Indécidabilité de la terminaison d'un système de réécriture

Pierron Théo

12 avril 2014

On veut prouver que le problème de la terminaison d'un système de réécriture est indécidable. Pour ce faire, on va y réduire le problème de l'arrêt universel d'une machine de Turing (PAU) :

- Entrée : Une machine de Turing M
- Sortie : non ssi il existe une configuration K de M démarrant un calcul infini

qui est réputé indécidable.

À une machine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \#, I, F, \delta)$ (à ruban bi-infini) on va associer un système de réécriture (Σ_M, R_M). On pose $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#\}$.

On définit la signature $\Sigma_M = Q \cup \overrightarrow{\Gamma'} \cup \overleftarrow{\Gamma'} \cup \{\overrightarrow{l}, \overleftarrow{r}\}$ contenant uniquement des symboles de fonctions d'arité 1 et un symbole de constante x_0.

<u>Définition</u> Comme tous les symboles de fonction sont d'arité 1, on peut identifier les termes à des mots sur l'alphabet $Q \cup \overrightarrow{\Gamma'} \cup \overleftarrow{\Gamma'} \cup \{\overrightarrow{l}, \overleftarrow{r}\}$. Un terme de configuration t est alors un élément de $\overrightarrow{l}\,\overrightarrow{\Gamma'}Q\overleftarrow{\Gamma'}\,\overleftarrow{r}$.

La configuration associée à $t = \overrightarrow{l}\,\overrightarrow{g_1}\dots\overrightarrow{g_k}q\overleftarrow{d'_1}\dots\overleftarrow{d'_l}\,\overleftarrow{r}$ est $K_t = (q, g, d)$.

Proposition Pour tout t, il existe une unique configuration K_t associée. La réciproque est fausse (on peut rajouter $\overrightarrow{\#}$ après $\overrightarrow{l}$ et $\overleftarrow{\#}$ avant $\overleftarrow{r}$).

Pour chaque transition de δ, on va définir une règle de R_M.

- Si $(q, a) \to (q', b, \to) \in \delta$, on ajoute $q(\overleftarrow{a}(x)) \to \overrightarrow{b}(q'(x))$ à R_M
- Si $(q, \#) \to (q', b, \to) \in \delta$, on ajoute de plus $q(\overleftarrow{r}(x)) \to \overrightarrow{b}(q'(\overrightarrow{r}(x)))$
- Si $(q, a) \to (q', b, \leftarrow) \in \delta$, on ajoute $\overrightarrow{l}(q(\overleftarrow{a}(x))) \to \overrightarrow{l}(q'(\overleftarrow{\#}(\overleftarrow{b}(x))))$ et pour tout $c \in \Gamma'$, $\overrightarrow{c}(q(\overleftarrow{a}(x))) \to q'(\overleftarrow{c}(\overleftarrow{b}(x)))$
- Si $(q, \#) \to (q', b, \leftarrow) \in \delta$, on ajoute en plus $\overrightarrow{l}(q(\overleftarrow{r}(x))) \to \overrightarrow{l}(q'(\overleftarrow{\#}(\overleftarrow{b}(\overleftarrow{r}(x)))))$ et pour tout $c \in \Gamma'$, $\overrightarrow{c}(q(\overleftarrow{r}(x))) \to q'(\overleftarrow{c}(\overleftarrow{b}(\overleftarrow{r}(x))))$.

Par construction, on a le lemme :

Lemme
Si t et t' sont des termes de configuration, $t \to t'$ implique $K_t \vdash K_{t'}$.

Réciproquement, si K et K' sont des configurations de M telles que $K \vdash K'$, il existe $t \to t'$ tel que $K = K_t$ et $K' = K_{t'}$.

Ce lemme prouve que si M ne termine pas, on a une suite de réécritures infinie dans (Σ_M, R_M). Cependant, on n'a pas encore la réciproque car une suite de réécritures infinie n'est pas forcément constituée de termes de configuration. Supposons donc que le système de réécriture comporte une suite infinie $t_1 \to t_2 \to \dots$.

Le mot associé à t_1 peut être décomposé de manière unique en

$$u_1 v_1 \dots u_n v_n u_{n+1}$$

avec $v_i \in \overrightarrow{\Gamma'}Q\overleftarrow{\Gamma'}$ de taille maximale. Comme les règles de R_M ne modifient pas le nombre de symboles d'état de t_1, n est constant sur toute la suite $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Par la forme des règles des R_M, il est facile de voir que $t_1 \to t_2$ ssi il existe i tel que $\overrightarrow{l}(v_i(\overleftarrow{r}) \to \overrightarrow{l}(v'_i(\overleftarrow{r}))$ et $t_2 = u_1 v_1 \dots v'_i \dots u_n v_n u_{n+1}$.

Comme n est constant sur tous les t_i et que cette suite est infinie, par le principe des tiroirs, il existe k tel qu'on ait une suite de réécriture infinie commençant à $\overrightarrow{l}(v_k(\overleftarrow{r}))$. Or ce terme est un terme de configuration donc il correspond à une configuration de M débutant un calcul infini, ce qui achève le réduction.

Le problème de terminaison d'un système de réécriture est donc indécidable.