Développement : algorithme de Cocke, Younger et Kasami

Pierron Théo

10 avril 2014

Définition Une grammaire est sous forme normale de Chomsky ssi toutes ses règles sont de la forme $T \to UV$ ou $T \to a$.

Théorème *Pour toute grammaire G, il existe une grammaire G' sous forme de Chomsky telle que $L_{G'} = L_G \setminus \{\varepsilon\}$.*

Démonstration. Soit $G = (A, T, P)$.

La démonstration se fait en deux étapes :

- Pour $a \in A$, on ajoute $V_a \in T$. On définit la substitution σ telle que $\sigma|_V = \mathrm{Id}$ et $\sigma(a) = V_a$ pour tout a.
  Si $P' = \{V_a \to a, a \in A\} \cup \{S \to \sigma(w), S \to w \in P, w \neq \varepsilon\}$, alors $G' = (A, T \cup \{T_a, a \in A\}, P')$ vérifie $L_{G'} = L_G \setminus \{\varepsilon\}$ et a toutes ses règles de la forme $T \to T_1 \dots T_n$ ou $T \to a$.
- Pour chaque règle $S \to S_1 \dots S_n$ $(n > 2)$, on la remplace par

$$S \to S_1 S_2', \quad S_i' \to S_i S_{i+1}', \quad S_{n-1}' \to S_{n-1} S_n$$

  Alors la grammaire obtenue G'' est équivalente à G' et est sous forme normale de Chomsky.

∎

Soit $G = (A, T, P)$ une grammaire sous forme de Chomsky **fixée**. On note S_0 l'axiome.

On veut résoudre le problème du mot pour G. Soit $w = w_1 \dots w_n \in A^*$. On note $w[i, j] = w_i \dots w_j$ et

$$E_{i,j} = \{S \in T, w[i, j] \in L_G(S)\}$$

Alors $w \in L_G$ ssi $w[1, n] \in L_G(S_0)$ ssi $S_0 \in E_{1,n}$.

Si $i = j$, $w[i, j] = w_i$ donc $E_{i,i} = \{S, S \to w_i \in P\}$. Si $i < j$, on a

$$w[i, j] \in L_G(S) \quad \text{ssi} \quad \exists k \in [\![i, j-1]\!], S_1 \in E_{i,k}, S_2 \in E_{k+1,j} \text{ et } S \to S_1 S_2 \in P$$

Ceci amène naturellement à introduire l'algorithme de programmation dynamique suivant.

Cet algorithme est en $O(n^3)$, la taille de la grammaire intervenant dans la constante du $O()$.

Algorithme 1: CYK

Entrées : $w = w_1 \dots w_n$
Sorties : oui ssi $w \in L(G)$

pour $i = 1 \dots n$ **faire**
  pour $j = 1 \dots n$ **faire**
    $E_{i,j} \leftarrow \varnothing$

pour $i = 1 \dots n$ **faire**
  pour $S \to a \in P$ **faire**
    si $w_i = a$ **alors**
      $E_{i,i} \leftarrow \{S\} \cup E_{i,i}$

pour $d = 1 \dots n - 1$ **faire**
  pour $i = 1 \dots n - d$ **faire**
    $j \leftarrow i + d$ **pour** $k = i \dots j$ **faire**
      pour $S \to S_1 S_2 \in P$ **faire**
        si $S_1 \in E_{i,k}$ *et* $S_2 \in E_{k+1,j}$ **alors**
          $E_{i,j} \leftarrow \{S\} \cup E_{i,j}$

retourner $S_0 \in E_{1,n}$