Équation de la chaleur périodique

Références : H. Dym et H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals* – `http://www.normalesup.org/~havret/` [1]

Leçons : 222, 235, 241, 246, *209*

Notons $\mathcal{C}^0_{2\pi,x}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}_x$ et 2π-périodiques par rapport à la seconde variable x.

Théorème 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction continue, 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u du problème suivant :

- $u \in \mathcal{C}^0_{2\pi,x}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $u \in \mathcal{C}^2_{2\pi,x}(\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$, $\partial_t u(t,x) = \partial^2_x u(t,x)$
- $u(0,.) = f$

De plus, la solution u est en fait dans $\mathcal{C}^\infty_{2\pi,x}(\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Démonstration : On raisonne par analyse-synthèse.

- **Étape 1 : Analyse et unicité.**

Supposons qu'une telle solution u existe. Puisque pour tout $t > 0$, $u(t,.)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, cette fonction est donc somme de sa série de Fourier. On note pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t,x) e^{-inx}\, dx.$$

On a alors :

$$\forall t > 0,\, \forall x \in \mathbb{R},\, u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}.$$

Or les fonctions c_n sont C^1 sur $\mathbb{R}^+_*$. En effet, le théorème de régularité des intégrales à paramètres s'applique car :

(a) $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $u(.,x)e^{-inx}$ est C^1.

(b) Si $0 < a < b$, alors :

$$\forall t \in [a,b],\, \forall x \in \mathbb{R},\, |u(.,x)e^{-inx}| \leq \sup_{t \in [a,b],\, x \in \mathbb{R}} |\partial^2_x u(t,x)|,$$

puisque u vérifie l'équation de la chaleur. Cette constante est finie car u est supposée $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}$ et périodique en x.

1. Merci à Théo et Thibault pour m'avoir fait découvrir cette version du développement !

Ainsi si on fixe $t > 0$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_t u(t,x) e^{-inx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^2 u(t,x) e^{-inx} \, dx \\ &= -n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t,x) e^{-inx} \, dx \quad \text{après deux IPPs} \\ &= -n^2 c_n(t). \end{aligned}$$

Il existe alors $C_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$c_n(t) = C_n e^{-n^2 t}.$$

Le théorème de continuité sous l'intégrale ainsi que les hypothèses faites montrent que les fonctions c_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ si bien que :

$$c_n(t) = c_n(f) e^{-n^2 t}.$$

On a bien montré l'unicité car la solution u est nécessairement :

$$u(t,x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0 \\ \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx - n^2 t} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (*)$$

- **Étape 2 : Existence sans la continuité en $t = 0$**

On définit u par $(*)$. La suite des coefficients de Fourier étant bornée, on montre que les séries des dérivées partielles de $(t,x) \mapsto c_n(f) e^{inx - n^2 t}$ convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ (décroissance exponentielle). Cela montre que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$. Elle est évidemment 2π-périodique et vérifie l'équation de la chaleur en dérivant sous le signe somme. Il reste donc à vérifier la continuité en 0 pour achever la preuve.

- **Étape 3 : Continuité en 0 pour f de classe $\mathcal{C}^1$**

Si on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$, alors on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

La série définissant u converge donc normalement sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et la somme vaut f en 0, ce qui montre la continuité de u.

- **Étape 4 : Principe du maximum**

Si f est C^1 et positive, alors la solution u est également positive. Le fait qu'elle soit réelle se vérifie facilement en conjuguant la somme et en utilisant que : $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour f réelle. On raisonne par l'absurde : s'il existe $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ tel que $u(t_0, x_0) < 0$. Soit $\beta < 0$, l'application $v : (t,x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R} \mapsto u(t,x) e^{\beta t}$ admet un minimum global strictement négatif atteint en (t_1, x_1), où $t_1 > 0$ par hypothèse. Comme il s'agit d'un minimum et que l'intervalle est fermé à droite, on a :

$$\partial_t v(t_1, x_1) \leq 0, \quad \text{et} \quad \partial_x^2 v(t_1, x_1) \geq 0.$$

Or on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t v(t_1, x_1) & = \partial_t u(t_1, x_1) + \beta u(t_1, x_1) \leq 0 \\ \partial_x^2 v(t_1, x_1) & = \partial_x^2 u(t_1, x_1) e^{\beta t_1} \geq 0 \end{array} \right. \qquad (*) \ .$$

Puisque : $\beta u(t_1, x_1) > 0$, la première inégalité assure que : $\partial_t u(t_1, x_1) < 0$. Or la seconde inégalité entraine que : $\partial_x^2 u(t_1, x_1) = \partial_t u(t_1, x_1) \geq 0$. Ceci est une contradiction.

- **Étape 5 : Étude du Noyau de la chaleur**

Pour $(t, x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$, on pose :

$$p_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx - n^2 t}.$$

Pour tout $t > 0$, p_t est continue et 2π-périodique et en échangeant le signe somme et intégrale par un argument de convergence normale :

$$u(t, .) = p_t * f,$$

où $*$ désigne la convolution sur le cercle. Notons $(K_n)_n$ le noyau de Féjèr. Puisque p_t est continue, le théorème de Féjèr assure que :

$$\|p_t * K_N - p_t\|_\infty \underset{N \to +\infty}{\to} 0.$$

Comme K_N est positif et $\mathcal{C}^1$, le principe du maximum assure que pour tout N, $p_t * K_N \geq 0$. On déduit des deux faits précédents que :

$$\forall t > 0, \, p_t \geq 0.$$

On a donc pour $t > 0$:

$$\|p_t\|_{L^1} = c_0(p_t) = 1.$$

- **Étape 6 : Continuité en 0 pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$**

Si $t > 0$, on a :

$$|u(t, x)| = |p_t * f(x)| \leq \|p_t\|_{L^1} \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

inégalité valable également pour $t = 0$. La solution u de notre problème est donc bornée. Cela permet de définir l'opérateur solution :

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{ll} (\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty) & \to L_{2\pi,x}^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto u \end{array} \right. ,$$

qui est linéaire et continu d'après ce qui précède. Or on a montré que :

$$\Delta(\mathcal{C}^1(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}_{2\pi,x}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

qui est un sous-espace vectoriel fermé de $L_{2\pi,x}^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x, \mathbb{C})$. Puisque Δ est continu et que $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ pour la norme uniforme, on a :

$$\Delta(\mathcal{C}_{2\pi}^0) = \Delta(\overline{\mathcal{C}_{2\pi}^1}) \subset \overline{\Delta(\mathcal{C}_{2\pi}^1)} \subset \mathcal{C}_{2\pi,x}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Cela achève la preuve de la continuité en 0 de la solution

□

Remarque 2. - *Le développement est un peu trop long, on peut aller vite sur l'analyse, notamment en passant très vite sur les théorèmes de régularité sous l'intégrale et on peut admettre le principe du maximum.*

- *C'est une belle application du théorème de Féjèr et de la convolution !!!*