Licence 3 de Mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2022-2023

TD 11 : Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$

Exercice 1. *Ensembles qui ne sont pas des sous-variétés*

Montrer que les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ définis par les équations suivantes ne sont pas des sous-variétés.

1. $y = |x|$
2. $x^2 = y^2$
3. $x^2 = y^3$.

Exercice 2. *Rencontre d'un cylindre et d'une sphère*

Soit $R > 0$ et différent de 2. Montrer que l'ensemble :

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0\},$$

définit une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ dont on précisera la dimension. Expliquer graphiquement pourquoi on doit éviter $R = 2$.

Exercice 3. *Sous-variétés matricielles*

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$ et déterminer son espace tangent en un point.
2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est une sous-variété de $\mathbf{R}^{n^2}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et déterminer son espace tangent en un point.

Exercice 4. *Distance de l'origine à une sous-variété*

On considère l'ensemble :

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\, xyz = 1\}.$$

Montrer que M est une sous-variété dont on précisera la dimension et calculer la distance de M à l'origine.

Exercice 5. *Espace tangent à une courbe*

On considère l'ensemble :

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\, 4xy + 2xz + 4y - z = xy + 2x - z = 0\}.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ dont on précisera la dimension.
2. Donner son espace tangent à l'origine et en donner une base.

Exercice 6. *To be or not to be*

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathbf{R}^3$ ou $\mathbf{R}^2$, et préciser leur dimension si c'est le cas.

1. $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ z = 2x - 2(x^2 + y)\}$
2. $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ xy = 0\}$
3. $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \geq 0,\ y > 0.\}$
4. $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y^2 = x^4\}$

Exercice 7. *Extrema libres et liés*

On considère $M := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^4 + y^4 = 1\}$. Soit

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Montrer que M est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbf{R}^2$ en utilisant la définition par carte locale grace au théorème d'inversion locale qu'on rappellera.
2. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbf{R}^2$.
3. Calculer le minimum de f sur l'ensemble M avoir avoir justifié qu'il est atteint.