Licence 3 de Mathématiques
EVNCD

ENS Rennes
2022-2023

Révisions : Calcul différentiel

Exercice 1. *Une fonction explicite*

On considère

$$f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Étudier la continuité puis la différentiabilité de f.

Exercice 2. *Isométries infinitésimales d'un espace euclidien*

Soit E un espace euclidien, i.e., un espace de Hilbert de dimension finie sur $\mathbf{R}$, non réduit à zéro. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ la norme associée. On considère une isométrie infinitésimale de E, i.e., une application (a priori non linéaire) $f : E \to E$ de classe C^1 sur E vérifiant

$$\forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle df(x).h, df(x).h \rangle = \langle h, h \rangle$$

1. Montrer
$$\forall x \in E, \forall h_1, h_2 \in E, \quad \langle df(x).h_1, df(x).h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle$$
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $df(x) : E \to E$ est un isomorphisme bicontinu
3. Déterminer la norme $\|df(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)}$ pour tout $x \in E$
4. **(Cours)** Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable vectorielle à valeurs vectorielles
5. En déduire que
$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$
6. **(Cours)** Énoncer le théorème d'inversion locale
7. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 dans E, et un voisinage ouvert V_{x_0} de $f(x_0)$ dans E, tels que f soit un C^1-difféomorphisme de U_{x_0} sur V_{x_0}
8. **(Cours)** Énoncer le théorème de différentiation des fonctions composées pour des fonctions de variables vectorielles à valeurs vectorielles
9. Démontrer
$$\forall x \in U_{x_0}, \quad d(f^{-1})(f(x)) = (df(x))^{-1}$$
10. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert $\widetilde{U}_{x_0}$ de x_0 dans E tel que $\widetilde{U}_{x_0} \subset U_{x_0}$ et
$$\forall x, y \in \widetilde{U}_{x_0}, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$
11. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \|x\|^2 \in \mathbf{R}_+$ est C^1 sur E, et calculer sa différentielle
12. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$.
    (a) Justifier que $\omega = E \setminus F$ est un ouvert de E.

(b) On considère l'application $d(.,F) : \omega \to \mathbb{R}_+$, définie par $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$. Montrer que cette application est C^1 sur ω et calculer sa différentielle.

13. On considère l'application $\phi : E \times E \to \mathbf{R}_+$ définie par $\phi(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que ϕ admet une différentielle partielle par rapport à y et que
$$\forall x, y \in E, \forall h \in E, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y).h = -2\langle f(x) - f(y), df(y).h\rangle$$
14. Montrer que $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ admet une différentielle partielle par rapport à x et calculer
$$\forall x, y \in E, \forall h_1, h_2 \in E, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y).h_1\Big).h_2$$
15. En utilisant la question 10, en déduire
$$\forall x, y \in \widetilde{U}_{x_0}, \forall h_1, h_2 \in E, \quad \langle df(x).h_1, df(y).h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle$$
16. Calculer $\|df(x).h_1 - df(y).h_2\|^2$ pour tous $x, y \in \widetilde{U}_{x_0}$ et $h_1, h_2 \in E$. En déduire
$$\forall x, y \in \widetilde{U}_{x_0}, \quad df(x) = df(y)$$
17. Soient $x_0 \in E$ et $\Omega_{x_0} = \{x \in E : \ df(x) = df(x_0)\}$. Montrer que Ω_{x_0} est sous-ensemble fermé, ouvert et non vide de E
18. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifiant $\|A(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, et $b \in E$ tels que
$$\forall x \in E, \quad f(x) = A(x) + b$$
19. En déduire que f est un C^∞-difféomorphisme de E sur E
20. Donner des exemples (non triviaux) d'isométries infinitésimales de $\mathbf{R}^3$
21. Proposer des hypothèses supplémentaires pour que les conclusions de cet exercice restent valables dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie sur $\mathbf{R}$

Exercice 3. *Transformation d'une suite l^p*

Soient $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction nulle en 0. On pose :
$$F : \left\{ \begin{array}{cl} l^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}) & \to l^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x = (x_n)_{n\geq 0} & \mapsto F(x) = (f(x_n))_{n\geq 0} \end{array} \right. .$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.