Étude de la loi Gamma

Pierron Théo

5 janvier 2014

Soit $\lambda > 0$, $a > 0$. La loi Γ est une loi de probabilité de densité

$$\gamma_{a,\lambda} \colon x \mapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^{a-1} 1_{x \geqslant 0}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit X variable aléatoire suivant cette loi.

Espérance

Par un changement de variables $x = \lambda y$, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x} x^a \,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\lambda\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^a \mathrm{d}y = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}} = \frac{a}{\lambda}$$

Variance

Par le même changement de variables,

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\lambda^a}{\lambda^{a+2}\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} y^{a+1} \,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2\Gamma(a)} = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$$

Donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

Transformée de Laplace

L'intégrale

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda-t)x} x^{a-1} \,\mathrm{d}x$$

est convergente ssi $\lambda > t$. Dans ce cas, en posant $y = (\lambda - t)x$, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda-t)x} x^{a-1} \,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} \frac{y^{a-1}}{(\lambda-t)^a} \,\mathrm{d}y = \frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$$

Fonction caractéristique

Posons

$$\phi(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda-it)x} x^{a-1} \,\mathrm{d}x$$

Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < \lambda\}$ et pour $z \in D$

$$\psi(z) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda-z)x} x^{a-1} \,\mathrm{d}x$$

ψ est bien définie sur D car pour tout $z \in D$,

$$|\mathrm{e}^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}| \leqslant x^{a-1} \mathrm{e}^{-(\lambda-\Re(z))x}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $z \in D \cap \mathbb{R}$. Le paragraphe précédent assure que $\psi(z) = \frac{\lambda^a}{(\lambda - z)^a}$.

Si $z \in D$, $\Re(\lambda - z) > 0$ donc (en prenant la détermination principale du log complexe) la fonction

$$h\colon z \mapsto \frac{\lambda^a}{(\lambda - z)^a}$$

est holomorphe sur D. De plus $h|_D = \psi|_D$.

Montrons maintenant que ψ est holomorphe sur D. Soit $K \subset D$ compact. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K \subset D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < \lambda - \varepsilon\}$. Posons alors

$$g(x, z) = \mathrm{e}^{-(\lambda - z)x} x^{a-1}$$

g est une fonction C^1 et

$$\left| \frac{\partial g}{\partial z}(x, z) \right| = |x^a \mathrm{e}^{-(\lambda - z)x}| \leqslant x^a \mathrm{e}^{-\varepsilon x}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et indépendante de z.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\psi'(z) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial z}(x, z) \,\mathrm{d}x$$

Donc ψ est holomorphe sur K pour tout compact $K \subset D$, donc ψ est holomorphe sur D.

Par le théorème des zéros isolés, on a $h = \psi$ sur D. Finalement,

$$\phi(t) = \psi(it) = h(it) = \frac{\lambda^a}{(\lambda - it)^a}$$