Optimisation dans un Hilbert

Référence : : P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* – `https://www.math.univ-toulouse.fr/~ckilque/agregation.html`

Leçons : 203, 205, 208, 213, 219, 229, 253.

Définition 1

Soit H un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite de H. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x \in H$ si :

$$\forall y \in H,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

On note alors : $x_n \rightharpoonup x$.

On commence par démontrer le résultat de compacité faible suivant.

Théorème 2 (*Théorème de Banach-Alaoglu*)

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(x_n)_n$ une suite bornée de H. Alors il existe une extraction $(n_k)_k$ et $x \in H$ tels que : $x_{n_k} \rightharpoonup x$.

Démonstration : On considère une suite dense qu'on note $(h_n)_n$ et on note $M = \sup_n \|x_n\|$. Pour tout k, la suite $(\langle x_n, h_k\rangle)_n$ est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergeant vers un réel noté $\phi(h_k)$. Par extraction diagonale, on dispose d'une extraction $(n_j)_j$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \langle x_{n_j}, h_k\rangle \underset{j\to+\infty}{\to} \phi(h_k) \quad (*).$$

Montrons maintenant que si $y \in H$, alors la suite $(\langle x_{n_j}, y\rangle)_j$ converge. Par complétude, il suffit de vérifier le critère de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Par densité, on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que : $\|y - h_k\| \leq \epsilon$. De plus, d'après la convergence $(*)$, on a $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall p, q \geq N,\ |\langle x_{n_p}, h_k\rangle - \langle x_{n_q}, h_k\rangle| \leq \epsilon.$$

Ainsi on a pour tout $p, q \geq N$:

$$\begin{aligned}
|\langle x_{n_p}, y\rangle - \langle x_{n_q}, y\rangle| &\leq |\langle x_{n_p}, y\rangle - \langle x_{n_p}, h_k\rangle| + |\langle x_{n_p}, h_k\rangle - \langle x_{n_q}, h_k\rangle| + |\langle x_{n_q}, h_k\rangle - \langle x_{n_q}, y\rangle| \\
&= |\langle x_{n_p}, y - h_k\rangle| + |\langle x_{n_p}, h_k\rangle - \langle x_{n_q}, h_k\rangle| + |\langle x_{n_q}, h_k - y\rangle \\
&\leq \epsilon + 2M\epsilon,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela montre la convergence annoncée. On a donc une application $\phi : H \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall y \in H,\ \langle x_{n_j}, y\rangle \underset{j\to+\infty}{\to} \phi(y) \quad (**).$$

ϕ est linéaire comme limite simple de formes linéaires. Elle est également continue. En effet, pour tout $y \in H$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\phi(y)| = |\lim_{j\to+\infty} \langle x_{n_j}, y\rangle| \leq M\|y\|.$$

Le théorème de Riesz assure qu'il existe $x \in H$ tel que :

$$\forall y \in H,\, \phi(y) = \langle x, y \rangle.$$

La convergence $(**)$ assure la convergence faible de l'extraction vers x.

$\square$

Remarque 3. *On peut se passer de l'hypothèse de séparabilité dans le cadre hilbertien quitte à travailler dans le Hilbert séparable* $\tilde{H} := \overline{Vect\{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}}$. *On effet soit* G *le supplémentaire orthogonal de ce sous-espace vectoriel fermé. D'après ce qui précède, il existe* $x \in \tilde{H}$ *et une extraction* $(n_j)_j$ *tels que :*

$$\forall y \in \tilde{H},\, \langle x_{n_j}, y \rangle \underset{j \to +\infty}{\to} \langle x, y \rangle.$$

Soit maintenant $y = \tilde{y} + g$ *la décomposition fournie par :* $H = \tilde{H} \oplus G$. *On a alors par orthogonalité :*

$$\begin{aligned}\langle x_{n_j}, y \rangle &= \langle x_{n_j}, \tilde{y} + g \rangle \\ &= \langle x_{n_j}, \tilde{y} \rangle \\ &\to \langle x, \tilde{y} \rangle = \langle x, \tilde{y} + g \rangle = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème 4

Soit H *un espace de Hilbert et* $J : H \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe continue et coercive, i.e telle que :*

$$J(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Alors J *atteint son minimum en un point* x^*.

Démonstration : On considère une suite minimisante $(x_n)_n$, i.e $J(x_n) \to \inf_H J$. Cette suite est bornée. En effet dans le cas contraire, on a une extraction $(n_k)_k$ telle que :

$$\|x_{n_k}\| \to +\infty.$$

Par coercivité, on aurait : $\inf_H J = +\infty$, ce qui est absurde. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, on dispose de $x_* \in H$ et d'une extraction $(n_k))_k$ tels que :

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_*.$$

Montrons maintenant que :

$$J(x_*) = \inf_H J.$$

Soit $\alpha > \inf_H J$. On pose :

$$C_\alpha = J^{-1}(]-\infty, \alpha]),$$

qui est non vide par choix de α. La continuité de J assure que C_α est fermé et la convexité de J assure que C_α est convexe. On peut donc bien définir P_α la projection sur C_α. Puisque $J(x_{n_k}) \to \inf_H J$, on dispose de $N > 0$ tel que : $\forall k \geq N,\, x_{n_k} \in C_\alpha$. La propriété des angles obtus assure que :

$$\forall k \geq N,\, \langle x_* - P_\alpha(x_*), x_{n_k} - P_\alpha(x_*) \rangle \leq 0.$$

En laissant tendre k vers $+\infty$, on déduit que :

$$\|x_* - P_\alpha(x_*)\|^2 \leq 0,$$

ce qui montre que :

$$x_* \in C_\alpha, \quad \forall \alpha > \inf_H J.$$

D'où $J(x_*) \leq \inf\limits_H J$ et l'égalité est démontrée.

$\square$

Annexe

L'application suivante permet de résoudre un problème aux limites non linéaire au sens faible grâce à la formulation variationnelle associée, dans un cas où le théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas. Je n'ai pas trouvé de référence pour cette partie, l'énoncé est issu du cours de Karine Beauchard.

Proposition 5

Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p > 0$, alors il existe une unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que :

$$-u" + u|u|^{p-1} = f,$$

au sens des distributions.

Démonstration :

- **Existence :** Commençons par trouver la formulation variationnelle. Pour cela, on pose :

$$J : \left\{ \begin{array}{cl} H_0^1(0,1) & \to \mathbb{R} \\ u & \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{|u'|^2}{2} + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - fu \; dx \end{array} \right. .$$

(a) J est différentiable et on a :

$$\forall u, v \in H,\; dJ_u.v = \int_0^1 u'v' + |u|^{p-1}uv - fv \; dx.$$

Le membre de droite est une forme linéaire continue sur $H_0^1(0,1)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que :

$$H_0^1(0,1) \subset \mathcal{C}([0,1]).$$

Montrons qu'il s'agit bien de la différentielle de J. Un simple calcul montre que :

$$J(u+v) = J(u) + \int_0^1 u'v' + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - fv \; dx + \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2}^2.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \; dx = o(\|v\|_{H_0^1}).$$

Fixons $u, v \in \mathbb{R}$ et posons $\phi : t \in [0,1] \mapsto \frac{|u+tv|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - t|u|^{p-1}uv$. L'objectif est de contrôler $|\phi(1)| = |\phi(1) - \phi(0)|$. Remarquons qu'on a :

$$\frac{d}{dt}|u+tv|^{p+1} = v(p+1)\mathrm{sgn}(u+tv)|u+tv|^p,$$

en notant sgn la fonction signe et en convenant que $\mathrm{sgn}(0) = 0$. ϕ est donc dérivable et on a :

$$\forall t \in [0,1],\; \phi'(t) = v(p+1)\mathrm{sgn}(u+tv)|u+tv|^p - u|u|^{p-1}v.$$

L'inégalité des accroissements finis assure alors que :

$$\left|\frac{|u+v|^{p+1}}{p+1}-\frac{|u|^{p+1}}{p+1}-|u|^{p-1}uv\right| \leq |v| \sup_{|t|\leq|v|}\left\{|\mathrm{sgn}(u+t)|u+t|^p-\mathrm{sgn}(u)|u|^p|\right\}.$$

On a alors d'après ce qui précède et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1}-\frac{|u|^{p+1}}{p+1}-|u|^{p-1}uv\,dx\right|\\
&\leq \int_0^1 |v| \sup_{|t|\leq\|v\|_\infty}\left\{|\mathrm{sgn}(u+t)|u+t|^p-\mathrm{sgn}(u)|u|^p|\right\}dx\\
&\leq \|v\|_{L^2}\left(\int_0^1\left(\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty}\left\{|\mathrm{sgn}(u+t)|u+t|^p-\mathrm{sgn}(u)|u|^p|\right\}\right)^2dx\right)^{1/2}\\
&\leq \|v\|_{H_0^1}\left(\int_0^1\left(\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty}\left\{|\mathrm{sgn}(u+t)|u+t|^p-\mathrm{sgn}(u)|u|^p|\right\}\right)^2dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Pour montrer le résultat, il suffit de voir que :

$$\int_0^1\left(\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty}\left\{|\mathrm{sgn}(u+t)|u+t|^p-\mathrm{sgn}(u)|u|^p|\right\}\right)^2dx \underset{\|v\|_{H_0^1}\to 0}{\to} 0.$$

Puisqu'on a : $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H_0^1}$, on a pour tout $x\in[0,1]$:

$$\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty}\left\{|\mathrm{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p-\mathrm{sgn}(u(x))|u(x)|^p|\right\} \underset{\|v\|_{H_0^1}\to 0}{\to} 0,$$

par continuité de la fonction $x\mapsto \mathrm{sgn}(x)|x|^p$. On ne perd pas de généralité à supposer $\|v\|_{H_0^1}\leq 1$, on peut ainsi dominer l'intégrande par :

$$((|u|+1)^p+|u|^p)^2 \in L^1(0,1),$$

puisque u est continue. Le théorème de convergence dominée assure que :

$$\int_0^1\left(\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty}\left\{|\mathrm{sgn}(u+t)|u+t|^p-\mathrm{sgn}(u)|u|^p|\right\}\right)^2dx \underset{\|v\|_{H_0^1}\to 0}{\to} 0,$$

ce qui est le résultat voulu.

(b) J est strictement convexe. La convexité est claire compte tenu de la convexité de l'intégrande. Soit $\lambda\in]0,1[$ et $u,v\in H_0^1(0,1)$. Supposons que :

$$J(\lambda u+(1-\lambda)v)=\lambda J(u)+(1-\lambda)J(v).$$

Alors on a :

$$\int_0^1 |\lambda u+(1-\lambda)v|^{p+1}\,dx=\int_0^1 \lambda|u|^{p+1}+(1-\lambda)|v|^{p+1}\,dx.$$

D'où l'on déduit que :

$$|\lambda u+(1-\lambda)v|^{p+1}=\lambda|u|^{p+1}+(1-\lambda)|v|^{p+1},$$

presque-partout (et même partout car $H_0^1\subset C^0$) par convexité de $t\mapsto|t|^{p+1}$ et positivité de l'intégrale. La stricte convexité de $t\mapsto|t|^{p+1}$ montre que $u=v$.

(c) J est coercive. En effet, l'inégalité de Poincaré assure qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall u \in H_0^1(0,1),\ 2C\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|u'\|_{L^2}^2.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \int_0^1 \frac{1}{2}|u'|^2\, dx - \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \\ &\geq C\|u\|_{H_0^1}^2 - \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2} \underset{\|u\|_{H_0^1}\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'optimisation, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ qui minimise J. On a donc la condition nécessaire d'optimalité suivante :

$$\forall v \in H_0^1(0,1),\ \int_0^1 u'v' + |u|^{p-1}uv - fv\ dx = 0,$$

donc on a bien : $-u" + u|u|^{p-1} = f$ au sens des distributions.

- **Unicité :** Soit $\tilde{u}$ une autre solution au sens dans distributions dans $H_0^1(0,1)$. Alors, on a par définition :

$$\forall v \in \mathcal{D}(0,1),\ dJ_{\tilde{u}}.v = 0.$$

Par densité de $\mathcal{D}(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$ pour la norme $\|.\|_{H_0^1}$ et par continuité de la forme linéaire $dJ_{\tilde{u}}$ sur $H_0^1(0,1)$, on déduit que $\tilde{u}$ est un point critique de J qui est unique par stricte convexité de J. D'où $u = \tilde{u}$.

□

Remarque 6. - *L'inégalité de Poincaré sur $H_0^1(0,1)$ résulte simplement de l'identité :*

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt,$$

ce qui implique que : $\|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}$, par Cauchy-Schwarz. On peut en trouver une constante optimale grâce aux séries de Fourier.

- *La solution à cette EDO aux conditions de bords nulles est l'unique solution d'un problème de minimisation de l'énergie (la fonctionnelle J).*
- *Si f est continue, alors la solution u est en fait une solution au sens classique de classe C^2.*