq r \leq q - 1$ sont bien distincts. Par l'absurde, s'il existe $0 \leq n < n' \leq q - 1$ tels que $f^n(x) = f^{n'}(x)$, on écrit :

$$f^{n'-n}(x) = f^{n'-n+q}(x) = f^{q-n}(f^{n'}(x)) = f^{q-n}(f^n(x)) = f^q(x) = x$$

Ceci contredit la minimalité de q .

□

Introduisons la notion d'invariance pour un ensemble :

Définition 6. Une partie $Y \subset X$ est dite positivement invariante si $f(Y) \subset Y$. On peut alors considérer le système dynamique discret restreint $f|_Y$. On dira que Y est négativement invariante si $Y \subset f(Y)$ et globalement invariante si $f(Y) = Y$.

On a les propriétés suivantes :

- Proposition 3.**
1. L'orbite positive d'un point est positivement invariante.
 2. L'orbite d'un point est invariante.
 3. Si Y est positivement invariante, alors son adhérence \bar{Y} l'est également.
 4. La positive invariance est stable par union et par intersection.
 5. L'invariance est stable par union et intersection.

Démontrons seulement le point 3.

Démonstration. Soit $x \in \bar{Y}$, par continuité de f , on sait que si U est un voisinage de $f(x)$, alors $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x . On a donc $f^{-1}(U) \cap Y \neq \emptyset$ et par suite :

$$\emptyset \neq f(f^{-1}(U) \cap Y) \subset U \cap f(Y) \subset U \cap Y$$

On a donc bien $f(x) \in \bar{Y}$ □

Passons maintenant à la notion d'ensemble limite :

Définition 7 (Ensemble ω -limite). On définit l'ensemble ω -limite d'un point $x \in X$, noté $\omega(x)$, comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\omega(x) := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x), n \geq i\}}$$

Remarquons que si X est compact, alors tous les ensembles ω -limites sont non vides comme intersections décroissantes de fermés non vides.

Proposition 4. Soit $x \in X$. L'ensemble $\omega(x)$ est un fermé invariant.

Démonstration. On écrit :

$$\omega(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x), n \geq i\}} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{O_+(f^i(x))}$$

$\omega(x)$ est donc une intersection de fermés positivement invariants, il hérite donc lui-même de ces propriétés (proposition 3).

Pour l'inclusion réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\omega(x)) &= \bigcap_{i \geq 0} f^{-1}(\overline{O_+(f^i(x))}) \\ &\subset \bigcap_{i \geq 0} \overline{O_+(f^{i-1}(x))} \\ &\subset \omega(x) \end{aligned}$$

□

Dans le cas d'un espace métrique, on a une caractérisation séquentielle :

Proposition 5. *Si on suppose que X est en fait un espace métrique, alors y appartient à $\omega(x)$ si et seulement si il existe une sous-suite strictement croissante $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(x) = y$$

On peut ainsi comprendre l'ensemble ω -limite comme les points qui sont atteints en temps infini, c'est-à-dire lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration.

\Leftarrow Immédiat. Cette implication est toujours vraie, même dans le cadre d'un espace topologique.

\Rightarrow Soit $y \in \omega(x)$ et $k > 0$. Par définition de l'ensemble ω -limite, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad B(y, 2^{-k}) \cap \{f^n(x), n \geq m\} \neq \emptyset$$

On construit ainsi une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers strictement croissante telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{n_k}(x) \in B(y, 2^{-k})$$

□

On définit de même l'ensemble α -limite d'un point x :

Définition 8. *Soit $x \in X$. $\alpha(x)$ est défini comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(f^{-n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$.*

Tout comme $\omega(x)$, il s'agit d'un fermé invariant.

On va maintenant introduire une notion de récurrence moins forte que la périodicité :

Définition 9 (Errance).

- $x \in X$ est dit errant s'il existe un voisinage U de x tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$$

Dans le cas contraire, x est dit non-errant.

- Un ouvert U dont tous les éléments sont errants est appelé domaine errant.
- On définit $\Omega(f)$ comme l'ensemble des éléments non-errants de X .

Un point $x \in X$ est non-errant si pour tout voisinage U de x , il existe $y \in U$ qui revient en temps fini dans U .

Proposition 6. *L'ensemble $\Omega(f)$ est un fermé invariant.*

Démonstration. • On montre que $X \setminus \Omega(f)$ est un ouvert. Soit $x \notin \Omega(f)$, on dispose d'un voisinage U de x tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad f^{-n}(U) \cap U = \emptyset$$

On en déduit que $U \cap \Omega(f) = \emptyset$ et donc que $X \setminus \Omega(f)$ est ouvert.

- Soit $x \in \Omega(f)$ et U un voisinage de $f(x)$. Par continuité, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x . Il existe $n \geq 1$ tel que :

$$f^{-n}(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$$

On a donc :

$$\emptyset \neq f(f^{-n-1}(U) \cap f^{-1}(U)) \subset f^{-n}(U) \cap U$$

Ainsi $f(x)$ est non-errant et $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$.

En utilisant un raisonnement analogue avec f^{-1} , on démontre l'inclusion réciproque. \square

Démontrons enfin quelques inclusions qui nous seront utiles par la suite :

Proposition 7. *On a les inclusions suivantes :*

- $\text{Fix}(f) \subset \text{Per}(f) \subset \Omega(f)$
- $\forall x \in X, \quad \omega(x) \subset \Omega(f) \quad \text{et} \quad \alpha(x) \subset \Omega(f)$

Démonstration. On démontre seulement le deuxième point et pour un ensemble ω -limite. Soit $x \in X$ et $y \in \omega(x)$. Soit U un voisinage de y . Alors, par définition $U \cap \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Ainsi, il existe $n > 0$ et $m > n$ tels que $f^n(x) \in U$ et $f^m(x) \in U$. Alors $f^n(x) \in U \cap f^{n-m}(U)$ ce qui implique que $y \in \Omega(f)$. \square

1.3 Propriétés générales

Dans cette partie, nous allons définir des propriétés générales que peut avoir un système dynamique topologique discret et nous verrons que sous certaines hypothèses, elles peuvent se ramener à des propriétés sur les orbites de points.

1.3.1 Transitivité

Définition 10 (Transitivité).

- f est dite positivement transitive si, pour tous ouverts non vides U et V , il existe $n \geq 0$ tel que :

$$U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$$

Cela revient à dire que pour tout ouvert non vide V , $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V)$ est dense dans X .

- f est dite transitive si, pour tous ouverts non vides U et V , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$U \cap f^n(V) \neq \emptyset$$

Cela revient à dire que pour tout ouvert non vide V , $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ est dense dans X .

Remarque : Si f est positivement transitive, alors f est transitive.

On a le résultat suivant :

Proposition 8. *S'il existe $x \in X$ tel que $\omega(x) = X$, alors f est transitive. Dans le cas où X est un espace de Baire séparable, la réciproque est vraie.*

Démonstration. \Rightarrow Soient U et V des ouverts non vides. Puisque $\omega(x) = X$, on dispose d'un entier $n \geq 0$ tel que $f^n(x) \in U$. De même, il existe $n' > n$ tel que $f^{n'}(x) \in V$. Ainsi :

$$f^n(x) \in U \cap f^{n-n'}(V)$$

f est donc positivement transitive.

\Leftarrow Supposons que X est un espace de Baire séparable et que f est positivement transitive. Notons $(O_i)_{i \in I}$ une base dénombrable d'ouverts de la topologie de X . Par positive transitivité de f , on a :

$$\forall i \in I, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \overline{\bigcup_{n \geq m} f^{-n}(O_i)} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(f^{-m}(O_i))} = X$$

Ainsi $Y := \bigcap_{i \in I, m \geq 0} \left(\bigcup_{n \geq m} f^{-n}(O_i) \right)$ est dense grâce à la propriété de Baire. On remarque que :

$$x \in Y \Leftrightarrow \forall i \in I, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq m, \quad f^n(x) \in O_i \quad (0)$$

Montrons enfin que $Y = Z := \{x \in X, \quad \omega(x) = X\}$. Si $\omega(x) = X$, comme les O_i sont des ouverts non vides, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^n(x) \in O_i$. (0) est donc vérifiée, ce qui démontre $Z \subset Y$.

Soient $y \in Y$, $x \in X$ et U un voisinage de x . Il existe $i \in I$ tel que $O_i \subset U$ par définition d'une base d'ouverts. On sait alors que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq m, \quad f^n(y) \in U$$

et donc que :

$$x \in \bigcap_{m \geq 0} \overline{\{f^n(y), n \geq m\}} = \omega(y)$$

□

Remarque : En fait on a montré, dans le cas d'un espace de Baire de séparable, une propriété plus forte que l'existence d'un x tel que $\omega(x) = X$. L'ensemble formé de tels x est en fait dense dans X .

1.3.2 Minimalité

Définition 11 (Minimalité).

- f est dite positivement minimale si les seules parties fermées positivement invariantes sont \emptyset et X .
- f est dite minimale si les seules parties fermées invariantes sont \emptyset et X .
- Soit $Y \subset X$ une partie fermée positivement invariante. Y est dite positivement minimale si $f|_Y$ est positivement minimale.
- Soit $Y \subset X$ une partie fermée invariante. Y est dite minimale si $f|_Y$ est minimale.

Remarque : Si f est positivement minimale, alors f est minimale. De plus, la minimalité est une notion plus forte que la transitivité. On a en fait les équivalences suivantes :

Théorème 1. *Il y a équivalence entre :*

1. f est positivement minimale
2. $\forall x \in X, \overline{O_+(x)} = X$
3. $\forall x \in X, \omega(x) = X$

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: L'ensemble $\overline{O_+(x)}$ est un fermé positivement invariant et non vide. Il est donc égal à X par minimalité positive.

$2 \Rightarrow 3$: On a :

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_+(f^n(x))} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X = X$$

$3 \Rightarrow 1$: Soit $Y \subset X$ un fermé positivement invariant. Si Y est non vide, on prend $y \in Y$. Montrons que $\omega(y) \subset Y$. Puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(y) \in Y$$

On déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{O_+(f^n(y))} \subset Y$$

et donc :

$$\omega(y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_+(f^n(y))} \subset Y$$

Par hypothèse, $X = \omega(y)$. On a donc bien $Y = X$. □

On a une caractérisation similaire pour la minimalité qui se démontre de la même manière :

Théorème 2. *Il y a équivalence entre :*

1. f est minimale
2. $\forall x \in X, \overline{O(x)} = X$

Enfin, on démontre (en utilisant le lemme de Zorn) un théorème d'existence d'une partie fermée invariante minimale dans le cas où l'espace X est compact :

Théorème 3. *Si X est compact, alors il existe une partie fermée invariante minimale.*

Démonstration. Soit \mathcal{F} l'ensemble des parties fermées invariantes de X . $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $X \in \mathcal{F}$.

Montrons que toute famille de \mathcal{F} totalement ordonnée possède un minorant. Soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de \mathcal{F} . L'ensemble $Y := \bigcap_{i \in I} Y_i$ est un fermé invariant (proposition 3). De plus Y est contenu dans tous les Y_i . Pour montrer qu'il est dans \mathcal{F} , il reste à montrer qu'il est non vide. Supposons qu'il soit vide. Alors, par compacité de X , il existe une partie finie $J \subset I$ telle que :

$$\bigcap_{i \in J} Y_i = \emptyset$$

Ceci est une contradiction puisque la famille $(Y_i)_{i \in I}$ est totalement ordonnée. Le lemme de Zorn nous assure de l'existence d'un minorant de \mathcal{F} qui est la partie recherchée. □

1.4 Système dynamique mesuré et notion d'ergodicité

Dans cette partie on va définir la notion de système dynamique mesuré et énoncer un résultat fondamental de convergence des sommes de Birkhoff qu'on ne démontrera pas ici. On pourra consulter [1] pour voir les preuves.

Définition 12. • *Un système dynamique mesuré est la donnée de (X, f, \mathcal{B}, μ) , où (X, \mathcal{B}, μ) est un espace mesuré et f est une application mesurable qui préserve μ , c'est-à-dire que :*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$$

- *Un système dynamique mesuré (X, f, \mathcal{B}, μ) est dit ergodique si pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $f^{-1}(B) = B$, alors $\mu(B) = 0$ ou $\mu(X \setminus B) = 0$. On dira aussi que μ est ergodique.*

Remarque : Il se peut qu'il y ait plusieurs mesures invariantes par f , il faut donc bien préciser laquelle on considère. On notera $\mathcal{M}_f(X)$ l'ensemble des mesures de probabilités invariantes par f . On a le théorème suivant :

Théorème 4. *Dans le cas où X est un espace métrique compact qu'on munit de la tribu borélienne, alors il existe une mesure de probabilité invariante par f ergodique.*

Définition 13. *Soit X un espace métrique compact qu'on munit de la tribu borélienne et $f : X \rightarrow X$ continue. Le système dynamique discret (X, f) est dit uniquement ergodique s'il existe une unique mesure de probabilité invariante par f .*

On a une version améliorée du théorème ergodique de Birkhoff dans le cas où le système dynamique est uniquement ergodique :

Théorème 5. *Si X est un espace métrique compact, alors il y a équivalence entre :*

1. *(X, f) est uniquement ergodique*
2. *Pour toute application continue $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ et pour tout $x \in X$, la suite des sommes de Birkhoff $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(f^k(x)) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une constante lorsque $n \rightarrow +\infty$.*

2 Les homéomorphismes et difféomorphismes du cercle

2.1 Définitions et notations

Tout d'abord le cercle \mathbb{S}^1 est défini comme le quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Le cercle est un compact muni de la topologie quotient héritée de celle de \mathbb{R} . Ainsi si $x \in \mathbb{R}$, on notera $\tilde{x} = x + \mathbb{Z}$ la classe d'équivalence de x . On pourra également confondre \tilde{x} et son unique représentant dans $[0, 1[$ que l'on notera alors $x \pmod{1}$. Le cercle est muni de la distance d définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - y + k|$$

On adoptera également une notation qui facilitera l'écriture de certains résultats. Si $x \in \mathbb{R}$:

$$\|x\| = d(\tilde{x}, \tilde{0})$$

On a alors, si x et y sont des réels :

$$\|x - y\| = d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Un homéomorphisme du cercle f est donc une bijection bi-continue pour cette topologie. En fait, on a une propriété qui découle de l'énoncé analogue valable sur \mathbb{R} : si on suppose seulement que f est une bijection continue du cercle, alors c'est en fait un homéomorphisme.

Si k est un entier, on parlera de C^k -difféomorphisme lorsque l'application est une bijection C^k du cercle et que sa réciproque est également de classe C^k . Lorsqu'on parlera de difféomorphisme sans préciser la régularité, il s'agira d'un C^1 -difféomorphisme.

On déduit le théorème suivant du résultat analogue sur \mathbb{R}

Théorème 6. *Soit k un entier et f est une bijection de classe C^k du cercle telle que f' ne s'annule pas. Alors f est un C^k -difféomorphisme.*

Définition 14 (Relèvement d'un homéomorphisme du cercle).

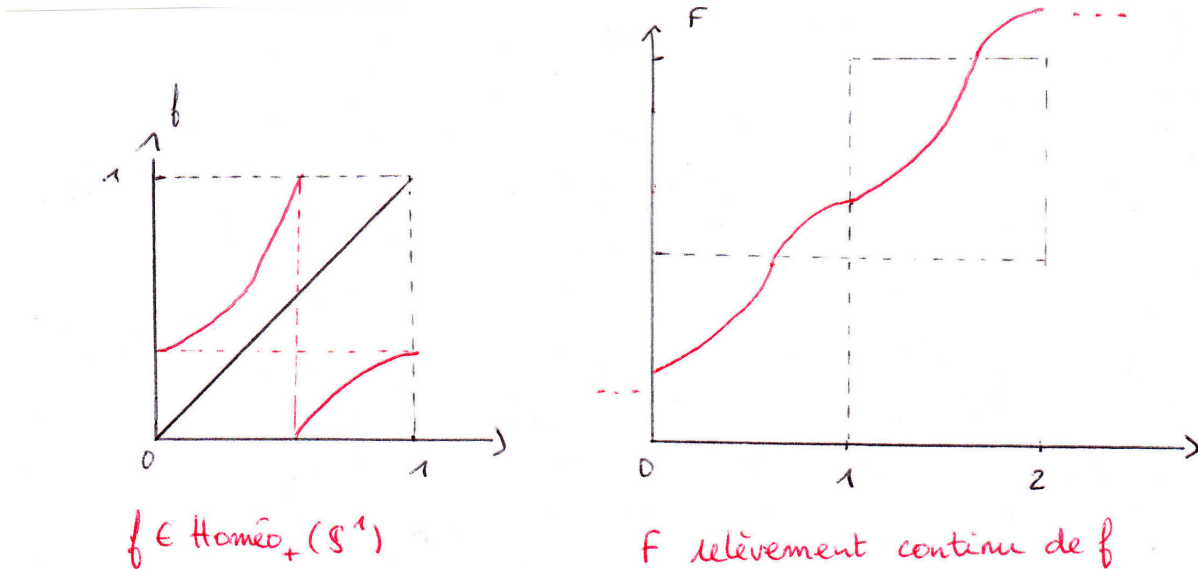
Soit f un homéomorphisme du cercle, on dit que l'application $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est un relèvement de f si :

- l'application passe bien au quotient par \mathbb{Z} , c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x + 1) - F(x) \in \mathbb{Z}$$

- l'application quotientée est f

On s'intéressera seulement au cas où le relèvement considéré est en fait continu. On peut démontrer qu'il en existe toujours un en construisant la fonction sur $[0, 1]$ et en la prolongeant en reproduisant le graphe translaté. Voici une illustration du procédé :



Dans ce cas, l'application :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto F(x+1) - F(x)$$

est continue et à valeurs entières donc constante par le théorème des valeurs intermédiaires. Il existe donc un entier k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+1) = F(x) + k$$

Or on sait que $F|_{[0;1[}$ est injective et que son image ne contient pas deux points traduits d'un entier (en fait l'image de $[0;1[$ est un intervalle de longueur 1). On en déduit que $k \in \{\pm 1\}$.

- Dans le cas où $k = 1$, F est un homéomorphisme croissant qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+1) = F(x) + 1$$

On peut également remarquer que $F - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est 1-périodique. Dans ce cas, on dit que f est un homéomorphisme du cercle qui préserve l'orientation.

- Dans le cas où $k = -1$, on dit que f est un homéomorphisme qui renverse l'orientation.

On s'intéressera principalement au premier cas. En effet, on peut alors définir $\text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ qui est le groupe (pour la composition) des homéomorphismes du cercle qui préservent l'orientation.

On définit également $D_0(\mathbb{S}^1)$ comme le groupe des relèvements continus des éléments de $\text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$. On peut d'ailleurs munir $D_0(\mathbb{S}^1)$ d'une distance, pour laquelle cet espace est complet, définie pour $f, g \in D_0(\mathbb{S}^1)$ par :

$$d(f, g) = \max(\|f - g\|_{\infty}, \|f^{-1} - g^{-1}\|_{\infty})$$

Enfin on notera $\text{Difféo}_+^n(\mathbb{S}^1)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^n sur cercle qui préservent l'orientation.

2.2 Les rotations

Dans cette partie, nous allons définir les rotations sur le cercle. Ce sont les difféomorphismes du cercle les plus simples et pourtant nous verrons dans la suite qu'elles jouent un rôle important pour comprendre les homéomorphismes du cercle.

Définition 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la rotation d'angle \tilde{a} , que l'on notera $R_{\tilde{a}}$ ou R_a par abus, par :

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{S}^1, \quad R_a(\tilde{x}) = \tilde{x} + \tilde{a}$$

La rotation d'angle \tilde{a} est relevée par la translation $T_a : x \mapsto x + a$. Ce sont des C^∞ -difféomorphismes du cercle. On va maintenant démontrer quelques propriétés élémentaires des rotations. On distingue deux propriétés des orbites de point de R_a selon la rationalité ou non de a . On a :

Proposition 9. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ non nul avec p et q premiers entre eux. Alors tout point x du cercle est un point périodique de R_a , où $a = \frac{p}{q}$, et de période q .

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{S}^1$, on a, puisque p est un entier :

$$R_a^q(x) = x + \tilde{p} = x$$

On a démontré que x est un point périodique de R_a . Supposons qu'il soit q' -périodique, avec $q' < q$. On a alors $R_a^{q'}(x) = x$, c'est-à-dire :

$$x + \widetilde{q'a} = x$$

On en déduit que $q'a \in \mathbb{Z}$ ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction $a = \frac{p}{q}$ □

Passons maintenant au cas où a n'est pas rationnel. On a :

Proposition 10. *Si a n'est pas rationnel, R_a est positivement et négativement minimale.*

Démonstration. D'après le théorème 1, il suffit, pour la minimalité positive, de montrer que pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$\overline{O_+(x)} = \mathbb{S}^1$$

Soit $x \in \mathbb{S}^1$ et $\epsilon > 0$. Notons, si $n \in \mathbb{N}$, $x_n = R^n(x)$. On découpe le cercle en intervalles de longueur inférieure à ϵ et le principe des tiroirs nous assure qu'il existe deux entiers n et $m > n$ tels que :

$$0 < d(x_n, x_m) < \epsilon$$

La stricte positivité vient du fait que la rotation n'a pas de points périodiques. La suite $(R^{(m-n)k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc ϵ -dense dans le cercle ce qui permet de conclure sur la densité des orbites positives.

On raisonne de même pour la minimalité négative. □

2.3 Nombre de rotation de Poincaré

Nous allons maintenant présenter un invariant par semi-conjugaison : le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle. Cet outil a été introduit par Henri Poincaré entre 1881 et 1886. Il nous sera très utile pour étudier les homéomorphismes du cercle qui n'ont pas de points périodiques.

Pour commencer, il faut définir le nombre de rotation d'un relèvement continu d'un homéomorphisme du cercle. On va démontrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 7 (Nombre de rotation). *Soit $F \in D_0(\mathbb{S}^1)$, il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

$$-1 < F^k(x) - (x + k\rho) < 1$$

De plus, pour tout $k \geq 1$, il existe un réel x tel que :

$$F^k(x) - x = k\rho$$

ρ vérifie également que pour tout réel x :

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{F^k(x)}{k}$$

Ce nombre ρ est appelé nombre de rotation de F et il est noté $\rho(F)$.

Comme $x + k\rho = T_\rho^k(x)$, on peut interpréter l'inégalité du théorème en disant que F^k reste proche de T_ρ^k

Démonstration.

Posons $\varphi = F - Id_{\mathbb{R}}$. Puisque $F \in D_0(\mathbb{S}^1)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x+1) = F(x+1) - x - 1 = F(x) - x = \varphi(x)$$

φ est donc 1-périodique.

- Montrons maintenant que pour tous réels x et y , on a $-1 < \varphi(y) - \varphi(x) < 1$

L'ensemble $\mathbb{Z} - y$ rencontre l'intervalle $[x; x+1[$ en exactement un point que l'on nomme y' . Par croissance de F et périodicité de φ , on a

$$x + \varphi(x) \leq y' + \varphi(y') < x + 1 + \varphi(x)$$

On a alors que :

$$-1 < x - y' \leq \varphi(y') - \varphi(x) < x + 1 - y' \leq x + 1 - x = 1$$

- On va appliquer le point précédent aux applications $F^k - Id_{\mathbb{R}}$, si $k \geq 1$. En notant

$$m_k = \min_{x \in \mathbb{R}} F^k(x) - x \quad \text{et} \quad M_k = \max_{x \in \mathbb{R}} F^k(x) - x$$

qui sont bien définies car les applications considérées sont périodiques. On déduit que :

$$\forall k \geq 1, \quad 0 \leq M_k - m_k < 1$$

Si k et k' sont des entiers strictement positifs et x un réel, on écrit $F^{k+k'}(x) - x = F^k(F^{k'}(x)) - F^{k'}(x) + F^{k'}(x) - x$ et on a alors :

$$\begin{aligned} m_k + m_{k'} &\leq F^{k+k'}(x) - x \leq M_k + M_{k'} \\ m_k + m_{k'} &\leq m_{k+k'} \leq M_{k+k'} \leq M_k + M_{k'} \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate permet d'affirmer que pour tous $k, k' \geq 1$, on a :

$$M_{kk'} \leq k' M_k \quad \text{et} \quad m_{kk'} \geq k m_{k'}$$

Les deux inégalités précédentes permettent d'écrire que :

$$\frac{m_{k'}}{k'} \leq \frac{m_{kk'}}{kk'} \leq \frac{M_{kk'}}{kk'} \leq \frac{M_k}{k}$$

D'où :

$$\sup_{k \geq 1} \left\{ \frac{m_k}{k} \right\} \leq \inf_{k \geq 1} \left\{ \frac{M_k}{k} \right\}$$

Comme pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{M_k}{k} - \frac{m_k}{k} < \frac{1}{k}$, on a en fait :

$$\sup_{k \geq 1} \left\{ \frac{m_k}{k} \right\} = \inf_{k \geq 1} \left\{ \frac{M_k}{k} \right\} := \rho$$

On a alors que pour tout $k \geq 1$, $m_k \leq k\rho \leq M_k$. L'application $F^k - Id_{\mathbb{R}}$ étant continue, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et on obtient ainsi $z_k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$F^k(z_k) - z_k = k\rho$$

En appliquant à nouveau le premier point de la preuve aux applications $F^k - Id_{\mathbb{R}}$ en un point x quelconque et à z_k , on obtient :

$$-1 < F^k(x) - x - k\rho < 1$$

On a prouvé l'encadrement voulu pour $k \in \mathbb{N}$, le cas où $k = 0$ étant immédiat. Pour démontrer l'encadrement dans le cas où $k < 0$, on applique l'encadrement au point $F^k(x)$ à l'application F^{-k} ce qui donne :

$$-1 < x - F^k(x) + k\rho < 1$$

□

Maintenant qu'on a défini le nombre de rotation, nous allons donner quelques propriétés. Commençons par trois équivalences :

Proposition 11. *Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 1$, on a :*

1. $\rho(F) = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \quad F^q(x) = x + p$
2. $\rho(F) > \frac{p}{q} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^q(x) > x + p$
3. $\rho(F) < \frac{p}{q} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad F^q(x) < x + p$

Démonstration.

On démontre seulement 1. et 2., le point 3. se démontrant par un raisonnement analogue :

1. \Rightarrow D'après le théorème précédent, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $F^q(x) - x = q\rho$

\Leftarrow Si $n \in \mathbb{N}$, alors $F^{qn}(x) = x + np$. On obtient que :

$$\frac{F^{qn}(x) - x}{qn} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p}{q}$$

ce qui permet de conclure.

2. \Rightarrow Par contraposée, s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $F^q(x) \leq x + p$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{qn}(x) \leq x + np$$

En divisant par qn et en laissant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $\rho \leq \frac{p}{q}$

\Leftarrow Le même raisonnement que précédemment permet d'affirmer que $\rho(F) \geq \frac{p}{q}$. On peut exclure le cas d'égalité grâce au point 1.

□

Nous allons maintenant démontrer d'autres propriétés faisant intervenir le nombre de rotation.

Proposition 12.

1. $\rho(T_a) = a$

2. Si $F, G \in D_0(\mathbb{S}^1)$ commutent, alors $\rho(F \circ G) = \rho(F) + \rho(G)$
3. $\forall F \in D_0(\mathbb{S}^1), \forall p \in \mathbb{Z}, \rho(F + p) = \rho(F)$
4. $\forall F \in D_0(\mathbb{S}^1), \forall q \in \mathbb{Z}, \rho(F^q) = q\rho(F)$
5. $F \leq G \Rightarrow \rho(F) \leq \rho(G)$

Démonstration.

1. On écrit :

$$\rho(T_a) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{T_a^k(0)}{k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{ka}{k} = a$$

2. On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} -1 &< F^k \circ G^k(0) - G^k(0) - k\rho(F) < 1 \\ -1 &< G^k(0) - k\rho(G) < 1 \end{aligned}$$

On déduit que :

$$-2 < (F \circ G)^k(0) - k(\rho(F) + \rho(G)) < 2$$

D'où :

$$\rho(F \circ G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(F \circ G)^k(0)}{k} = \rho(F) + \rho(G)$$

3. Il suffit d'appliquer le point 2.
4. Idem
5. Montrons par récurrence que pour tout $k \geq 1$ on a $F^k \leq G^k$. L'initialisation est immédiate. Supposons l'inégalité voulue pour un entier $k \geq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse de récurrence et par croissance de G , on a :

$$F^{k+1}(x) = F(F^k(x)) \leq G(F^k(x)) \leq G(G^k(x)) = G^{k+1}(x)$$

On déduit que $\rho(F) \leq \rho(G)$.

□

Le nombre de rotation est en fait un invariant à semi-conjugaison près :

Théorème 8. Si $F, G \in D_0(\mathbb{S}^1)$ sont semi-conjugués par $H \in D_0(\mathbb{S}^1)$. Alors ils ont le même nombre de rotation.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{H(F^n(x))}{n} = \frac{G^n(H(x))}{n}$$

On sait que le membre de droite converge vers $\rho(G)$ quand $n \rightarrow +\infty$ d'après le théorème 7. On va montrer que le membre de gauche converge vers $\rho(F)$ ce qui impliquera l'égalité.

Écrivons :

$$H(F^n(x)) = H(F^n(x) - \lfloor n\rho(F) \rfloor + \lfloor n\rho(F) \rfloor) = H(F^n(x) - \lfloor n\rho(F) \rfloor) + \lfloor n\rho(F) \rfloor$$

Or le théorème 7 donne l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-1 < F^n(x) - x - n\rho(F) < 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x - 2 < F^n(x) - \lfloor n\rho(F) \rfloor < x + 2$$

Ainsi la suite $(F^n(x) - \lfloor n\rho(F) \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et donc, par continuité de H sur \mathbb{R} :

$$\frac{H(F^n(x) - \lfloor n\rho(F) \rfloor)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On conclut en remarquant que :

$$\frac{\lfloor n\rho(F) \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \rho(F)$$

□

Nous allons maintenant définir le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle qui préserve l'orientation.

Définition 16.

Soit $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$. On définit le nombre de rotation de f que l'on note également $\rho(f)$ par :

$$\rho(f) = \widetilde{\rho(F)}$$

où F désigne un relèvement continu de f .

Le nombre de rotation est bien défini car il ne dépend pas du relèvement continu. En effet, deux relèvements continus diffèrent d'un entier et le point 2. de la proposition 12 nous assure que leur nombre de rotation diffère du même entier.

On dira que $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ est de nombre de rotation rationnel s'il existe $k \in \mathbb{Q}$ tel que $\rho(f) = \tilde{k}$.

2.4 Dynamique quand le nombre de rotation est rationnel

Le point crucial est l'étude du cas où le nombre de rotation d'un élément de $D_0(\mathbb{S}^1)$ est nul car on pourra s'y ramener par composition et translation. On a le théorème suivant :

Proposition 13. Soit $F \in D_0(\mathbb{S}^1)$. $\rho(F) = 0$ si et seulement si F possède un point fixe.

Dans ce cas, les ensembles α -limite et ω -limite de n'importe quel réel sont des éléments de $\text{Fix}(F)$

Démonstration.

- Supposons que $\rho(F) = 0$, d'après le théorème 7, on dispose de $x \in \mathbb{R}$, tel que

$$F(x) - x = \rho(F) = 0$$

Réciproquement, si x est un point fixe de F alors pour tout entier k , $F^k(x) = x$ et donc

$$\rho(F) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x}{k} = 0$$

- $\text{Fix}(F)$ est un fermé invariant par T_1 . Soit $I =]a; b[$ une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus \text{Fix}(F)$. On distingue deux cas :

- (a) Si $F - Id_{\mathbb{R}}$ est strictement positive sur I , alors pour tout $x \in I$ la suite $(F^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement croissante et converge vers b en $+\infty$ et vers a en $-\infty$.
- (b) Si $F - Id_{\mathbb{R}}$ est strictement négative sur I , alors pour tout $x \in I$ la suite $(F^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement décroissante et converge vers a en $+\infty$ et vers b en $-\infty$.

Les ensembles α -limite et ω -limite d'un réel x sont les extrémités de la composante connexe de $\mathbb{R} \setminus \text{Fix}(F)$ qui contient x .

□

Remarque :

- La preuve nous apprend le comportement précis des orbites de points. En effet, si x est un point fixe de F alors $O(x) = \{x\}$. Dans les autres cas, la suite $(F^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement monotone et converge en $\pm\infty$ vers les extrémités de la composante connexe de $\mathbb{R} \setminus \text{Fix}(F)$, en respectant la monotonie de la suite.
- En outre, les seuls points périodiques de F sont des points fixes. En effet, si x est un point périodique qui n'est pas un point fixe, on a une contradiction avec la stricte monotonie de la suite des itérées de x .

On peut maintenant passer au cas général, c'est-à-dire lorsque le nombre de rotation est rationnel. On a le :

Théorème 9. Soit $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ et p et q premiers entre-eux. Alors on a :

1. f possède une q -orbite
2. Toutes les orbites périodiques de f sont des q -orbites.
3. Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, les ensembles $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont des orbites périodiques.

Démonstration.

1. On considère l'unique relèvement continu F de f vérifiant $\rho(F) = \frac{p}{q}$. L'application $F^q - p$ possède un point fixe car elle est de nombre de rotation nul (propositions 12 et 13). f^q a donc un point fixe qui est une q -orbite de f .

Supposons que \tilde{x} soit un point q' -périodique de f . Il existe $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $F^{q'}(x) = x + p'$. L'application $F^{qq'} - qp'$ admet un point fixe, donc son nombre de rotation est nul :

$$q'p - qp' = 0$$

Comme p et q sont premiers entre eux, on dispose de $r \geq 1$ tel que $q' = rq$ et $p' = rp$. x est donc un point r -périodique de $F^q - p$. D'après la remarque précédente, il s'agit forcément d'un point fixe puisque $\rho(F^q - p) = 0$ et donc $r = 1$.

2. On l'a démontré en 1.
3. Soit $x \in \mathbb{S}^1$, il existe un point fixe y de f^q tel que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{kq}(x) = y$$

y est un point q -périodique de f et son orbite est $\omega(x)$. On raisonne de même avec $\alpha(x)$

□

Remarque : Si $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ est de nombre de rotation égal à $\tilde{0}$ (c'est-à-dire que f admet un point fixe), alors pour tout $x \in \mathbb{S}^1 \setminus \text{Fix}(f)$, les ensembles α et ω -limites sont les extrémités de la composante connexe de $\mathbb{S}^1 \setminus \text{Fix}(f)$ contenant x .

On peut préciser le comportement de la suite des itérées de points. En effet on a le :

Théorème 10 (Propriété de pistage des orbites). *Si $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ et p et q premiers entre-eux. Alors, pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, il existe $y \in \mathbb{S}^1$ q -périodique tel que :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$$

On dira que l'orbite de x est asymptotique à une q -orbite.

Démonstration.

La preuve du théorème précédent fournit l'existence de $y \in \mathbb{S}^1$ q -périodique tel que $f^{qn}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Soit $1 \leq r \leq q-1$, on a par continuité de f^r que :

$$f^{qn+r}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^r(y)$$

D'où le résultat. □

On va utiliser le théorème 9 pour démontrer un résultat que l'on utilisera plus tard sur les homéomorphismes qui renversent l'orientation.

Théorème 11. *Soit f un homéomorphisme du cercle qui renverse l'orientation. Alors f possède exactement deux points fixes, et éventuellement des 2-orbites mais pas de n -orbites avec $n > 2$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(x) \neq x$. On considère les arcs de cercle ouverts (p, x) et (x, q) maximaux tels que :

$$(p, x) \cap f((p, x)) = \emptyset \quad \text{et} \quad (x, q) \cap f((x, q)) = \emptyset$$

Ils sont bien définis puisque f renverse l'orientation. On sait, puisque f renverse l'orientation, que (p, x) et $f((p, x))$ sont contenus dans une composante connexe de $\mathbb{S}^1 \setminus \{x, f(x)\}$ et que (x, q) et $f((x, q))$ sont contenus dans l'autre composante connexe. Par maximalité, on doit avoir nécessairement $f(p) = p$ et $f(q) = q$. Ainsi p et q sont les deux seuls points fixes de f .

L'application f^2 préserve l'orientation et possède deux points fixes. Elle est donc de nombre de rotation nul et toutes ses orbites périodiques sont des points fixes d'après le théorème 9. Ce sont des 2-orbites pour f . □

2.5 Dynamique quand le nombre de rotation est irrationnel

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où le nombre de rotation de l'homéomorphisme est irrationnel, ce qui autorise une dynamique plus complexe. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 12 (Théorème de semi-conjugaison de Poincaré).

Soit $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ tel que $\rho(f) = \tilde{\rho} \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors il existe $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une surjection continue qui préserve l'orientation du cercle telle que :

$$h \circ f = R_\rho \circ h$$

Démonstration.

- Soit $F \in D_0(\mathbb{S}^1)$ un relèvement continu de f et fixons $x \in \mathbb{R}$. L'application

$$C_1 : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto & q\rho - p \end{cases}$$

est injective par irrationalité de ρ . De plus, son image est $\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$ qui est dense dans \mathbb{R} .

- L'application

$$C_2 : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto & F^q(x) - p \end{cases}$$

est injective. En effet, si $F^q(x) - p = F^{q'}(x) - p'$, alors

$$F^{q-q'}(F^{q'}(x)) - F^{q'}(x) = p - p'$$

On déduit que $f^{q-q'}$ possède un point fixe, ce qui n'est possible que si $q = q'$ car f n'a pas de points périodiques. D'où $q = q'$ et par suite $p = p'$.

- On peut définir l'application $H = C_1 \circ C_2^{-1}$ comme une bijection de $C_2(\mathbb{Z}^2)$ sur $\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$. Remarquons que ces deux ensembles sont invariants par T_1 et que T_1 et H commutent.

En effet, si $x \in C_2(\mathbb{Z}^2)$, alors en notant $(p, q) = C_2^{-1}(x)$, on a :

$$H(T_1(x)) = H(x + 1) = C_1(C_2^{-1}(x + 1)) = C_1(p - 1, q) = q\rho - p + 1 = T_1(H(x))$$

De la même manière, on remarque que :

$$H \circ F = T_\rho \circ H$$

- Montrons que H^{-1} est croissante (H le sera donc aussi). Supposons $q\rho - p < q'\rho - p'$, alors $(q - q')\rho < p - p'$. On distingue trois cas :

- (a) Si $q = q'$ alors $p > p'$ et on a bien :

$$H^{-1}(q\rho - p) = F^q(x) - p < F^{q'}(x) - p' = H^{-1}(q'\rho - p')$$

- (b) Si $q' < q$, alors $\rho < \frac{p-p'}{q-q'}$. D'après la proposition 11, on a :

$$F^{q-q'}(F^{q'}(x)) - F^{q'}(x) < p - p'$$

Ce qui est bien la conclusion attendue.

(c) Si $q < q'$, alors $\rho > \frac{p'-p}{q'-q}$. D'après la proposition 11, on a :

$$F^{q'-q}(F^q(x)) - F^q(x) > p' - p$$

- On étend la fonction H à \mathbb{R} en remarquant que grâce à la croissance de H et à la densité de son image $\mathbb{Z} + \rho\mathbb{Z}$ dans \mathbb{R} , on a :

$$\sup_{y \leq x, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y) = \inf_{y \geq x, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y) := H(x)$$

H est donc une application croissante et dont l'image est dense dans \mathbb{R} . H est donc continue et surjective. Elle vérifie, si $x \in \mathbb{R}$:

$$H(x+1) = \sup_{y \leq x+1, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y) = \sup_{y \leq x, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y+1) = \sup_{y \leq x, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y)+1 = H(x)+1$$

Cette égalité implique que H relève une surjection qui préserve l'orientation $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$

Elle vérifie également que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H(F(x)) = \sup_{y \leq F(x), y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y) = \sup_{y \leq x, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(F(y)) = \sup_{y \leq x, y \in C_2(\mathbb{Z}^2)} H(y)+\rho = H(x)+\rho$$

Cela revient à dire, en passant au quotient, que :

$$h \circ f = R_\rho \circ h$$

□

Nous allons maintenant démontrer un théorème qui précise la dynamique des homéomorphismes sans points périodiques en faisant intervenir l'ensemble des points non errants :

Théorème 13. *Soit $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation irrationnel, il existe une partie fermée $X \subset \mathbb{S}^1$ vérifiant :*

1. $X = \Omega(f)$
2. Toute composante connexe de $\mathbb{S}^1 \setminus X$ est errante.
3. X est la seule partie invariante minimale de f .
4. $\forall x \in \mathbb{S}^1, \alpha(x) = \omega(x) = X$
5. Si $X \neq \mathbb{S}^1$, alors X est un ensemble de Cantor, c'est-à-dire un ensemble totalement discontinu dont tous les points sont d'accumulation, donc sans points isolés.
6. $X = \mathbb{S}^1$ si et seulement si f est conjugué à une rotation d'angle irrationnel.

Démonstration. 1. On pose $X := \Omega(f)$

2. Immédiat par définition de X
3. Remarquons déjà que l'existence de l'ensemble minimal invariant est assurée par le théorème 3 car le cercle est compact. Soit X' une partie non vide, fermée et invariante par f . Si $X' \neq \mathbb{S}^1$, alors son complémentaire est une union d'intervalles ouverts (les composantes connexes de $\mathbb{S}^1 \setminus X'$) que l'on note $J = (J_i)_{i \in I}$. Alors l'application

$$\begin{cases} J & \rightarrow & J \\ I & \mapsto & f(I) \end{cases}$$

est bien définie. Aucun intervalle n'est périodique, en effet dans le cas contraire, les extrémités d'un tel intervalle seraient périodiques ce qui contredirait l'irrationalité du nombre de rotation de f . Ainsi les composantes connexes de $\mathbb{S}^1 \setminus X$ sont errantes et $X = \Omega(f) \subset X'$. X est donc la seule partie invariante minimale de f .

4. Soit $x \in \mathbb{S}^1$. On sait que $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont inclus dans $\Omega(f)$ d'après la proposition 7. Or comme ce sont également des fermés invariants, ils contiennent $X = \Omega(f)$. D'où l'égalité.
5. On remarque tout d'abord que la frontière de X : $\partial(X)$, est un fermé invariant inclus dans X et non vide car X est fermé non vide. Il est donc égal à X par minimalité. X est donc totalement discontinu.

De plus, l'ensemble des points d'accumulation de X est également un fermé invariant par f , il est non vide par compacité du cercle, c'est donc X tout entier.

6. Si f est conjuguée à une rotation irrationnelle, f est minimale car la rotation l'est et on a donc $X = \mathbb{S}^1$.

Réciproquement, on raisonne par contraposée : si f est semi-conjuguée sans être conjuguée à une rotation irrationnelle, on va montrer que X est en fait égal à l'ensemble des points $x \in \mathbb{S}^1$ tels que h n'est pas constante sur un voisinage de x . Notons X' cet ensemble. Il est fermé par définition. Si $x \notin X'$, alors il existe U un voisinage de x tel que h soit constante sur U . Or

$$\forall y \in U, \quad h(f(y)) = R_{\rho(f)}(h(y))$$

h est donc constante sur $f(U)$ qui est un voisinage de $f(x)$ car f est un homéomorphisme. Ainsi $f(\mathbb{S}^1 \setminus X') \subset \mathbb{S}^1 \setminus X'$. On montre de la même manière l'inclusion réciproque en utilisant f^{-1} . X' est donc un fermé invariant, non vide par hypothèse. On a donc montré que $X \subset X'$. Pour montrer qu'on a en fait égalité, on remarque que $h(X)$ est un fermé non vide (par continuité de h et car on est sur un compact). Il est également invariant par $R_{\rho(f)}$ et donc égal à \mathbb{S}^1 par minimalité des rotations d'angle irrationnel (proposition 10). Comme h est croissante, on déduit que h est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{S}^1 \setminus X$.

□

Remarque : On peut préciser un peu le point 6. En effet les composantes connexes de $\mathbb{S}^1 \setminus X$ sont les images réciproques par h des valeurs prises plusieurs fois par h . Ces intervalles sont errants et les itérées d'un tel intervalle sont ordonnées comme l'orbite d'un point par la rotation $R_{\rho(f)}$.

2.6 Théorème de Denjoy

On s'intéresse ici à une condition suffisante pour que la semi-conjugaison à une rotation d'un homéomorphisme du cercle sans points périodiques soit en fait une conjugaison. Commençons par donner une définition :

Définition 17. Une application $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation bornée si il existe $C > 0$ tel que pour toute famille cycliquement ordonnée sur le cercle $(x_i)_{i \in \mathbb{F}_q}$, on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{F}_q} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq C$$

On notera $\text{Var}(f)$ une telle constante C .

On aura également besoin d'un lemme :

Lemme 1. *Si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est à variation bornée, alors $\ln \circ f$ l'est également.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{F}_q}$ une famille cycliquement ordonnée. Si on note $m = \min_{x \in \mathbb{S}^1} f(x) > 0$, alors par inégalité des accroissements finis :

$$\sum_{i \in \mathbb{F}_q} |\ln(f(x_{i+1})) - \ln(f(x_i))| \leq \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathbb{F}_q} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \frac{1}{m} \text{Var}(f)$$

□

Passons maintenant au résultat de conjugaison à une rotation de Denjoy :

Théorème 14 (Théorème de Denjoy). *Soit $f \in \text{Difféo}_+^1(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation irrationnel et tel que $f' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ soit à variation bornée. Alors f est conjugué à $R_{\rho(f)}$.*

Démonstration.

Étape 1 : On montre qu'il existe une suite strictement croissante $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers positifs, telle que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ l'intervalle fermé I_n de \mathbb{S}^1 qui joint x à $f^{q_n}(x)$ vérifie que les itérées $f^k(I_n)$ sont deux à deux disjointes pour $0 \leq k \leq q_n$.

On se ramène, par semi-conjugaison, au cas où f est une rotation irrationnelle R et pour $x = \tilde{0}$. Notons, pour $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = R^k(\tilde{0})$ et posons $q_1 = 1$. On définit ensuite la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ par récurrence en posant :

$$q_{n+1} = \inf \{q > q_n, \quad d(\tilde{0}, x_q) < d(\tilde{0}, x_{q_n})\}$$

qui est bien définie par minimalité de R . Par construction, on a :

$$1 \leq q \leq q_n \Rightarrow d(\tilde{0}, x_q) < d(\tilde{0}, x_{q_n})$$

On note I_n l'intervalle joignant $\tilde{0}$ et x_{q_n} . Par l'absurde, supposons qu'il existe $q < q' \leq q_n$ tels que $R^q(I_n) \cap R^{q'}(I_n) \neq \emptyset$, ce qui se réécrit $R^{q''}(I_n) \cap I_n \neq \emptyset$, en posant $q'' = q' - q$. Or $d(\tilde{0}, x_{q''}) > d(\tilde{0}, x_{q_n})$, donc $x_{q''} \notin I_n$. Le même raisonnement montre que $x_{q''} \notin -I_n$ et donc que $x_{q_n+q''} \notin I_n$. Les deux extrémités de $R^{q''}(I_n)$ ne sont pas dans I_n , ce qui est une contradiction.

Étape 2 : On montre qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$\frac{1}{C} \leq (f^{q_n})'(x)(f^{-q_n})'(x) \leq C$$

On écrit $x = f^{q_n}(y)$ pour un $y \in \mathbb{S}^1$. Pour démontrer le résultat, il suffit de majorer $|\ln((f^{q_n})'(f^{q_n}(y))(f^{-q_n})'(f^{q_n}(y)))|$.

Or on peut montrer par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1, \quad (f^n)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x))$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
|\ln((f^{q_n})'(f^{q_n}(y))(f^{-q_n})'(f^{q_n}(y)))| &= \left| \ln \left(\prod_{i=0}^{q_n-1} \frac{f'(f^{q_n+i}(y))}{f'(f^{q_n-i-1}(y))} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \ln(f'(f^{q_n+i}(y))) - \sum_{i=0}^{q_n-1} \ln(f'(f^i(y))) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{q_n-1} |(f'(f^{q_n+i}(y))) - \ln(f'(f^i(y)))| \\
&\leq \text{Var}(\ln \circ f')
\end{aligned}$$

En effet, la dernière majoration a lieu en appliquant le lemme 1 car la famille

$$\{y, f^{q_n}(y), f(y), f^{q_n+1}(y), \dots, f^{q_n-1}(y), f^{2q_n-1}(y)\}$$

est cycliquement ordonnée d'après la première étape.

On peut donc prendre $C = e^{\text{Var}(\ln \circ f')}$

Étape 3 : On montre que f n'a pas d'intervalle errant, ce qui impliquera que $\Omega(f) = \mathbb{S}^1$ et d'après le théorème 13, que f est conjuguée à la rotation d'angle $\rho(f)$.

Par l'absurde, supposons que f ait un intervalle errant I . On note λ la mesure de Lebesgue sur le cercle.

On écrit, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\lambda(f^{q_n}(I)) + \lambda(f^{-q_n}(I)) &= \int_I (f^{q_n})' d\lambda + \int_I (f^{-q_n})' d\lambda \\
&= \int_I ((f^{q_n})' + (f^{-q_n})') d\lambda \\
&\geq 2 \int_I ((f^{q_n})'(f^{-q_n})')^{1/2} d\lambda \\
&\geq 2C^{-1/2} \lambda(I)
\end{aligned}$$

Or puisque I est errant, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(f^{q_n}(I)) + \lambda(f^{-q_n}(I)) = 0$$

Ce qui est une contradiction. □

On a le corollaire suivant :

Théorème 15. Soit $f \in \text{Difféo}_+^2(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation irrationnel, alors f est conjuguée à $R_{\rho(f)}$.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'une application C^1 est à variation bornée car on pourra appliquer le théorème précédent avec f' qui est supposée C^1 . Soit $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors, si $(x_i)_{i \in \mathbb{F}_q}$ est une famille cycliquement ordonnée du cercle, on a par inégalité des accroissements finis :

$$\sum_{i \in \mathbb{F}_q} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \sum_{i \in \mathbb{F}_q} Cd(x_{i+1}, x_i) \leq C$$

□

3 Application : suite formée de la dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite

Dans cette partie on va s'intéresser à la dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite de point. Donnons-nous une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$: à quelle condition existe-t-il un difféomorphisme du cercle f et $x \in \mathbb{S}^1$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = f'(f^n(x)) \tag{1}$$

Dans la suite on présentera des conditions nécessaires sur la suite et également des conditions suffisantes, sans parvenir à donner une caractérisation de ces suites.

3.1 Quelques conditions nécessaires

On suppose dans cette partie qu'il existe un difféomorphisme du cercle f et $x \in \mathbb{S}^1$ qui satisfont (1).

3.1.1 Premières conditions nécessaires

Tout d'abord remarquons que la suite est nécessairement bornée puisque f' est supposée continue et que \mathbb{S}^1 est compact.

Intéressons-nous maintenant au signe de la suite. Puisque f est un difféomorphisme du cercle, sa dérivée est de signe constant par monotonie, et elle ne s'annule pas. On déduit ainsi que la suite doit garder un signe constant. On peut préciser un peu le comportement de la suite dans le cas où celle-ci est négative. En effet dans ce cas, le difféomorphisme du cercle renverse l'orientation et admet donc 2 points fixes et éventuellement des 2-orbites (théorème 11). De plus, chaque orbite est asymptotique à un point fixe ou à une 2-orbite. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 16. *Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement négative, alors il existe deux réels strictement négatifs y_1 et y_2 tels que :*

$$\begin{aligned} a_{2n} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_1 \\ a_{2n+1} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_2 \end{aligned}$$

On a le même comportement lorsque $n \rightarrow -\infty$, les constantes pouvant être différentes.

Ainsi dans le cas où la suite est négative, on a un comportement de convergence ou d'attraction sur une 2-orbite. La suite a donc au plus 2 valeurs d'adhérence lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Dans la suite on supposera la suite positive donc $f \in \text{Difféo}_+(\mathbb{S}^1)$: il s'agit du cas le plus intéressant puisqu'on peut avoir un difféomorphisme sans orbite périodique.

3.1.2 Dichotomie sur les valeurs d'adhérence de la suite

Théorème 17. *Dans le cas où on suppose que f est un C^2 -difféomorphisme, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence (quand $n \rightarrow +\infty$) de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est soit fini, soit un intervalle qui est $f'(\mathbb{S}^1)$.*

Démonstration. 1. Si $\rho(f) = \frac{\tilde{p}}{q} \in \mathbb{Q}$, alors les orbites de f sont asymptotiques à des q -orbites. Soit $y \in \mathbb{S}^1$ le point q -périodique tel que $\omega(y) = \omega(x)$. f' est continue sur un compact donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. On déduit, grâce à la propriété de pistage des orbites, que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f'(f^n(x)) - f'(f^n(y))| < \epsilon$$

Dans ce cas, $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a au plus q valeurs d'adhérence qui sont les $f'(f^n(y))$.

2. Si $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, f est conjuguée à R_α d'après le théorème 15 . De plus, on sait grâce au théorème 13 que :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \quad \omega(x) = \mathbb{S}^1$$

On a alors que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est $f'(\mathbb{S}^1)$. En effet, soit $y \in \mathbb{S}^1$. Puisqu'on est sur un espace métrique, la proposition 5 nous assure qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$f^{n_i}(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$$

On a alors, par continuité de f' :

$$a_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f'(y)$$

Comme \mathbb{S}^1 est connexe et que f' est continue, l'ensemble des valeurs d'adhérence est un connexe de \mathbb{R} donc un intervalle. □

Par exemple, la suite définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$a_n = \begin{cases} 2 + \cos(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 5 + \cos(\frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

n'est pas réalisée comme suite de la dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite.

En effet, sachant que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$. On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est $[1; 3] \cup [4; 6]$ qui n'est ni fini, ni connexe.

3.1.3 Propriétés de quasi-périodicité

Dans cette partie on étudie la quasi-périodicité de la suite. Commençons pas traiter le cas où le nombre de rotation de f est rationnel. On a le :

Théorème 18. Si $\rho(f) = \frac{\tilde{p}}{q} \in \mathbb{Q}$, alors il existe des réels b_0, \dots, b_{q-1} tels que :

$$\forall r \leq q-1, \quad a_{qm+r} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} b_r$$

La suite est asymptotiquement k -périodique, avec $k \leq q$, et on a le même résultat quand $m \rightarrow -\infty$, les constantes peuvent cependant être différentes.

Démonstration. On sait que l'orbite de x est asymptotique à une q -orbite $O(y)$. La propriété de pistage des orbites ainsi que l'uniforme continuité de f' sur \mathbb{S}^1 permettent d'affirmer que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f'(f^n(x)) - f'(f^n(y))| < \epsilon$$

On a le résultat voulu en posant, si $i \leq q-1$

$$b_i = f'(f^i(y))$$

□

Nous allons essayer de généraliser cette forme de quasi-périodicité au cas où le nombre de rotation est irrationnel. Pour cela nous avons besoin d'introduire une autre notion de quasi-périodicité qui n'est pas seulement asymptotique contrairement au cas précédent : la presque périodicité au sens de Bohr.

Définition 18. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite à valeurs dans un espace métrique (E, d) et $\epsilon > 0$. Un entier $T \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est dit une ϵ -presque-période de u si :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad d(u_{T+p}, u_p) < \epsilon$$

On note $\mathcal{E}(u, \epsilon)$ l'ensemble des ϵ -presque-périodes de la suite u .

Définition 19. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'un espace métrique (E, d) est dite Bohr-presque-périodique si l'ensemble $\mathcal{E}(u, \epsilon)$ est bien réparti pour tout $\epsilon > 0$ c'est-à-dire que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{E}(u, \epsilon) \cap \llbracket n, n + N \rrbracket \neq \emptyset$$

Avant d'énoncer le théorème concernant la presque périodicité de la suite si le nombre de rotation est irrationnel, démontrons un lemme qui nous sera utile dans la preuve du théorème :

Lemme 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de \mathbb{S}^1 Bohr-presque-périodique et $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{R}$ une application continue, alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est Bohr-presque-périodique.

Démonstration. f est uniformément continue par le théorème de Heine.

Soit $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ associé à l'uniforme continuité de f . On a :

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^1, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Si $N \in \mathcal{E}(u, \eta)$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad d(u_{N+p}, u_p) < \eta$$

D'où :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad |f(u_{N+p}) - f(u_p)| < \epsilon$$

On a donc montré que $\mathcal{E}(u, \eta) \subset \mathcal{E}(f(u), \epsilon)$

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est Bohr-presque-périodique, l'ensemble $\mathcal{E}(u, \eta)$ est bien réparti et donc $\mathcal{E}(f(u), \epsilon)$ est également bien réparti.

La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc une suite réelle Bohr-presque-périodique. \square

Énonçons maintenant le théorème :

Théorème 19. *Si le nombre de rotation de f est irrationnel et si $f \in \text{Difféo}_+^2(\mathbb{S}^1)$, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est Bohr-presque-périodique.*

Démonstration.

Étape 1 : Montrons que si $y \in \mathbb{S}^1$, alors la suite $u = (R_\alpha^n(y))_{n \in \mathbb{Z}}$ est Bohr-presque-périodique.

Comme pour tout $T > 0$, et pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a :

$$d(R_\alpha^p(y), R_\alpha^{T+p}(y)) = \|p\alpha - (p+T)\alpha\| = \|T\alpha\|$$

On veut montrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exists T \in \llbracket n, n+N \rrbracket, \quad \|T\alpha\| < \epsilon \quad (**)$$

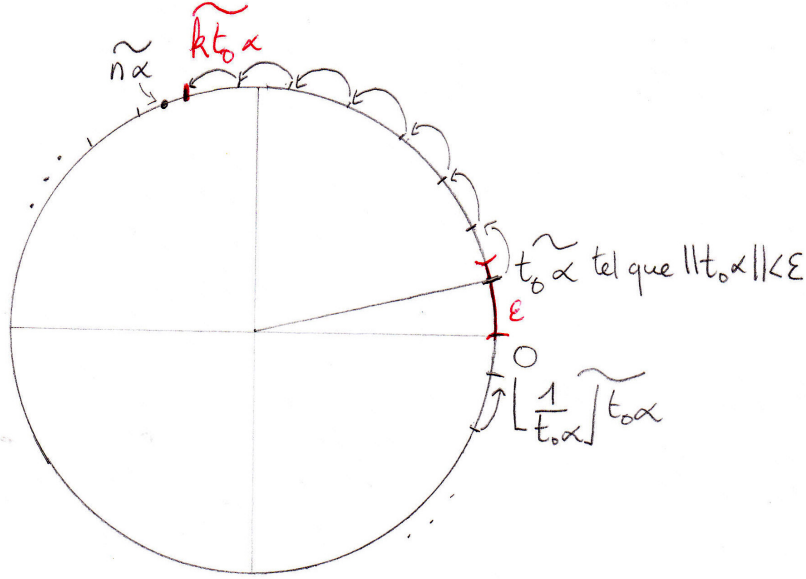
Soit $\epsilon > 0$. Par minimalité positive de R_α , toutes les orbites positives de R_α sont denses dans \mathbb{S}^1 . On dispose donc d'un entier $t_0 > 0$ tel que : $0 \leq \|t_0\alpha\| < \epsilon$. Comme α est irrationnel, on a en fait :

$$0 < \|t_0\alpha\| < \epsilon$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Encore par minimalité positive de la rotation d'angle $|t_0\alpha|$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|k|t_0\alpha| - n\alpha\| < \epsilon$$

Le point important est que l'on peut majorer k . En effet comme on parcourt le cercle avec un angle $|t_0\alpha| < \epsilon$, on peut choisir $k \leq \lfloor \frac{1}{t_0\alpha} \rfloor + 1$, la borne correspondant au cas où on parcourt entièrement le cercle avant d'être ϵ -proche de $n\alpha$. Voici une illustration :



On a donc, en posant $T = n - kt_0$:

$$\|T\alpha\| < \epsilon$$

Avec $M = |t_0| \left(\lfloor \frac{1}{t_0\alpha} \rfloor + 1 \right)$, on a : $T \in [n - M, n + M]$ L'entier $N = 2M$ convient et (**) est démontré (N ne dépend pas de n).

Étape 2 :

Comme on a supposé que f est un C^2 -difféomorphisme, on dispose (théorème 15) d'une bijection continue $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que :

$$h \circ f = R_\alpha \circ h$$

D'après l'étape 1, la suite $(R_\alpha^n(h(x)))_{n \in \mathbb{Z}}$ est Bohr-presque-périodique. Or la fonction $f' \circ h^{-1}$ est uniformément continue car elle est continue sur un compact. Le lemme précédent permet d'affirmer que la suite $(f' \circ h^{-1} \circ R_\alpha^n(h(x)))_{n \in \mathbb{Z}}$, qui n'est autre que $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, est Bohr-presque-périodique. \square

On a donc, quel que soit le cas, une forme de périodicité : que ce soit de la quasi-périodicité asymptotique dans le cas où le nombre de rotation est rationnel ou que ce soit de la Bohr-presque-périodicité dans le cas irrationnel. Donnons un exemple de suite qui ne vérifie aucune de ces 2 conditions.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas asymptotiquement périodique (quand $n \rightarrow +\infty$) car la distance entre deux carrés successifs n'est pas bornée. Cette suite n'est pas non plus Bohr-presque-périodique. En effet supposons qu'elle le soit. On dispose alors d'un entier $N > 0$ tel

que :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad |u_{N+p} - u_p| < \frac{1}{2}$$

Alors pour tout entier relatif p , on a $u_{N+p} = u_p$. Ceci se traduit par l'équivalence

$$N + p \text{ est un carré} \Leftrightarrow p \text{ est un carré}$$

Or si on prend $p = N^2$ alors $N + N^2$ devrait être un carré ce qui n'est pas le cas puisque le carré suivant N^2 est $(N + 1)^2 > N^2 + N$. On a donc une contradiction : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas Bohr-presque-périodique.

3.1.4 Convergence au sens de Cesàro de la suite

On va admettre le théorème suivant qui nous permettra d'obtenir la convergence au sens de Cesàro de la suite sous certaines hypothèses :

Théorème 20. *Si $f \in \text{Homéo}_+(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation irrationnel. Alors f est uniquement ergodique.*

Pour avoir une preuve de ce théorème, on pourra se référer à [1]

On déduit le :

Théorème 21. *Dans le cas où on suppose que f a un nombre de rotation irrationnel, alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ converge au sens de Cesàro lorsque $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que qu'il existe $c \geq 0$ tel que :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème ergodique de Birkhoff (théorème 5) à l'application f' qui est continue. \square

Remarque : On peut appliquer le théorème précédent si la suite a un nombre infini de valeurs d'adhérence par exemple.

3.2 Cas où la suite est constante

Avant tout, démontrons un lemme qui va nous être utile dans toutes nos constructions.

Lemme 3. *Soient $[a, b]$ un intervalle, y_1, y_2 et x des réels strictement positifs. Il existe une fonction $g \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, strictement positive telle que :*

1. $g(a) = y_1$
2. $g(b) = y_2$
3. $\forall k > 0, \quad g^{(k)}(b) = g^{(k)}(a) = 0$
4. $\int_a^b g = x$

Démonstration. Étape 1 : On construit une fonction g seulement positive

On va introduire des fonctions plateaux que l'on va utiliser pour construire notre fonction g . On définit :

$$\psi : \begin{cases} x > 0 & \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \\ x \leq 0 & \mapsto 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont nulles en 0. On définit ensuite, si $a < b$:

$$\psi_{a,b} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \psi(x-a)\psi(b-x) \end{cases}$$

$\psi_{a,b}$ est de classe C^∞ et son support est $[a, b]$.

Enfin, en intégrant les fonctions précédentes et en divisant par leur norme L^1 , on obtient des fonctions $\varphi_{a,b}$ de classe C^∞ telles que :

1. Si $a < b$, alors $\varphi_{a,b}|_{]-\infty, a]} = 0$, $\varphi_{a,b}|_{]b, +\infty]} = 1$ et $\|\varphi_{a,b}\|_\infty = 1$
2. Si $b < a$, alors $\varphi_{a,b}|_{]-\infty, b]} = 1$, $\varphi_{a,b}|_{]a, +\infty]} = 0$ et $\|\varphi_{a,b}\|_\infty = 1$

Posons maintenant $\epsilon = \min(\frac{|b-a|}{3}, \frac{x}{3\max(y_1, y_2)})$. On construit g de la manière suivante :

- Sur $[a, a + \epsilon]$ $g = y_1\varphi_{a+\epsilon, a}$
- Sur $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ $g = \lambda\psi_{a+\epsilon, b-\epsilon}$
- Sur $[b - \epsilon, b]$ $g = y_2\varphi_{b-\epsilon, b}$

λ est choisi de manière à vérifier $\int_a^b g = x$, ce qui est possible puisque

$$\int_a^{a+\epsilon} g + \int_{b-\epsilon}^b g \leq \frac{2x}{3}$$

La fonction g ainsi construite est bien C^∞ : les raccords en $a + \epsilon$ et en $b - \epsilon$ le sont car de chaque côté toutes les dérivées existent et sont nulles.

Étape 2 : On utilise les fonctions précédentes pour avoir la stricte positivité

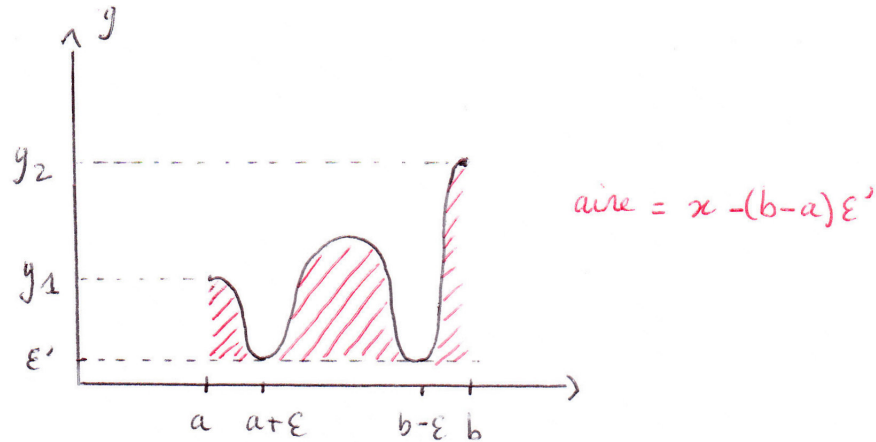
Pour cela on fixe $\epsilon' > 0$ tel que :

- $|b - a|\epsilon' \leq \frac{x}{2}$
- $\epsilon' < \min(y_1, y_2)$

Par l'étape 1, on construit g telle que :

1. $g(a) = y_1 - \epsilon'$
2. $g(b) = y_2 - \epsilon'$
3. $\int_a^b g = x - |b - a|\epsilon'$

La fonction $g + \epsilon'$ convient. En voici une représentation :



□

Théorème 22. Si $c > 0$, il existe $f \in \text{Difféo}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ et $x \in \mathbb{S}^1$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c = f'(f^n(x))$$

Démonstration. On va construire f' . D'après le lemme précédent, il existe une fonction g strictement positive et de classe C^∞ sur $[0, 1]$ telle que :

1. $g(0) = c$
2. $g(1) = c$
3. $\forall k > 0, \quad g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1) = 0$
4. $\int_a^b g = 1$

On prolonge g à \mathbb{R} de manière périodique. Le prolongement est C^∞ puisque les dérivées de g sont nulles en les entiers par construction avec les fonctions plateaux. Soit F la primitive de g s'annulant en 0. F est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x+1) = F(x) + 1$$

F relève donc un C^∞ -difféomorphisme f de \mathbb{S}^1 . Or 0 est un point fixe de f et $f'(0) = c$, ce qui achève la preuve.

□

3.3 Cas où la suite est périodique

Dans le cas où la suite qu'on se donne est périodique, un simple dessin permet de se rendre compte qu'on peut réaliser la suite comme dérivée d'un difféomorphisme le long d'une orbite de même période que la suite. De manière précise, on a le :

Théorème 23. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite strictement positive et q -périodique, alors il existe $f \in \text{Difféo}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation rationnel et $x \in \mathbb{S}^1$ qui satisfont (1).

Démonstration. On va construire f' sur $[0, 1]$. Commençons par subdiviser $[0, 1]$ en q intervalles de longueur $\frac{1}{q}$. Posons, pour $k \leq q$ $x_k = \frac{k}{q}$. Le lemme 3 permet de construire g_k sur $[x_k, x_{k+1}]$ vérifiant :

1. $g_k(x_k) = a_k$
2. $g_k(x_{k+1}) = a_{k+1}$
3. $\forall j > 0, g_k^{(j)}(x_k) = g_k^{(j)}(x_{k+1}) = 0$
4. $\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k = \frac{1}{q}$

On définit ainsi une application g sur $[0, 1]$ égale à g_k sur $[x_k, x_{k+1}]$. Cette application est C^∞ car les g_k le sont et les dérivées à gauche et à droite en les $\frac{k}{q}$ sont toutes égales à 0. On prolonge g à \mathbb{R} par périodicité. L'application obtenue reste C^∞ pour la même raison.

Montrons que l'application $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{q} + \int_0^x g$ est le relèvement continu d'un C^∞ -difféomorphisme qui convient. Il est clair, comme dans la preuve dans le cas où la suite est constante, que l'application quotientée f est bien un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{S}^1 . On a par construction : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad f^k(0) = \frac{\tilde{k}}{q}$.

f et $x = 0$ satisfont bien (1), ce qui achève la preuve. □

3.4 Cas où la suite converge

Théorème 24. *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite non constante, strictement positive, qui converge (quand $n \rightarrow +\infty$) vers un réel $c \geq 0$. S'il existe $f \in \text{Difféo}_+(\mathbb{S}^1)$ et $x \in \mathbb{S}^1$ tels que :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = f'(f^n(x))$$

Alors $0 < c \leq 1$

Si la convergence a lieu lorsque $n \rightarrow -\infty$, alors $c \geq 1$

Démonstration. On commence par remarquer que $c \neq 0$. En effet dans le cas contraire, on extrait par compacité du cercle une sous-suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $(f^{n_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers a . On obtient $f'(a) = 0$, ce qui n'est pas possible.

Dans le cas où la convergence a lieu lorsque $n \rightarrow +\infty$, on distingue deux cas :

1. Si $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, il existe $q > 0$ tel que l'orbite positive de x soit asymptotique à une q -orbite y . On a nécessairement $x \neq y$: dans le cas contraire la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ serait périodique et convergente donc constante ce qui n'est pas le cas. La suite $(f^{qn}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y et n'est pas constante. y est donc un point fixe attractif de f^q .

De plus, comme c est la seule valeur d'adhérence de la suite, on a :

$$f'(y) = f'(f(y)) = \dots = f'(f^{q-1}(y)) = c$$

On a donc :

$$|(f^q)'(y)| = |f'(y) \times f'(f(y)) \times \dots \times f'(f^{q-1}(y))| \leq 1$$

On a donc $c \leq 1$.

2. Si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, supposons $c > 1$ et considérons X la partie minimale invariante de f .
- (a) Supposons $X = \mathbb{S}^1$, alors si $y \in \mathbb{S}^1$, on dispose d'une suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, telle que $f^{n_i}(x) \rightarrow y$ (proposition 5). Puisque la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c , on en déduit que $f'(x) = c$. Ainsi $f'(\mathbb{S}^1) = \{c\}$. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que f soit relevée par $F : x \mapsto cx + d$. Pour que F passe bien au quotient, il faut $c = 1$.
- (b) Dans le cas où $X \neq \mathbb{S}^1$, soit $I = (a, b)$ une composante connexe de $\mathbb{S}^1 \setminus X$. On sait que :
- $a, b \in X$
 - I est un intervalle errant.

De plus, le même raisonnement que dans le point précédent montre que : $f'(X) = \{c\}$

Soit $\epsilon > 0$ tel que $c - \epsilon > 1$. Par uniforme continuité de f' sur \mathbb{S}^1 , on dispose de $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^1, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon$$

Or la longueur des intervalles $f^n(I)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ car I est errant. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors la longueur de $f^n(I)$ est strictement inférieure à η .

Comme les bords des intervalles $f^n(I)$ sont dans X par invariance, f' vaut c sur les bords de ces intervalles. On a donc :

$$n \geq N \Rightarrow \forall x \in f^n(I), \quad f'(x) \geq c - \epsilon > 1$$

L'égalité des accroissements finis appliquée à un relèvement continu F de f implique que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |F^{N+k}(b) - F^{N+k}(a)| \geq (c - \epsilon)^k |F^N(b) - F^N(a)|$$

La longueur des intervalles $f^n(I)$ ne tend pas vers 0 ce qui est une contradiction. On a donc $c \leq 1$

Dans le cas où la convergence a lieu lorsque $n \rightarrow -\infty$, puisque $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f^{-1})'(f^{-n}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-n-1}(x))}$$

On applique le premier point à l'application f^{-1} :

$$(f^{-1})'(f^{-n}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{c} \leq 1$$

Ainsi $c \geq 1$. □

On a donc trouvé une condition nécessaire sur la constante dans le cas où la suite converge et n'est pas constante. Étudions l'autre implication, en se restreignant au cas où la suite est indexée par \mathbb{N} . On a le :

Théorème 25. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui converge vers une constante $0 < c < 1$, alors il existe $f \in \text{Difféo}_+(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation nul et $x \in \mathbb{S}^1$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = f'(f^n(x))$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ tel que $c + \epsilon < 1$. Choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=k}^{\infty} c^n + c^k \frac{c + \epsilon}{1 - c - \epsilon} \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Comme la suite converge vers c , on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - c| < \epsilon$$

On construit ensuite f' de la manière suivante :

- Sur $[0, c^k]$, on construit f' grâce au lemme 3 en fixant $f'(0) = a_0$ et $f'(c^k) = a_1$, et $\int_0^{c^k} f' = c^{k+1}$
On a ainsi, en choisissant la primitive vérifiant $f(0) = c^k$, que $f^2(0) = f(c^k) = c^k + c^{k+1}$.
Ensuite, on construit f' sur $[c^k; c^k + c^{k+1}]$ en imposant :

$$f'(c^k) = a_1, \quad f'(c^k + c^{k+1}) = a_2, \quad \int_{c^k}^{c^k + c^{k+1}} f' = c^{k+2}$$

Ceci donne : $f^3(0) = f(c^k + c^{k+1}) = c^k + c^{k+1} + c^{k+2}$

- On procède de même jusqu'au rang N et on obtient ainsi :

$$\forall n \leq N, \quad f^n(0) = \sum_{j=k}^{k+n-1} c^j \quad \text{et} \quad a_n = f'(f^n(0))$$

f' est donc construite sur le segment $[0; f^N(0)]$ et $f^{N+1}(0) = \sum_{j=k}^{k+N} c^j$.

- On construit f' de manière affine sur $[f^N(0), f^{N+1}(0)]$ en fixant $f'(f^{N+1}(0)) = a_{N+1}$.
On a alors :

$$f^{N+2}(0) = f^{N+1}(0) + \int_{f^N(0)}^{f^{N+1}(0)} f' = \sum_{j=k}^{k+N} c^j + c^{k+N} \left(\frac{a_N + a_{N+1}}{2} \right)$$

On continue ainsi de suite en construisant étape par étape f' de manière affine.

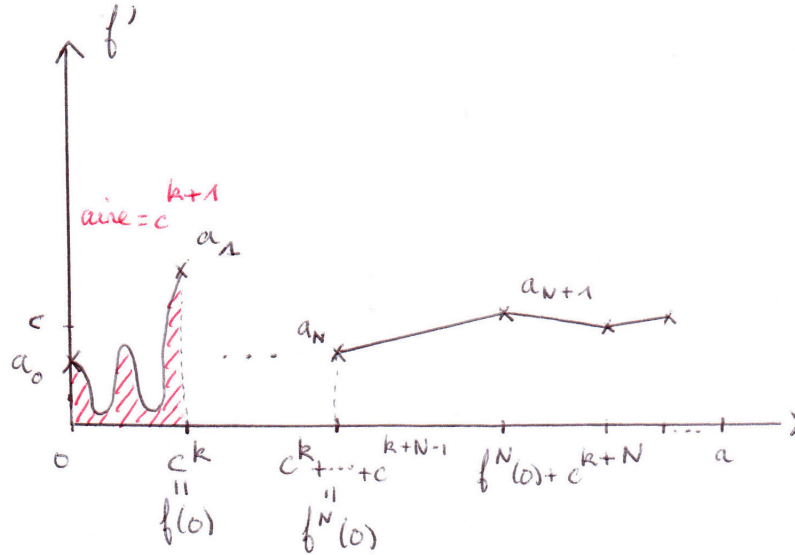
- On montre alors par récurrence que :

$$\forall j \geq 2, \quad f^{N+j}(0) = f^{N+1}(0) + c^{k+N} \sum_{l=0}^{j-2} \prod_{m=N}^{N+l} \left(\frac{a_m + a_{m+1}}{2} \right)$$

D'après (*) on a :

$$\begin{aligned} \forall j \geq 2, \quad f^{N+j}(0) &\leq f^{N+1}(0) + c^{k+N} \sum_{l=0}^{\infty} (c + \epsilon)^{l+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La suite $(f^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive strictement croissante et majorée par $\frac{1}{2}$: elle converge donc vers un réel $a \leq \frac{1}{2}$. Voici une illustration du procédé de construction :



f' est bien définie et continue sur $[0, a)$. Posons $f'(a) = c$. Montrons que ce prolongement est continu.

Soit $\eta > 0$, on dispose de $K > 0$ tel que :

$$n \geq K \Rightarrow |a_n - c| < \eta$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[0, a)$ convergeant vers a . A partir d'un certain rang, $x_n \in [f^K(0), a)$ et donc, puisque f' est affine entre les valeurs successives de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que :

$$|f'(x_n) - c| < \eta$$

Ceci permet d'assurer la continuité de f' sur $[0, a]$. Grâce au lemme 3, on prolonge f' sur $[a, 1]$ avec $f'(a) = c$ et $f'(1) = a_0$ et en fixant $\int_a^1 f' = 1 - \int_0^a f' > 0$. Comme précédemment, on prolonge f' à \mathbb{R} de manière continue par périodicité et on obtient un C^1 -difféomorphisme f de \mathbb{S}^1 . On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = f'(f^n(0))$$

a est un point fixe de f puisque $f^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Son nombre de rotation est donc nul.

□

La régularité C^1 du difféomorphisme f du théorème précédent est optimale dans le sens où si on exige une régularité supérieure, on a une restriction importante sur la vitesse de convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ lorsque l'orbite associée est asymptotique à un point fixe strictement attractif, comme c'est le cas dans la preuve du théorème précédent. On a en effet le :

Théorème 26. *Soient $f \in \text{Difféo}_+^2(\mathbb{S}^1)$ et $x \in \mathbb{S}^1$. Si on suppose que l'orbite positive de x est asymptotique à un point fixe a qui vérifie $|f'(a)| < 1$, alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f'(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge de manière au plus géométrique. Il existe $K \geq 0$ et $N' \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall C \in]|f'(a)|, 1[, \quad n \geq N' \Rightarrow |a_n - f'(a)| < KC^n$$

Démonstration. Soit $C \in]|f'(a)|, 1[$

- Montrons d'abord qu'il existe $N > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(f^{N+n}(x), a) \leq C^n d(f^N(x), a)$$

Soit $\eta > 0$ tel que :

$$d(x, a) < \eta \Rightarrow |f'(x)| < C$$

Puisque $f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, il existe $N > 0$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow d(f^n(x), a) < \eta$$

On raisonne par récurrence sur n , l'initialisation étant immédiate. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité voulue. Alors on a, grâce à l'inégalité des accroissements finis appliquée à un relèvement continu de f :

$$d(f^{N+n+1}(x), a) = d(f^{N+n+1}(x), f(a)) \leq C d(f^{N+n}(x), a)$$

- On a, par inégalité des accroissements finis, $\eta' > 0$ tel que :

$$d(x, a) < \eta' \Rightarrow |f'(x) - f'(a)| \leq (|f''(a)| + 1)d(x - a)$$

Comme $f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, il existe $N' > N$ tel que :

$$\forall n \geq N', |f'(f^n(x)) - f'(a)| \leq (|f''(a)| + 1)d(f^N(x), a)C^{n-N}$$

D'où le résultat.

□

Conclusion

Ce stage m'a permis d'étudier les bases de la théorie des systèmes dynamiques et de les appliquer dans le cadre de l'étude des homéomorphismes et difféomorphismes du cercle. On a vu que le nombre de rotation de Poincaré permet une classification des homéomorphismes du cercle et qu'il joue un rôle clé dans leur étude, notamment en ce qui concerne les orbites de points. C'est la dichotomie qui se présente selon la rationalité ou non du nombre de rotation qui est importante. La troisième partie présente les résultats obtenus sur la question posée au début du stage. Il fallait caractériser les suites qui correspondent à la dérivée d'un difféomorphisme du cercle le long d'une orbite. Seules des conditions nécessaires ou suffisantes ont été trouvées.

Les principales conditions nécessaires trouvées sont les suivantes :

- Si le difféomorphisme est de nombre de rotation rationnel, alors il y a un phénomène d'attraction vers une suite périodique.
- Si le difféomorphisme est de nombre de rotation irrationnel, la suite converge au sens de Cesàro et, dans le cas où le difféomorphisme est de classe C^2 , la suite est Bohr-presque-périodique et l'ensemble des valeurs d'adhérence est connexe.
- Si la suite converge vers c quand n tend vers $+\infty$, alors $c \leq 1$.

De même, les principales conditions suffisantes obtenues sur la suite sont :

- La périodicité et la stricte positivité.
- La convergence vers $c < 1$ lorsque n tend vers $+\infty$, si on indexe la suite seulement par \mathbb{N} .

Cependant des questions restent encore sans réponse. On aimerait par exemple généraliser la Bohr-presque-périodicité dans le cas C^1 , c'est-à-dire lorsque le difféomorphisme est seulement conjugué à une rotation. De plus, dans le cas où la suite converge, le seul cas qu'il reste à traiter pour savoir si on a une condition nécessaire et suffisante est le cas où la suite converge vers 1.

Références

- [1] LE CALVEZ, P. Polycopié du cours de Master 2 de Systèmes dynamiques : [http://mathfond.math.upmc.fr/2015-16/fiches/CoursSysDyn\(2015-2016\).pdf](http://mathfond.math.upmc.fr/2015-16/fiches/CoursSysDyn(2015-2016).pdf)
- [2] DE MELO, W., VAN STRIEN, S. *One-dimensional Dynamics*, Springer, 1993, <http://www.imperial.ac.uk/~svanstri/Files/demelo-strien.pdf>
- [3] HERMAN, M. *Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Mémoire de la S.M.F, 1976, http://www.numdam.org/article/MSMF_1976__46__181_0.pdf, 1976.