Suite de polygones

Pierron Théo

12 juin 2014

Lemme

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des complexes. Notons $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Alors les valeurs propres de

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & a_{n-1} & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

sont les $P(\omega^k)$, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Démonstration. Soit U la matrice de permutation associée au cycle $(n, n-1, \dots, 1)$. On remarque que c'est une matrice compagnon associée à $X^n - 1$. Ce polynôme est scindé à racines simples donc U est diagonalisable et ses valeurs propres sont les ω^k. De plus, elles sont simples.

Alors pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, $P(U)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les $P(\omega^k)$. On remarque alors que $A = P(U)$. On a donc le résultat. ∎

Théorème *Soit P_0 un polygone du plan à $k > 0$ sommets. On note P_1 le polygone dont les sommets sont les milieux des côtés de P_0, reliés dans l'ordre. On définit de même la suite $(P_n)_n$.*

La suite $(P_n)_n$ converge (i.e. les k sommets convergent) vers le polygone réduit à un point, qui est l'isobarycentre de P_0.

(faire un dessin)

Démonstration. À P_n on associe le k-uplet de complexes $Z_n := (z_n^1, \dots, z_n^k)$ obtenu en prenant les affixes des sommets consécutifs. Par définition de P_{n+1}, on a pour tout n,

$$Z_{n+1} = \left(\frac{z_n^1 + z_n^2}{2}, \frac{z_n^2 + z_n^3}{2}, \dots, \frac{z_n^k + z_n^1}{2} \right) = AZ_n$$

où $A = \frac{1}{2}(I_k + U)$. On a $Z_n = A^n Z_0$ donc on veut étudier A^n. Par le lemme, $\mathrm{Sp}(A) = \{\frac{1+\omega^r}{2}, r \in [\![0, k-1]\!]\}$. On peut donc diagonaliser A : $A = PDP^{-1}$.

Si $r \neq 0$, on a (dessin) $|\frac{1+\omega^r}{2}| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} D^n = \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$.

Ainsi, $(A^n)_n$ converge vers la matrice $A^\infty := P\,\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)P^{-1}$. La suite Z_n converge alors vers $Z^\infty := A^\infty Z_0$. Pour tout n, on a

$$Z_{n+1} = AZ_n$$

En prenant $n \to \infty$, on obtient $Z^\infty \in \mathrm{Ker}(A - I_k)$. 1 est valeur propre de multiplicité 1 (et A diagonalisable) donc $\dim \mathrm{Ker}(A - I_k) = 1$. Or $(1, \dots, 1) \in \mathrm{Ker}(A - I_k)$. Finalement

$$\mathrm{Ker}(A - I_k) = \mathrm{Vect}\,\{(1, \dots, 1)\}$$

On a donc $Z^\infty = (z, \dots, z)$. Il s'agit donc de montrer que z est l'isobarycentre g de P_0.

Par associativité des barycentres, g est l'isobarycentre de tous les P_n. Ainsi, pour tout n, on a

$$\sum_{i=1}^{k} (z_n^i - g) = 0$$

On fait alors tendre n vers l'infini :

$$0 = \sum_{i=1}^{k} (z - g) = k(z - g)$$

Ainsi, $z = g$ donc $Z^\infty = (g, \dots, g)$.

D'où finalement la convergence de la suite des P_n vers le polygone réduit à g. ■