

223 – Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence.
Exemples et applications.

PIERRON Théo

ENS Rennes

Table des matières

Introduction	2
1 Définitions et premières propriétés	2
1.1 Suites, limites, sous-suites [Goub]	2
1.2 Suites adjacentes, théorème des gendarmes, moyenne de Cesàro [Goub]	3
1.3 Limites inférieures et supérieures [Zui]	4
2 Suites particulières	5
2.1 Suites géométriques [Goub]	5
2.2 Suites récurrentes [Goub, Flo, Lam]	5
2.3 Suites homographiques [Goub, Flo, Rom]	7
3 Applications	8
3.1 Caractérisation de la continuité [Goub]	8
3.2 Méthode de Newton [Rou, CL]	8
3.3 Sommes de Riemann [Goub]	10
4 Approximation de réels	10
4.1 Développement décimal en base b [Rom]	10
4.2 Approximation géométrique [Rom]	10
4.3 Fractions continues [Goua]	11

Introduction

Les suites sont utilisées dans de nombreux domaines. D'abord en combinatoire où le nombre d'objets u_n vérifiant la propriété P_n peut souvent être exprimé en fonction des u_k pour $k < n$. On peut alors trouver des résultats sur la vitesse de convergence de u .

En algorithmique les suites permettent de classer les algorithmes en fonction de la place mémoire qu'ils occupent et de leur temps d'exécution.

On peut aussi citer la topologie : dès qu'on se place dans le cadre d'un espace métrique, on peut caractériser de nombreuses propriétés (densité, compacité, fermeture, complétude, ...) en utilisant des caractérisations séquentielles. On utilise aussi les suites numériques pour définir les topologies faibles. De plus, elles permettent de déduire, à partir de certaines propriétés de densité, des méthodes de construction d'objets mathématiques, comme par exemple l'intégrale de Riemann, ou la transformée de Fourier sur l'espace L^2 .

Enfin, en analyse numérique, on peut s'intéresser à des méthodes d'approximation qui définissent une suite pour approcher des réels ou complexes inconnus, comme par exemple les zéros d'une fonction, les valeurs propres d'une matrice, ou bien aussi pour trouver des développements décimaux.

Pour cette leçon, nous nous plaçons dans le cadre des suites numériques à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Dans une première partie nous donnerons les définitions de bases de ces objets puis nous étudierons différentes méthodes pour prouver la convergence, ainsi que comment nous pouvons récupérer des propriétés de convergence en extrayant des sous-suites ou en considérant les limites inférieures et supérieures.

Dans une deuxième partie nous étudierons la convergence et les propriétés de certaines suites particulières, notamment les suites récurrentes et homographiques, et nous ferons le lien entre les suites homographiques et la réduction des matrices de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Ensuite nous verrons des applications des suites, d'abord pour caractériser des propriétés de régularité de fonctions. nous étudierons aussi la méthode de Newton qui permet d'approcher des zéros de fonction avec une vitesse quadratique, c'est-à-dire que, sous de bonnes hypothèses, le nombre de décimales correctes de l'approximation double à chaque itération. Enfin nous verrons les sommes de Riemann, qui forment un premier pas vers la construction de l'intégrale éponyme.

La dernière partie sera consacrée à la présentation de différentes méthodes d'approximation de réels. D'abord la méthode naïve consistant à regarder les décimales une à une. Puis nous détaillerons une méthode d'approximation du réel π qui était connue d'Archimède. Enfin nous étudierons la théorie des fractions continues qui permettent d'obtenir des meilleures approximations fractionnaires.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Suites, limites, sous-suites [Goub]

On commence par définir les notions de suite convergente, et de sous-suites. On donne par la suite des propositions permettant de prouver la convergence de suites (éventuellement extraites) dans des cas simples.

Définition 1

- On appelle suite numérique toute application $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- Elle est dite convergente vers $l \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, l est unique et est appelé limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

- Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

- On appelle sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On appelle valeur d'adhérence toute limite (finie) de sous-suite.

Exemple 1 La suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ converge vers e .

Proposition 1 Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Proposition 2 Toute suite convergente est bornée.

Remarque 1 La réciproque est fautive. Par exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

Proposition 3 Toute suite réelle croissante majorée ou décroissante minorée converge.

THÉORÈME 1 (BOLZANO-WEIERSTRASS) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Proposition 4 L'ensemble $\text{adh}(u)$ des valeurs d'adhérence de la suite u est un fermé.

De plus, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée telle que $\text{adh}(u) = \{l\}$ alors u converge vers l .

Remarque 2 Le résultat est faux si u n'est pas bornée. En effet, la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie $\text{adh}(u) = \{0\}$ mais ne converge pas vers 0.

Proposition 5 Une suite numérique u est convergente ssi elle est de Cauchy, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Proposition 6 u converge ssi $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Application 1 Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ converge. Finalement u converge.

1.2 Suites adjacentes, théorème des gendarmes, moyenne de Cesàro [Goub]

On étudie ici quelques méthodes plus évoluées pour prouver des résultats de convergence.

Définition 2 Deux suites réelles u et v sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 7 Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

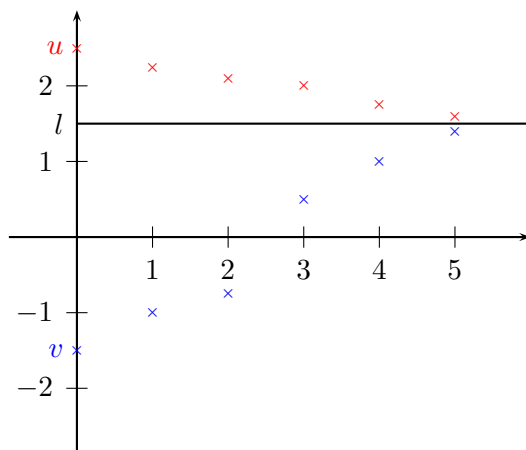


FIGURE 1 – Suites adjacentes

THÉORÈME 2 (DES GENDARMES) Soient u, v, w trois suites réelles vérifiant pour n assez grand

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

Si, de plus, v et w convergent vers la même limite l , alors u converge aussi vers l .

Exemple 2 Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{2n-1}{n} \leq \frac{2n-\sin n}{n} \leq \frac{2n+1}{n}$$

Donc $\frac{2n-\sin n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2$.

Proposition 8 (Cesàro) Soit u une suite convergente de limite l . Alors la suite v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

converge vers l .

Remarque 3 La réciproque est fautive : si $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (qui diverge), alors

$$v_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

converge vers 0.

1.3 Limites inférieures et supérieures [Zui]

Le cas où une suite ne converge pas n'est pas toujours une cause perdue, certains outils nous permettent quand même d'arriver à nos fins comme par exemple les limites inférieures et supérieures.

Définition 3 Soit u une suite.

- La suite $(\sup_{k \geq n} u_k)_n$ est décroissante donc admet une limite éventuellement infinie. On l'appelle limite supérieure de u et on note $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- La suite $(\inf_{k \geq n} u_k)_n$ est croissante donc admet une limite éventuellement infinie. On l'appelle limite inférieure de u et on note $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Proposition 9 Soit u une suite.

Alors $\liminf u \leq \limsup u$ avec égalité ssi u a une limite (finie ou non).

Si u est bornée, $\liminf u = \inf \text{adh}(u) = \min \text{adh}(u)$ et $\limsup u = \sup \text{adh}(u) = \max \text{adh}(u)$.

Application 2 Soit u une suite de réels positifs tels que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+p} \leq u_n + u_p$$

Alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \inf_{n \neq 0} \frac{u_n}{n}$.

Exemple 3 Si E est un \mathbb{C} -espace vectoriel normé, et $T \in L(E)$ est continu, alors $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Application 3 Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

2 Suites particulières

Dans cette partie, on étudie les propriétés de certaines suites particulières, en commençant par les suites géométriques.

2.1 Suites géométriques [Goub]

Définition 4 Une suite u est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ ssi

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = qu_n$$

Proposition 10 Soit u une suite géométrique de raison q .

Si $|q| > 1$, u diverge. Si $|q| < 1$, u converge vers 0.

Si $|q| = 1$, u converge ssi $q = 1$ (i.e. u constante)

2.2 Suites récurrentes [Goub, Flo, Lam]

Les suites récurrentes ont un comportement souvent plus complexe que les suites géométriques, cependant, elles apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes.

Définition 5 Une suite u est dite récurrente d'ordre k ssi il existe $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall n \geq k, u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-k})$$

Proposition 11 Si u est récurrente et converge vers l , et si f est continue en (l, \dots, l) alors

$$l = f(l, \dots, l)$$

Proposition 12 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$.

Soit u une suite vérifiant $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante, u est monotone (croissante si $u_0 \leq u_1$, décroissante sinon)
- Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante donc $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens de monotonie contraires.

Ceci est résumé par les schémas suivants (le cas f croissante, u convergente est traité dans la figure 3).

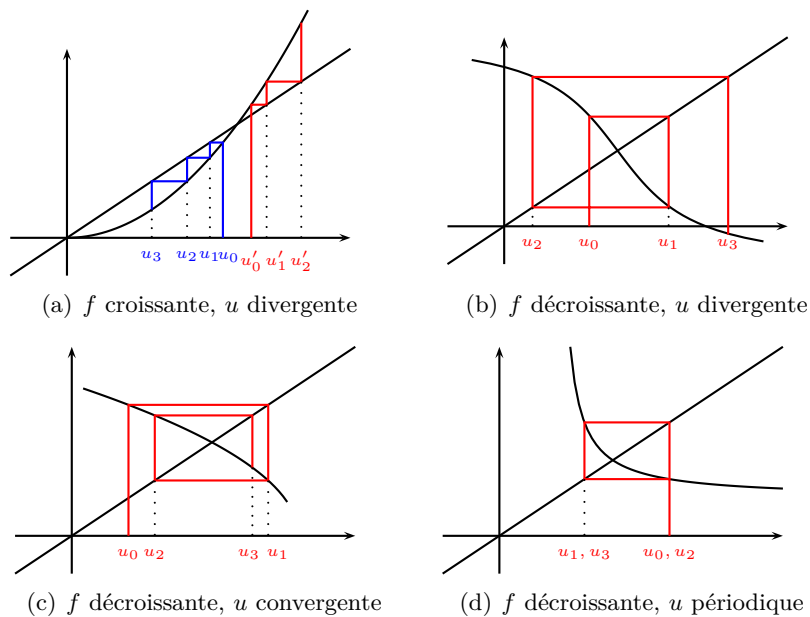


FIGURE 2 – Suites récurrentes, différents cas de figure

Remarque 4 u converge vers l ssi $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers l .

Exemple 4 Soit u définie par $u_0 > -\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

Alors u est croissante si $u_0 \leq 3$, décroissante si $u_0 \geq 3$ et converge dans tous les cas vers 3.

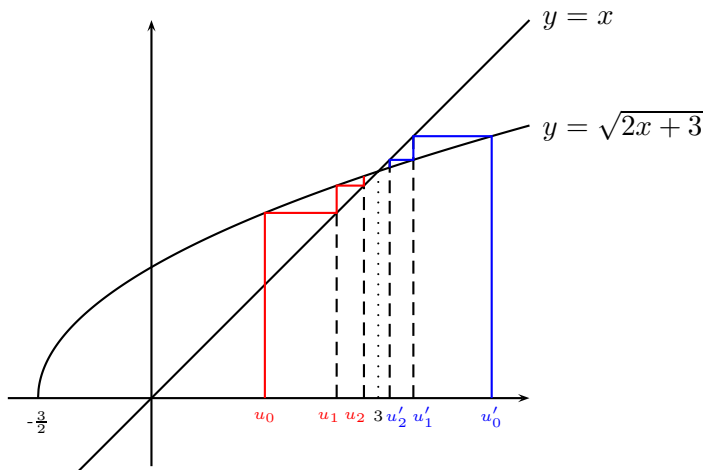


FIGURE 3 – Exemple de suite récurrente

Proposition 13 Si u est récurrente linéaire, i.e. vérifiant

$$\forall n \geq k, u_n = \sum_{i=1}^k a_i u_{n-i}$$

(avec a_i des complexes fixés), alors l'équation

$$x^k = \sum_{i=1}^k a_i x^{k-i}$$

est appelée équation caractéristique. Si on note r_1, \dots, r_q ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leurs multiplicités, alors u est de la forme

$$u_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_q(n)r_q^n$$

où pour tout i , P_i est un polynôme vérifiant $\deg P_i < \alpha_i$.

Exemple 5 (Fibonacci) On définit la suite u par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

L'équation caractéristique est $x^2 = x + 1$ qui a pour racines $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Alors $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \bar{\varphi}^n)$.

2.3 Suites homographiques [Goub, Flo, Rom]

Ici nous étudions les suites homographiques et faisons le lien avec la réduction des matrices de $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. On montre alors que l'étude de ces suites, bien que d'aspect complexe, se ramène à l'étude de suites arithmétiques ou géométriques.

Définition 6 Une suite u est dite homographique ssi elle vérifie une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} =: h(u_n)$$

avec a, b, c, d des complexes vérifiant $ad \neq bc$.

Proposition 14 u est définie ssi elle ne prend jamais la valeur $-\frac{d}{c}$.

On peut identifier l'ensemble H des homographies h au groupe $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ via l'isomorphisme de groupes :

$$\varphi : \begin{cases} \text{PGL}_2(\mathbb{C}) & \rightarrow & H \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \end{cases}$$

De la diagonalisabilité (ou trigonalisabilité) de $\varphi^{-1}(h)$ découlent des propriétés de la suite récurrente associée.

Proposition 15 Soit u une suite homographique non constante associée à l'homographie h . On considère l'équation $cx^2 - (a-d)x - b = 0$ (équivalente à $h(x) = x$). Cette équation a le même discriminant que le polynôme caractéristique de $\varphi^{-1}(h)$.

- Si elle a deux racines distinctes α et β , $\varphi^{-1}(h)$ est diagonalisable donc quitte à changer de base, $\varphi^{-1}(h) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la suite associée est géométrique. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$$

avec $k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$.

- Si elle a une racine double α , alors $\varphi^{-1}(h)$ est trigonalisable donc quitte à changer de base, $\varphi^{-1}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ et la suite associée est arithmétique. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - \alpha} = nk + \frac{1}{u_0 - \alpha}$$

avec $k = \frac{c}{a-\alpha c}$.

Exemple 6 On définit la suite $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$ avec $u_0 \notin \{1, \frac{1}{2}\}$.

$\alpha = 1$ est racine double de l'équation $h(x) = x$ donc on a

$$\frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_0 - 1} + 2n$$

donc u converge vers 1.

3 Applications

3.1 Caractérisation de la continuité [Goub]

Proposition 16 Soit $D \subset \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

f est continue en $a \in D$ ssi pour toute suite $u \in D^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a , $f \circ u$ converge vers $f(a)$.

Exemple 7 On définit

$$f : \begin{cases} [0, 2\pi[& \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{cases}$$

f est continue bijective. f^{-1} n'est pas continue en 1 car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{i(2\pi - \frac{1}{n})} = 1 = e^{i0}$$

mais $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi - \frac{1}{n} = 2\pi \neq 0$.

3.2 Méthode de Newton [Rou, CL]

La méthode de Newton est une méthode classique et efficace pour approximer les zéros d'une fonction. Ceci est expliqué par les théorème suivant :

THÉORÈME 3 Soit $f \in C^2([c, d], \mathbb{R})$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'|_{[c, d]} > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un unique $a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} =: F(u_n)$ soit bien définie et converge de manière quadratique vers a dès que $u_0 \in J := [a - \alpha, a + \alpha]$.

Le cadre du théorème peut sembler restrictif mais on peut s'y ramener dans de très nombreux cas en considérant $-f$ ou en restreignant l'intervalle d'étude.

Démonstration. Il existe $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha] \subset [c, d]$. On doit montrer que pour α suffisamment petit, $F(J) \subset J$. Alors on aura pour tout n , $u_n \in J$ donc $f'(u_n) \neq 0$ donc u_n sera bien définie.

Soit $x \in J$. Par Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $\xi \in [a, x] \subset J$ tel que

$$0 = f(a) = f(x) + (a - x)f'(x) + \frac{(a - x)^2}{2}f''(\xi)$$

Alors on a

$$|F(x) - a| = \left| x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} \right| = \left| \frac{(x - a)f'(x) + f(x)}{f'(x)} \right| = |a - x|^2 \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(x)} \right|$$

f' et f'' sont continues sur J qui est compact donc $|f'|$ est minorée par m et $|f''|$ est majorée par M . On a alors

$$|F(x) - a| \leq \frac{M}{2m}|x - a|^2$$

Si on prend $\alpha < \frac{2m}{M}$, on a $|F(x) - a| < \alpha$ donc $F(x) \in J$. Ainsi J est stable par F donc u est bien définie.

On a de plus

$$\frac{M}{2m}|u_n - a| \leq \left(\frac{M}{2m}|u_{n-1} - a| \right)^2 \leq \dots \leq \left(\frac{M}{2m}|u_0 - a| \right)^{2^n}$$

Comme $\frac{M}{2m}|u_0 - a| \leq \frac{M}{2m}\alpha < 1$, u_n converge vers a et la convergence est quadratique. ■

On peut utiliser la méthode de Newton sur des polynômes. On pourrait alors espérer obtenir de meilleurs résultats compte tenu des contraintes fortes fournies par cette nouvelle hypothèses. C'est en effet le cas : plus besoin d'être suffisamment proche d'un zéro pour que la suite converge :

THÉORÈME 4 Soit $\xi_1 < \dots < \xi_r$ des réels, m_1, \dots, m_r des entiers et $P = \prod_{i=1}^r (X - \xi_i)^{m_i}$.

Si $u_0 > \xi_r$ alors la suite $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)} =: F(u_n)$ est strictement décroissante et converge vers ξ_r .

Démonstration. Sur $]\xi_r, +\infty[$, F est dérivable et on a pour tout $x > \xi_r$,

$$F'(x) = 1 - \frac{P'(x)^2 - P''(x)P(x)}{P'(x)^2} = \frac{P(x)P''(x)}{P'(x)^2}$$

D'après le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' et P'' appartiennent à $[\xi_1, \xi_r]$. De plus, les coefficients dominants de P , P' et P'' sont positifs donc pour $x > \xi_r$, $P(x) > 0$, $P'(x) > 0$ et $P''(x) > 0$.

Ainsi, $F' > 0$ sur $]\xi_r, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus, l'ordre de ξ_r dans P est supérieur à son ordre dans P' donc

$$\lim_{x \rightarrow \xi_r^+} F(x) = \xi_r$$

Par continuité de F en ξ_r , F est strictement croissante sur $[\xi_r, +\infty[$. Donc, si $u_n > \xi_r$, $F(u_n) > F(\xi_r)$ et $u_{n+1} > \xi_r$. La suite u est donc minorée par ξ_r . Montrons maintenant qu'elle décroît.

Par dérivation logarithmique, $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \xi_i}$, donc

$$u_{n+1} - u_n = - \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{u_n - \xi_i} \right)^{-1}$$

Alors, comme $u_n > \xi_r > \dots > \xi_1$, on a pour tout i , $u_n - \xi_i > 0$ donc en sommant, $\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{u_n - \xi_i} > 0$.

Finalement $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, u est décroissante minorée. Elle converge donc vers un réel $l \geq \xi_r$. De plus, on a par continuité de F , $F(l) = l$ donc $P(l) = 0$. Comme $l \geq \xi_r$, $l = \xi_r$. ■

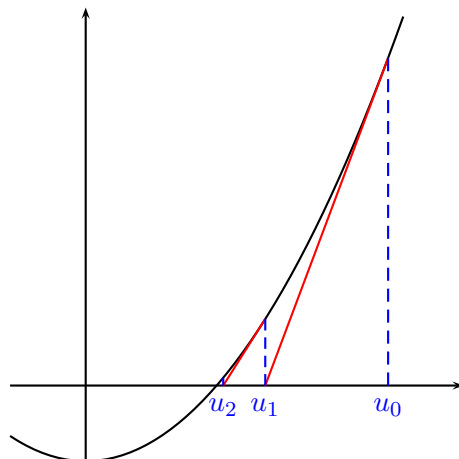


FIGURE 4 – Méthode de Newton

Application 4 Si $c > 0$, en considérant $P = X^2 - c$, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= c + 1 \\ u_{n+1} &= u_n - \frac{u_n^2 - c}{2u_n} = \frac{u_n}{2} + \frac{c}{2u_n} \end{cases}$$

converger de manière quadratique vers \sqrt{c} .

3.3 Sommes de Riemann [Goub]

THÉORÈME 5 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple 8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

4 Approximation de réels

4.1 Développement décimal en base b [Rom]

Définition 7 Soit $x \in \mathbb{R}$. On associe à x deux suites r et s définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$$

Proposition 17 r et s sont adjacentes de limite x .

r (resp. s) est appelée approximation décimale par défaut (resp. excès) à 10^{-n} près.

On en déduit que l'ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux est dense dans \mathbb{R} .

Définition 8 Pour $x \in \mathbb{R}$ et r définie comme précédemment, on définit la suite a par $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et pour tout n ,

$$a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \in \llbracket 0, 9 \rrbracket.$$

Alors on a $r_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}$ et $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Cette écriture est appelée développement décimal illimité propre de x .

Proposition 18 La suite a n'est pas stationnaire à 9. Si on note D' l'ensemble des suites d'entiers de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ qui ne stationnent pas à 9 alors le développement décimal propre réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur D' .

Application 5 \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Remarque 5 Tous ces résultats sont valables en base $b \geq 2$.

4.2 Approximation géométrique [Rom]

Soit u la suite définie par

$$u_0 = 2\sqrt{2} \text{ et } u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

. On a $\lim u = \pi$ et on peut calculer la suite u_n par récurrence via la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^n \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{u_n^2}{2^{2n}}}}$$

Géométriquement ceci correspond à approximer l'aire du demi-cercle unité par celle de demi-polygones réguliers à 2^n côtés.

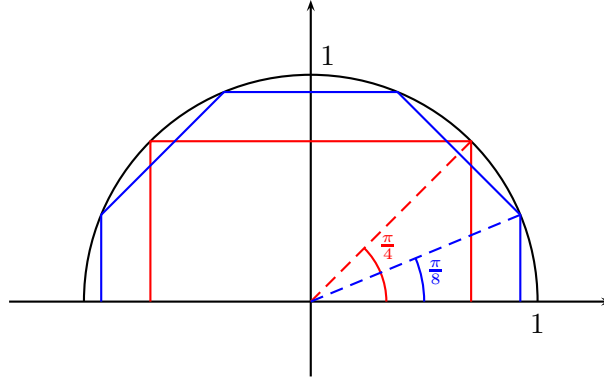


FIGURE 5 – Approximation du demi-cercle unité par des demi-polygones

4.3 Fractions continues [Goua]

Définition 9 Soit a une suite réelle avec $a_n > 0$ pour $n > 0$. On appelle fraction continue l'expression $[a_0, \dots, a_n]$ définie par

- $[a_0] = 0$
- $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$
- pour $n \geq 2$, $[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$

Autrement dit,

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Proposition 19 Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Partant de $\xi_0 = \xi$, on définit les suites a et $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$a_n = \lfloor \xi_n \rfloor \text{ et } \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n}$$

Alors pour tout $n \neq 0$, $\xi = [a_0, \dots, a_{n-1}, \xi_n]$.

Remarque 6 Si ξ est rationnel, les suites a et ξ sont finies (il existe n tel que $\xi_n = a_n$). Leur calcul correspond à l'algorithme d'Euclide appliqué au numérateur et dénominateur de ξ .

Proposition 20 Les valeurs $[a_0, \dots, a_n]$ sont appelées réduites de ξ , elles vérifient

- Pour tout n , $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_0 = a_0$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.
- Pour tout $n \geq 2$, $\xi = \frac{p_{n-1} \xi_n + p_{n-2}}{q_{n-1} \xi_n + q_{n-2}}$.

Proposition 21 Pour tout n , $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$. En particulier, $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

Proposition 22 $\frac{p_n}{q_n}$ est une approximation fractionnaire de ξ vérifiant

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

C'est de plus une meilleure approximation fractionnaire au sens où

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, 0 < q \leq q_n \Rightarrow |q\xi - p| \geq |q_n \xi - p_n|$$

Exemple 9 Si $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors a est la suite constante égale à 1 donc

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Définition 10 Un nombre réel est dit quadratique ssi il est racine d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2 et irréductible sur \mathbb{Q}

THÉORÈME 6 Soit ξ irrationnel. ξ est quadratique ssi il existe $T > 0$ tel que $\xi_{k+T} = \xi_k$ pour tout k assez grand.

Démonstration.

\Leftarrow Soient r, T tels que $\xi_{r+T} = \xi_r$. On a alors

$$\xi_r = [a_r, \dots, a_{r+T-1}, \xi_{r+T}] = \frac{\alpha \xi_{r+T} + \alpha'}{\beta \xi_{r+T} + \beta'} = \frac{\alpha \xi_r + \alpha'}{\beta \xi_r + \beta'}$$

où α, β, α' et β' sont des entiers.

Ainsi, le polynôme $Q := \beta X^2 + (\beta' - \alpha)X - \alpha'$ annule ξ_r . De plus $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg(Q) = 2$.

Si Q était réductible, ses racines seraient rationnelles donc $\xi_r \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

Donc Q est irréductible sur \mathbb{Q} .

On a de plus, par définition de p_n, q_n et ξ_n , $\xi = \frac{p_{r-1}\xi_r + p_{r-2}}{q_{r-1}\xi_r + q_{r-2}}$. Alors

$$q_{r-1}\xi_r\xi + q_{r-2}\xi = p_{r-1}\xi_r + p_{r-2} \text{ donc } \xi_r = \frac{-q_{r-2}\xi + p_{r-2}}{q_{r-1}\xi - p_{r-1}}$$

Le polynôme

$$R = (q_{r-1}X - p_{r-2})^2 Q \left(\frac{-q_{r-2}X + p_{r-2}}{q_{r-1}X - p_{r-1}} \right) \in \mathbb{Z}[X]$$

est de degré 2 et annule ξ . Comme précédemment, R est irréductible sur \mathbb{Q} , et ξ est quadratique.

\Rightarrow Soit $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma = \alpha(X - \xi)(X - \xi') \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible sur \mathbb{Q} qui annule ξ .

Pour tout n , on définit

$$Q_n = (q_{n-1}X + q_{n-2})^2 Q \left(\frac{p_{n-1}X + p_{n-2}}{q_{n-1}X + q_{n-2}} \right)$$

Comme $Q(\xi) = 0$ et $\xi = \frac{p_{n-1}\xi_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\xi_n + q_{n-2}}$, $Q_n(\xi_n) = (q_{n-1}\xi_n + q_{n-2})^2 Q(\xi) = 0$.

Posons $Q_n = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ entiers.

On remarque que $\alpha_n = q_{n-1}^2 Q \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) \neq 0$ car Q n'a pas de racines rationnelles. De même,

$$\gamma_n = q_{n-2}^2 Q \left(\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \right) = \alpha_{n-1}.$$

Montrons que le discriminant Δ_n de Q_n est égal au discriminant Δ de Q . Par définition du discriminant et de Q_n , $\Delta_n = \alpha_n^2 (\xi_n - \xi'_n)^2$ et $\Delta = \alpha (\xi - \xi')^2$ où $\xi'_n = \frac{-q_{n-2}\xi'_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\xi'_n + q_{n-2}}$.

Comme $Q = \alpha(X - \xi)(X - \xi')$, on obtient $\alpha_n = \alpha(p_{n-1} - q_{n-1}\xi)(p_{n-1} - q_{n-1}\xi')$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \alpha^2 (p_{n-1} - q_{n-1}\xi)^2 (p_{n-1} - q_{n-1}\xi')^2 \left(\frac{-q_{n-2}\xi + p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}} - \frac{-q_{n-2}\xi' + p_{n-2}}{q_{n-1}\xi' - p_{n-1}} \right)^2 \\ &= \alpha^2 ((q_{n-2}\xi - p_{n-2})(p_{n-1} - q_{n-1}\xi') - (q_{n-2}\xi' - p_{n-2})(p_{n-1} - q_{n-1}\xi))^2 \\ &= \alpha^2 \underbrace{(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2}_{=1} (\xi - \xi')^2 = \Delta \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'il y a un nombre fini de Q_n . Il suffit de borner les coefficients de Q_n . Par inégalité des accroissements finis, on a

$$|\alpha_n| = \left| q_{n-1}^2 Q \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) \right| = q_{n-1}^2 \left| Q \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right) - Q(\xi) \right| \leq q_{n-1}^2 M \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \xi \right| \leq M$$

où $M = \sup_{|x-\xi|<1} |Q'(x)|$.

Comme $\gamma_n = \alpha_{n-1}$, on a $|\gamma_n| \leq M$. On a de plus

$$\beta_n^2 = \Delta_n + 4\alpha_n\gamma_n = \Delta + 4\alpha_n\gamma_n \leq \Delta + 4M^2$$

Ainsi, l'ensemble des Q_n est fini donc il existe $n_1 < n_2 < n_3$ tels que $Q_{n_1} = Q_{n_2} = Q_{n_3}$. Comme ξ_{n_j} est racine de Q_{n_j} , il existe $i \neq j$ tel que $\xi_{n_i} = \xi_{n_j}$. Ainsi, ξ est périodique à partir du rang n_i . ■

Remarque 7 Si ξ est rationnel, son développement n'est pas périodique et il n'est pas non plus quadratique.

Exemple 10 $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots]$.

Application 6 Approximer des réels n'est pas la seule utilité des fractions continues, on peut notamment citer comme application la résolution des équations de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = \pm 1$ à partir du développement en fraction continue de \sqrt{d} . Ci-dessous est présentée une rapide idée d'une méthode de résolution utilisant des fractions continues. Pour plus de détails, on pourra consulter [NZM].

On se place dans le cas où d est sans facteur carré. Si (x, y) est solution, $(\pm x, \pm y)$ reste solution. On cherche alors les solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

- Équation $(E) : x^2 - dy^2 = 1$, $x > 0$ et $y > 0$ (on élimine la solution triviale $(1, 0)$).
Si (x_1, y_1) est solution de (E) et si $x_n + \sqrt{d}y_n = (x_1 + \sqrt{d}y_1)^n$, alors (x_n, y_n) est solution de (E) . En fait, il existe (x_1, y_1) minimal en un certain sens tel que toutes les solutions de (E) soient les (x_n, y_n) .

Si (p, q) est une solution de (E) avec $pq > 0$, on peut montrer que $\frac{p}{q}$ est une réduite du développement de \sqrt{d} . Il suffit donc de trouver la première réduite solution de (E) , ce qui donnera toutes les solutions de (E) .

Soit T la période du développement de l'irrational quadratique \sqrt{d} . Si T est pair, on pose $n = T - 1$ et si T est impair $n = 2T - 1$. Ainsi $n + 1$ est le plus petit multiple pair de T . Alors on peut montrer que $p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1} = 1$ et que ce n est minimal.

Ainsi, une méthode de résolution consiste à déterminer T puis n , calculer la n -ème réduite de \sqrt{d} . Ceci fournit une solution fondamentale (a, b) et les autres s'en déduisent comme étant les coefficients de $(a + \sqrt{d}b)^n$ dans la \mathbb{Q} -base $(1, \sqrt{d})$.

- Équation $(E') : x^2 - dy^2 = -1$.
Les solutions de (E') sont les numérateurs et dénominateurs des réduites d'ordre n de \sqrt{n} où $n + 1$ est un multiple impair de la période T du développement de \sqrt{d} . En particulier, si T est impair, (E') n'a pas de solution.

Références

- [CL] Antoine Chambert-Loir. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : Analyse 2*. Masson.
- [Flo] G. Flory. *Topologie, Analyse, Tome 1*. Vuibert.
- [Goua] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : algèbre (2ème édition)*. Ellipses.
- [Goub] Xavier Gourdon. *Les maths en tête : analyse (2ème édition)*. Ellipses.
- [Lam] T. Lambre. *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES. II. Analyse*. Ellipses.
- [NZM] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, and Hugh L. Montgomery. *An introduction to the theory of numbers*. Wiley.com.
- [Rom] Jean-Etienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle*. EDP sciences.
- [Rou] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini.
- [Zui] Hervé Queffélec & Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation*. Dunod.