Analyse fonctionnelle

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Rappels

On pose E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition 1.1 Norme On appelle norme toute application $E \to \mathbb{R}$ telle que :
- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition 1.2 Normes équivalentes Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalents ssi il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, $\alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

Proposition 1.1 Deux normes sont équivalentes ssi les topologies sont équivalentes.

Démonstration.

$\Leftarrow$ $B_2(0,1)$ est un ouvert de (E, N_1) donc il existe $r > 0$, $B_1(0,r) \subset B_2(0,1)$ donc pour tout $x \in E$, $N_2(\frac{x}{2rN_1(x)}) \leqslant 1$ et $N_2(x) \leqslant 2rN_1(x)$.
Par symétrie, on a le résultat.

$\Rightarrow$ Soit $x \in B_2(0,1)$.
Pour tout $y \in E$, $N_1(x-y) \leqslant \frac{1}{\alpha} N_2(x-y)$ donc $N_1(y) \leqslant N_1(x) + N_1(x-y) \leqslant N_1(x) + \frac{1}{\alpha} N_2(x-y) \leqslant 1 + \frac{r}{\alpha}$.
Pour r assez petit, on montre bien que $B_2(y,r) \subset B_1(0,1)$. ∎

Remarque 1.1 La topologie de la norme est à base de voisinages dénombrable. Les valeurs d'adhérence et le fermés se caractérisent donc par des suites.

Proposition 1.2 Si $\dim(E) < \infty$, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. On fixe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. On définit $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Si on prend une deuxième norme, on a $\|x\| \leqslant C \|x\|_\infty$ avec $c = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$.

$x \mapsto \|x\|$ est lipschitzienne donc continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

$\overline{B}_\infty(0, 1)$ est compacte donc la sphère associée l'est aussi donc $x \mapsto \|x\|$ pour x dans la sphère atteint son minimum (qui est strictement positif) sur la sphère.

Il existe donc $m > 0$ tel que pour tout $x \in S_\infty$, $\|x\| \geqslant m$. On trouve ainsi, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geqslant m$ qui assure le résultat. ■

<u>Définition 1.3</u> Espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est un Banach ssi il est complet pour le distance associée $\|\cdot\|$. Ceci est par exemple caractérisé par le critère : toute série absolument convergente est convergente.

<u>Définition 1.4</u> Séparabilité Un espace métrique est séparable ssi il contient une partie dénombrable dense.

Exemple 1.1 Sont séparables les espaces suivants :
- les evn de dimension finie
- les espaces compacts

<u>Définition 1.5</u> Partie totale Soit $D \subset E$. D est une famille totale ssi $\overline{\text{Vect}\{D\}} = E$.

Proposition 1.3 Un evn E est séparable ssi il contient une famille totale dénombrable.

Remarque 1.2 On peut ajouter la liberté de la famille totale dénombrable à cette équivalence.

<u>Définition 1.6</u> On notera $L_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues, $E' = L_c(E, \mathbb{K})$.

On définit la norme triple habituelle. Si F est un Banach, $L_c(E, F)$ l'est aussi.

<u>Définition 1.7</u> Topologie faible $*$ Il s'agit de la topologie la moins fine qui rend continue les évaluations :

$$e_x : \begin{cases} E' & \to & \mathbb{K} \\ u & \mapsto & u(x) \end{cases}$$

Remarque 1.3 Soit $u \in E'$. Une base de voisinages est donnée par $(\{v \in E', \forall i \in [\![1, n]\!], |v(x_i) - u(x_i)| < \varepsilon_i\}_{\varepsilon_i > 0, x_i \in E}, n \in \mathbb{N})$.

En particulier, $u_n \to u$ pour la topologie faible $*$ ssi $u_n(x) \to u(x)$ pour tout $x \in E$. La convergence pour la norme implique celle pour la topologie faible $*$. Enfin, un ouvert pour la topologie forte est un ouvert pour la topologie faible.

<u>Théorème 1.1</u> Banach-Alaoglu $B_{E'} = \{u \in E', \|u\| \leqslant 1\}$ *est compacte pour la topologie faible $*$.*

Démonstration. Si $u \in B_{E'}$, alors pour tout $x \in E$, $|u(x)| \leqslant \|x\|$.

Soit $I : E' \hookrightarrow \prod_{x \in E} \mathbb{K}$.

$I(B_{E'}) \subset \prod_{x \in E} C_x$ avec $C_x = [-\|x\|, \|x\|]$ ou $D(0, \|x\|)$. Donc C_x est compact dans $\mathbb{K}$.

Par Tychonov, $\prod_{x \in E} C_x$ est compact pour la topologie produit.

Or la topologie faible $*$ est la restriction à E' de la topologie produit. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que $I(B_{E'})$ est fermé pour la topologie produit.

Or $I(B_{E'})$ est une intersection de fermés (pour le topologie produit) de la forme $\mathrm{Ker}(e_{x+y} - e_x - e_y)$ et $\mathrm{Ker}(e_{\lambda x} - \lambda e_x)$. Ainsi, $I(B_{E'})$ est fermé dans un compact, donc compact, et il en est de même pour $B_{E'}$ (pour la topologie faible $*$). ■

Remarque 1.4 Il y a une preuve plus simple si E est séparable (comme pour Tychonov).

1.2 Fonctions continues sur un compact

On prend X un espace métrique compact.

Proposition 1.4 $C^0(X)$ est un espace de Banach pour $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposition 1.5 $C^0(X)$ est séparable.

Démonstration. Pour tout $n \neq 0$, X est compact donc il existe $x_1^n, \dots, x_{k_n}^n$ tel que $X \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, \frac{1}{n})$.

On définit

$$\varphi_{k,n}(x) = \frac{(\frac{1}{n} - d(x, x_k^n))^+}{\sum_{i=1}^{k_n} (\frac{1}{n} - d(x, x_i^n))^+}$$

avec $a^+ = \max\{a, 0\}$.

On a $0 \leqslant \varphi_{k,n} \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{k_n} \varphi_{k,n} = 1$, $\varphi_{k,n}$ continue et nulle en dehors de $B(x_k^n, \frac{1}{n})$.

On pose $D = \bigcup_n \bigcup_{k=1}^{k_n} \{\varphi_{k,n}\}$ qui est dénombrable. C'est aussi une famille totale : si $f \in C^0(X)$ et $\varepsilon > 0$, on sait que f est uniformément continue donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit n tel que $\frac{1}{n} < \eta$. Posons $g(x) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_i^n)\varphi_{i,n}(x)$. On a

$$f(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{k_n} (f(x) - f(x_i^n))\varphi_{i,n}(x)$$

puisque $\sum_{i=1}^{k_n} \varphi_{i,n} = 1$.

Dans cette expression, $\varphi_{i,n}(x) = 0$ sauf si $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$. Dans ce cas, $|f(x) - f(x_i^n)| \leqslant \varepsilon$

Donc $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{k_n} \varphi_{i,n}(x) = \varepsilon$. ∎

Définition 1.8 Soit A une partie de $C^0(X, \mathbb{R})$.

A est séparante ssi $\forall x \neq y$, $\exists f \in A$, $f(x) \neq f(y)$.

A est réticulée ssi $\forall f, g \in A$, $\sup(f, g), \inf(f, g) \in A$.

THÉORÈME 1.2 *Soit A un sous-espace vectoriel de $C^0(X, \mathbb{R})$.*

Si A est séparante, réticulée et contient les constantes alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On veut qu'il existe $g \in A$ tel que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Soit $x \in X$ fixé pour le moment.

Lemme 1.2.1
Pour tout $y \neq x$, il existe $f_y \in A$ tel que $f_y(x) = f(x)$ et $f_y(y) = f(y)$.

Démonstration. A est séparante donc il existe $h \in A$ tel que $h(x) \neq h(y)$. A contient les constantes donc on peut chercher f_y sous la forme $\lambda h + \mu$. On veut :

$$\begin{cases} \lambda h(x) + \mu &= f(x) \\ \lambda h(y) + \mu &= f(y) \end{cases}$$

Comme $h(x) \neq h(y)$ le déterminant du système est non nul donc il en existe une unique solution. ∎

Soit $O_y = \{z \in X, f_y(z) > f(z) - \varepsilon\}$. f_y est continue donc O_y est ouvert. De plus, O_y contient x et y donc $X = \bigcup_{y \neq x} O_y$.

X est compact donc il existe $y_1, \dots, y_n$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$. Soit $g_x = \sup(f_{y_1}, \cdots, f_{y_n})$. Comme A est réticulée, $g_x \in A$.

Par construction $g_x(z) > f(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in X$ et on a $g_x(x) = f(x)$.

Posons $\Omega_x = \{z \in X, g_x(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Ω_x est un ouvert contenant x donc $X = \bigcup_{x \in X} \Omega_x$.

Il existe maintenant $x_1, \dots, x_n \in X$ tel que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}$. Soit $h = \inf(g_{x_1}, \cdots, g_{x_n})$.

$h \in A$ car A est réticulée et on a de plus $h(z) - f(z) < \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Par définition de h et des g, on a $|h(z) - f(z)| < \varepsilon$. ∎

Exemple 1.2 Les fonctions lipschitziennes sont denses dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

THÉORÈME 1.3 STONE-WEIERSTRASS *Soit A une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les constantes. Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.*

Démonstration. $\overline{A}$ est aussi une sous-algèbre séparante qui contient les fonctions constantes. On veut montrer que $\overline{A}$ est réticulée.

On remarque que $\sup(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ (on a l'analogue pour l'inf) donc il suffit de montrer que si $f \in \overline{A}$, $|f| \in \overline{A}$.

Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $-c \leqslant f(x) \leqslant c$. On utilise que $t \mapsto |t|$ est limite uniforme de polynômes P_n sur $[-c, c]$.

Par passage à la limite, si $f \in \overline{A}$ alors $|f| \in \overline{A}$. Ce qui assure le résultat. ∎

COROLLAIRE 1.1 *L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.*

Remarque 1.5 Dans le cas complexe, on a des problèmes puisque l'adhérence des fonctions polynômiales d'une variable complexe est incluse dans l'ensemble des fonctions holomorphes.

THÉORÈME 1.4 *Soit A une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{C})$ séparante, contenant les constantes et stable par conjugaison. A est dense dans $C^0(X, \mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $A_{\mathbb{R}} = \{f \in A, \forall x \in X, f(x) \in \mathbb{R}\}$.

On remarque que si $f \in A$, $\Re(f) = \frac{f+\overline{f}}{2}$ et $\Im(f) = \frac{f-\overline{f}}{2i}$ donc $\Re(f), \Im(f) \in A$.

$A_{\mathbb{R}}$ contient les constantes et est séparante : si $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$ et $\Re(f)$ ou $\Im(f)$ sépare x et y.

Donc $A_{\mathbb{R}}$ est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$. Ainsi, $A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{R}} \subset A$ est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$. ■

Exemple 1.3 $A = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + b_k \overline{z}^k \right\}$ est dense dans $C^0(\mathbb{S}^1) = C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

1.3 Compacts de $C^0(X)$

On prend X un métrique compact et on considère $C^0(X, Y)$ avec Y un métrique ou bien $C^0(X, E)$ avec E un evn.

Définition 1.9 $F \subset C^0(X, E)$ est équicontinue ssi

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_x, \forall y \in V, \forall f \in F, \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 1.5 *Comme X est compact, une famille équicontinue est uniformément équicontinue :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_x, \forall (x, y) \in V^2, \forall f \in F, \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 1.6 Ascoli *Soit $F \subset C^0(X, E)$.*

F est relativement compacte dans $C^0(X, E)$ ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall a \in X$, $F_x = \{f(x), f \in F\}$ *est relativement compact dans E*
- *F est équicontinue*

Démonstration.

$\Rightarrow$ L'application $\pi_x : f \mapsto f(x)$ est continue donc $\pi_x(\overline{F})$ est compact et $\overline{F_x} \subset \pi_x(\overline{F})$ est compact.

Soit $\varepsilon > 0$. $\overline{F}$ est compacte. Il existe donc $f_1, \ldots, f_n \in C^0(X, E)$ tel que $\overline{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon)$.

La famille de fonctions continues $f_1, \ldots, f_n$ est équicontinue donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B(x, \delta), \forall i \in [\![1, n]\!], \|f_i(x) - f_i(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $f \in F$ il existe i tel que $\|f(y) - f_i(y)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in X$. Donc pour tout $y \in (x, \delta)$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f_i(y)\| + \|f_i(y) - f(y)\| \leqslant 3\varepsilon$$

Donc on a bien l'équicontinuité.

$\Leftarrow$ On a une injection de $C^0(X,E) \hookrightarrow E^X$. On a donc $F \hookrightarrow \prod_{x\in X} F_x \hookrightarrow \prod_{x\in X} \overline{F_x}$. Or, pour tout x, $\overline{F_x}$ est compact dans E donc le produit précédent est compact dans E^X muni de la topologie de convergence simple. Soit $\widetilde{F}$ la fermeture de F pour cette topologie. $\widetilde{F}$ est compact. Pour conclure, on montre que $\widetilde{F} \subset C^0(X,E)$ et la restriction à $\widetilde{F}$ de la topologie produit coïncide avec la topologie forte de $C^0(X,E)$.

Par équicontinuité, on a que $F \subset \bigcap_{y\in B(x,\delta)} \{f, \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon\} = \bigcap_{y\in B(x,\delta)} \{f, \|\pi_x(f)-\pi_y(f)\| \leqslant \varepsilon\}$. Cet ensemble est une intersection de fermés donc un fermé (pour la topologie de E^X). On a donc que pour tout $f \in \widetilde{F}$ et pour tout y tel que $d(x,y) \leqslant \delta$, on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, les fonctions de $\widetilde{F}$ sont (équi)continues en x.
Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer qu'un ouvert pour la topologie forte est ouvert pour la topologie produit (restreintes à $\widetilde{F}$), ie que pour tout $\varepsilon > 0$ et $f_0 \in \widetilde{F}$, $B_\infty(f_0,\varepsilon) \cap \widetilde{F}$ contient un voisinage de 0 pour la topologie produit.
$\widetilde{F}$ est équicontinue donc uniformément équicontinue donc, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x,y \in X^2$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon/3$ pour totu $f \in \widetilde{F}$.

De plus, X est compact donc il existe $x_1,\dots,x_n$ tel que $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i,\delta)$.

Posons alors $V = \{f \in \widetilde{F}, \forall i, \|f(x_i)-f_0(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}\}$, intersection finie d'ouvert de la topologie produit donc un ouvert (contenant trivialement 0). Il reste à vérifier que $V \subset B(f_0,\varepsilon)$.
Soit $f \in V$. Pour tout $y \in X$, il existe i tel que $d(x_i,y) < \delta$ donc pour tout $f \in \widetilde{F}$, $\|f(x_i)-f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. On a alors

$$\|f(y)-f_0(y)\| \leqslant \|f(y)-f(x_i)\| + \|f(x_i)-f_0(x_i)\| + \|f_0(x_i)-f_0(y)\|$$

Comme on est sur un compact, $\|f-f_0\|_\infty < \varepsilon$ donc $f \in B(f_0,\varepsilon)$. ■

Remarque 1.6 La démonstration marche dans le cas $C^0(X,Y)$.

Exemple d'application : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, $(f_n)_n \in C^0(K,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Pour extraire une sous-suite qui converge uniformément, il suffit de vérifier les deux points du théorème d'Ascoli. C'est en particulier vrai si on a $\sup_n \sup_x |f_n(x)| < \infty$ ou $\sup_n \sup_x \|Df_n(x)\| < \infty$.

L'intérêt de Y métrique est d'utiliser la topologie faible $*$ car si on munit l'ensemble d'arrivée de cette topologie, il n'est pas métrisable, mais si on se restreint à sa boule unité, ça devient métrisable.

1.4 Espaces L^p

1.4.1 Densités

On se place dans $L^p(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME 1.7 RIESZ-FISCHER *Si $p \geqslant 1$, L^p est un Banach.*

THÉORÈME 1.8 *L'ensemble $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $p \neq \infty$.*

COROLLAIRE 1.2 *L^p est séparable pour $p < \infty$.*

Démonstration. On peut écrire $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ avec K_n compacts croissants ($K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$). (Il suffit de prendre $K_n = \overline{B}(0,n) \cap \{x \in \Omega, d(x,\Omega^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$.)

On sait que $C^0(K)$ est séparable pour tout K. Pour tout n, $C(K_{n+1})$ contient une partie dénombrable dense F_{n+1} (pour la norme infinie). Il existe $\varphi_n \in C^0$ tel que $\varphi_n = 1$ sur K_n et $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. (Il suffit de prendre $\varphi_n(x) = \frac{d(x,\overline{K^c_{n+1}})}{d(x,K_n)+d(x,\overline{K^c_{n+1}})}$).

Soit $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\varphi_n \times F_{n+1})$ est bien une famille dénombravle dense dans L^p puisque $C_c(\Omega)$ est dense dans L^p. ∎

Démonstration du théorème 1.8. La famille

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}, |A_i| < \infty, A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

est dense dans L^p.

Il suffit donc de montrer qu'on peut approcher 1_A par une fonction continue à support compact.

Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tel que $|A| < \infty$. La mesure de Lebesgue est régulière donc pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, $|A| = \sup_{K \subset A} |K| = \inf_{A \subset U} |U|$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe K compact et U ouvert tel que $K \subset A \subset U$ et $U \setminus K| \leqslant \varepsilon$.

Il existe φ continue tel que $\varphi = 1$ sur K et $\operatorname{supp} \varphi \subset U$.

$$\|\varphi - 1_A\|_p^p = \int_{U \setminus K} |\varphi(x) - 1_A(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 2^p |U \setminus K| \leqslant 2^p \varepsilon$$ ∎

Remarque 1.7 Le résultat reste vrai pour $L^p(X, \mathrm{d}\mu)$ avec μ régulière et X σ-compact.

Proposition 1.6 L^∞ n'est pas séparable.

Lemme 1.8.1
Soit E un evn. S'il existe une famille non dénombrables $(O_i)_i$ d'ouverts disjoints, alors E n'est pas dénombrable.

Démonstration. Si E est séparable, il existe (x_n) dense donc pour tout i, il existe n_i tel que $x_{n_i} \in O_i$.

Alors $i \mapsto n_i$ est injective car les O_i sont disjoints. Mais alors I est dénombrable. Contradiction. ■

Démonstration de la proposition 1.6. Pour tout $a \in \Omega$, il existe $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset \Omega$. On pose $O_a = \{f \in L^\infty, \left\|f - 1_{B(a,r_a)}\right\|_\infty < \frac{1}{2}\}$.

O_a est ouvert, Ω n'est pas dénombrable (sauf s'il était vide, ce qui est inutile). Par séparation de Ω, on peut choisir les r_a suffisamment petits pour que $O_a \cap O_b = \varnothing$ si $a \neq b$. D'où le résultat. ■

<u>Théorème 1.9</u> *C_c^∞ est dense dans L^p pour $p \neq \infty$.*

Démonstration. On a déjà vu que $C_c(\Omega)$ est dense dans L^p pour $p \neq \infty$. Il suffit donc d'approcher toute fonction de $C_c(\Omega)$ par une suite de fonctions C_c^∞ en norme p.

Soit ρ_n une identité approchée et $f \in C_c(\Omega)$. On note $K = \operatorname{supp} f \subset \Omega$. On pose

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y$$

f_n est C^∞ (dérivation sous l'intégrale). $\operatorname{supp}(f_n) \subset \operatorname{supp}(f) + B(0, \frac{1}{n}) \subset K + B(0, \frac{1}{n} \subset \Omega$.

Il reste à montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

Lemme 1.9.1
Soit $h > 0$. On pose $\tau_h f : x \mapsto f(x+h)$. ALors $\tau_h f \to f$ dans L^p.

Démonstration. Soit $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$.

g est uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d$, $\|x - y\| \leqslant \delta \Rightarrow \|g(x) - g(y)\| \leqslant \varepsilon$.

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_p &\leqslant \|\tau_h(f-g)\|_p + \|f-g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p \\
&\leqslant 2\varepsilon + \left(\int_{K+B(0,1)} |g(x+h) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon |K + B(0,1)|^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon |K + B(0,1)|^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

pour $|h| \leqslant \delta$. ■

On a alors

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p &= \int_\Omega \left| \int \rho_n(y) f(x-y) \,\mathrm{d}y - f(x) \right|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left[\int \rho_n^{1-\frac{1}{p}} \rho_n^{\frac{1}{p}} (f(x-y) - f(x)) \,\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \int_\Omega \left(\int \rho_n(y) \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \int \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \int \rho_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout h, $|h| \leqslant \delta \Rightarrow \|\tau_h f - f\|_p \leqslant \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_p^p \leqslant \int_{|y| \leqslant \delta} \rho_n(y) &\underbrace{\int_\Omega |f(x-y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x}_{\leqslant \varepsilon^p} \mathrm{d}y \\
&+ \int_{|y| > \delta} \rho_n(y) \int_\Omega |f(x-y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \varepsilon^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y| > \delta} \rho_n(y) \,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \varepsilon^p
\end{aligned}$$

à partir d'un certain rang. ■

Remarque 1.8 Pour la démonstration du théorème, il suffi de montrer par troncature que les L_c^p sont denses dans L^p.

1.4.2 Critères de compacité

<u>Théorème 1.10</u> *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soit ω relativement compact inclus dans Ω, F un sous-ensemble borné de L^p pour $p < \infty$. Si de plus,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta < d(\omega, \Omega^c)), \forall h, \forall f \in F, |h| \leqslant \delta \Rightarrow \|\tau_h f - f\|_p \leqslant \varepsilon$$

Alors $F|_\omega$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer Ω borné.

Si $f \in L^p$, on note $\widetilde{f} = f 1_\Omega$. $\widetilde{f} \in L^p$ et $\operatorname{supp} \widetilde{f}$ est compact.

On a vu que $\rho_n * \widetilde{f} \to \widetilde{f}$ dans L^p.

De plus, à n fixé, soit $F_n = \{\rho_n * \widetilde{f}, \widetilde{f} \in \widetilde{F}\}$ $(\widetilde{F} = \{\widetilde{f}, f \in F\})$.

Pour tout $g \in F_n$, $g \in C^0(K)$ avec $K = \operatorname{supp} \widetilde{f} + B(0,1)$. Donc, pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned}|\rho_n * \widetilde{f}(x)| = \left|\int_{\operatorname{supp} \widetilde{f}} \rho_n(x-y)\widetilde{f}y \,\mathrm{d}y\right| &\leqslant \|\rho_n\|_\infty \int_{\operatorname{supp} \widetilde{f}} \left\|\widetilde{f}(y)\right\| \,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|\rho_n\|_\infty \left\|\widetilde{f}\right\|_p \leqslant \|\rho_n\|_\infty M\end{aligned}$$

avec $L = \sup\limits_{f \in F} \|F\|_p$. D'où :

$$\left|\frac{\partial(\rho_n * \widetilde{f})}{\partial x_j}(x)\right| = \left|\int_{\operatorname{supp} \widetilde{f}} \frac{\partial \rho_n}{\partial x_j}(x-y)\widetilde{f}(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant K_n^{(1)} M$$

avec $K_n^{(1)} = \sup\limits_{\operatorname{supp} \widetilde{f}} \|\nabla \rho_n\|_\infty$.

Donc à n fixé la famille $F_n = \{\rho_n * \widetilde{F}\}$ vérifie les hypothèses d'Ascoli, donc est relativement compacte dans $C^0(K)$ donc aussi dans L^p.

$L^p(\omega)$ est complet donc il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \dots, f_k \in L^p(\omega)$ tel que $F|_\omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(f_i, \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que pour tout $f \in F$, $\left\|\rho_n * \widetilde{f} - f\right\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Il suffit de montrer que la famille $F_n = \{\rho_n * \widetilde{f}, f \in F\}$ peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Or on sait que $F_n \subset C^0(\overline{\omega})$. De plus on a l'existence de C_n tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $f \in F_n$, $\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_\infty \leqslant C_n$.

Par Ascoli, F_n est relativement compacte dans $C^0(\overline{\omega})$, donc F_n peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2|\omega|^{\frac{1}{p}}}$ en norme uniforme.

Donc F_n est recouverte par un nombre fini de boules de rauon $\frac{\varepsilon}{2}$ en norme L^p puisque $\|f - f_i\|_p \leqslant |\omega^{\frac{1}{p}} \|f - f_i\|_{C^0}$. ∎

Corollaire 1.3 *Sous les mêmes hypothèses, et en ajoutant*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \omega \text{ ouvert relativement compact de } \Omega, \forall f \in F, \|F\|_{L^p(\Omega - \omega)} \leqslant \varepsilon$$

alors F est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. il existe ω ouvert relativement compacte de Ω telle que pour tout $f \in F$, $\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Par le théorème précédent, F/ω est relativement compacte dans $L^p(\omega$ donc il existe $f_1, \dots, f_k \in L^p(\omega)$ tels que $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_{L^p(\omega)}(f_i, \dfrac{\varepsilon}{2})$.

Posons $\widetilde{f}_i = f_i 1_\omega$. On a $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{L^p(\Omega)}(\widetilde{f}_i, \varepsilon)$ donc F est relativement compact dans $L^p(\Omega)$. ■

1.5 Espaces de Baire, théorèmes de Banach

Définition 1.10 Soit X un espace topologique. On appelle G_δ une intersection dénombrable d'ouverts et F_σ une réunion dénombrable de fermés.

THÉORÈME 1.11 *Soit X un métrique complet. Une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense et si X est une réunion dénombrable de F_n fermés, alors un des fermés est d'intérieur non vide.*

Démonstration. La deuxième assertion est une conséquence directe de la première.

Soit $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses. Soit $x \in X$ et V un voisinage ouvert de x

O_0 est dense donc il existe $x_0 \in V \cap O_0$. $V_0 = V \cap O_0$ est ouvert donc il existe $1 > r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset V \cap O_0$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in V_{n-1} \cap O_n$ (car O_n est dense) et il existe $\frac{1}{n} > r_n > 0$ tel que $V_n := B(x_n, r_n) \subset V_{n-1} \cap O_n$.

On a donc une suite V_n d'ouverts non vides et $(\overline{V_n})_n$ est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0. Comme X est complet, l'intersection des $\overline{V_n}$ est un singleton $\{y\}$. Donc tous les O_n intersectent tous les voisinages de x.

■

Remarque 1.9 C'est aussi vrai si X est localement compact. Il suffit alors de choisir les $\overline{V_n}$ compacts et on utilise qu'une intersection décroissantes de compacts de diamètre qui converge vers zéro est non vide.

THÉORÈME 1.12 BANACH-STEINHAUS *Soit E un Banach, F un evn et $(T_i)_i$ une suite de $L_c(E, F)$.*

Si pour tout $x \in E$, $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$ alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Démonstration. Soit $F_n = \{x \in E, \forall x \in I, \|T_i x\| \leqslant n\}$. On écrit $F_n = \bigcap_{i \in I} T_i^{-1}(\overline{B}_F(0, n))$ qui est une intersection de fermés et on a par hypothèse, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \varnothing$ par Baire donc il existe $y \in E$ et $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset F_{n_0}$.

Pour tout z tel que $\|z\| < r$, $y+z \in F_{n_0}$ donc pour tout $i \in I$, $\|T_i(y+z)\| \leqslant n_0$. On a la même assertion avec $y-z$ donc on a

$$2\|T_i(z)\| = \|T_i(y+z) - T_i(y-z)\| \leqslant 2n_0$$

Donc pour tout z tel que $\|z\| \leqslant r$, on a $\sup\limits_{i\in I} \|T_i z\| \leqslant n_0$ et par homogénéité, $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| \leqslant \frac{n_0}{r}$. ■

Corollaire 1.4 *Soit E un Banach, F un evn, $(T_n)_n \in L_c(E,F)$. Si pour tout $x \in E$, $T_n x$ converge vers Tx alors T est linéaire continue.*

Démonstration. Pour tout x, $\sup\limits_n \|T_n x\| < \infty$ puisque $T_n x \to Tx$ dans F.

Par Banach-Steinhaus, $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$. Or on a $\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leqslant \sup_n \|T_n\| \|x\|$.

Donc $T \in L_c(E,F)$ et $\|T\| \leqslant \sup_n \|T_n\| < \infty$. ■

Théorème 1.13 Application ouverte de Banach *Soit E, F deux Banachs, $T \in L_c(E,F)$ surjective. Alors T est ouverte*

Démonstration. Il suffit de montrer que $T(B_E(0,1))$ est ouverte. T est surjective donc

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(B_E(0,n)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_E(0,n))}$$

Il existe donc n_0 tel que $\overset{\circ}{\overline{T(B_E(0,n_0))}}$ soit non vide donc il existe $y \in E$, $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$.

On remarque que $B_E(0,n_0)$ est symétrique et convexe donc, comme T est linéaire, $T(B_E(0,n_0))$ aussi et $\overline{T(B_E(0,n_0))}$ aussi.

Pour tout $z \in B_E(0,r)$, $y \pm z \in B(y,r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$ donc $z = \frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2} \in \overline{T(B_E(0,n_0))}$ donc $B(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$.

Par dilatation, comme T est linéaire, on a aussi $B(0,\frac{r}{2^n}) \subset \overline{T(B_E(0,\frac{n_0}{2^n}))}$ pour tout n. On va montrer que $B(0,r) \subset T(B_0(0,2n_0))$.

Soit $z \in B(0,r)$. Il existe $x_1 \in B_E(0,n_0)$ tel que $\|z - Tx_1\| \leqslant \frac{r}{2}$. $z - Tx_1 \in B(0,\frac{r}{2})$ donc il existe $x_2 \in B(0,\frac{n_0}{4})$ tel que $\|z - Tx_1 - Tx_2\| \leqslant \frac{r}{4}$.

Par récurrence, on construit $(x_n)_n$ tel que pour tout n, $x_n \in B(0,\frac{n_0}{2^n})$ et $\|x - Tx_1 - \ldots - Tx_n\| \leqslant \frac{r}{2^n}$.

Or la série des x_n converge normalement donc $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ vérifie $\|x\| \leqslant 2n_0$. On obtient donc que $z = Tx$ donc $z \in T(B_E(0,2n_0))$.

Ainsi, $B(0,r) \subset T(B_E(0,2n_0))$ donc T est ouverte. ■

COROLLAIRE 1.5 ISOMORPHISME DE BANACH *Soit E, F deux Banachs, $T \in L_c(E, F)$ bijective. Alors T est un homéomorphisme.*

COROLLAIRE 1.6 GRAPHE FERMÉ *Soit E, F deux Banachs, $T \in L(E, F)$. Alors T est continu ssi $G(T) = \{(x, Tx), x \in E\}$ est un fermé.*

Remarque 1.10 Pour montrer que T est continu, il suffit de vérifier que si $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$ alors $y = Tx$.

Démonstration. L'implication $\Rightarrow$ est claire. Montrons l'autre. Si $G(T)$ est fermé, $G(T)$ est un Banach.

Par le théorème, $\pi_1 : (x, y) \to x$ est bijective donc sa réciproque est continue. Comme $\pi_2 : (x, y) \to y$ est continue, $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue. ∎

Chapitre 2

Dualité – Espaces réflexifs

2.1 Forme algébrique de Hahn-Banach

<u>Théorème 2.1</u> Hahn-Banach *Soit E un espace vectoriel, $p : E \to \mathbb{R}$ tel que pour $\lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.*

Soit G un sev de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire inférieure à p.

Alors il existe $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $f|_G = g$ et $f \leqslant p$ sur E.

Démonstration.

1. Si $E = G \oplus \mathbb{R}x_0$, on prend α à choisir tel que $f(x + tx_0) = g(x) + t\alpha$ pour tout $x \in G$.
   On va montrer qu'on peut choisir α pour que $f(y) \leqslant p(y)$ pour tout $y \in E$. On veut $f(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0)$.
   Il suffit d'avoir $g(x) \pm \alpha = f(x \pm x_0) \leqslant p(x \pm x_0)$, ce qui équivaut à
   $$\sup_{x \in G}(g(x) - p(x - x_0)) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x \in G}(p(x + x_0) - g(x))$$
   On peut donc choisir α ssi $\sup\limits_{x \in G}(g(x) - p(x - x_0)) \leqslant \inf\limits_{x \in G}(p(x + x_0) - g(x))$.
   Or pour tout $y, z \in G$, $g(y+z) = g(y) + g(z) \leqslant p(y+z) \leqslant p(y - x_0) + p(z + x_0)$
   Donc $g(y) - p(y - x_0) \leqslant p(x_0 + z) - g(z)$ ce qui assure l'inégalité recherchée.
2. On considère $X = \{(f, F), G \subset F, f|_G = g$ avec f linéaire et $f \leqslant p$ sur $F\}$.
   On dit que $(f_1, F_1) \leqslant (f_2, F_2)$ ssi $F_1 \subset F_2$ et $f_2|_{F_1} = f_1$.
   X est non vide, ordonné et inductif donc par Zorn, il existe (f, F) maximal. On veut montrer que $F = E$. Si ce n'est pas le cas, on peut prolonger f à $F \oplus \mathbb{R}x_0$ pour $x_0 \in E \setminus F$. ■

Corollaire 2.1 *Soit E un evn, F un sev de E et $g \in L(F, \mathbb{R})$. Il existe $f \in L_c(E, \mathbb{R})$ prolongement de g à E de même norme.*

Démonstration. Il suffit de prendre $p(x) = \|g\| \|x\|$. ■

2.2 Topologies faible et faible $*$

2.2.1 Topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un evn.

Définition 2.1 $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E qui rend continue les $x \mapsto \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in E'$.

Une base de voisinages de x_0 pour cette topologie est donnée par les :

$$V_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varepsilon} = \{x \in E, \forall i, |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon\}$$

Proposition 2.1 La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.

Démonstration. Soit $x, y \in E$ non colinéaires. Par Hahn-Banach, il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x) = 1$ et $\varphi(y) = 0$.

$U = \{z, |\varphi(z)| < \frac{1}{2}\}$ et $V = \{z, |\varphi(z)| > \frac{1}{2}\}$ sont ouverts disjoints et $x \in U$, $y \in V$. ■

Remarque 2.1 On peut modifier pour le cas $x = \lambda y$.

Proposition 2.2 Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a

(i) $x_n \to x$ pour $\sigma(E, E')$ ssi pour tout φ, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$

(ii) Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$

(iii) Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$ alors $\|x_n\|$ est borné et $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$

(iv) Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$ et $\varphi_n \to \varphi$ fortement dans E alors $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

Remarque 2.2 On note $\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$.

De plus quand x_n converge vers x pour $\sigma(E, E')$, on note $x_n \rightharpoonup x$.

Démonstration.

(i) Si $x_n \rightharpoonup x$ alors pour tout $V \in V_x$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \in V$.

D'après l'expression d'une base de voisinage, on a, pour $\varphi \in E'$ et $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \in \{y, |\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon\}$ ie $\varphi(x_n) \to \varphi x$.

Réciproquement, si $\varepsilon > 0$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in E'$, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $\varphi_j(x_n) \to \varphi_j(x)$ donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on a $|\varphi_j(x_n) - \varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon$ donc $x_n \in V_{\varphi_1,\dots,\varphi_k,\varepsilon}$. D'où le résultat.

(ii) Si $x_n \to x$, alors pour tout $\varphi \in E'$, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ donc $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) On va utiliser le lemme suivant, qui se démontre tout seul via Hahn-Banach.

Lemme 2.1.1
Pour tout $x \in E$, il existe $\varphi' \in E'$ tellq ue $\varphi(x) = \|x\|$ et $\|\varphi\| \leqslant 1$.

Remarque 2.3 Le lemme implique que $\|x\| = \sup\limits_{\|\varphi\|\leqslant 1} \langle \varphi, x\rangle$ *est atteint.*

Si $x_n \rightharpoonup x$, Soit $e_{x_n} \in E''$ tel que $e_{x_n} = \varphi(x_n)$ pour tout $\varphi \in E'$.
Alors pour tout φ, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ donc $(|e_{x_n}(\varphi))_n$ est bornée. Par Banach-Steinhaus, $M = \sup_n \|e_{x_n}\| < \infty$. or pour tout n,

$$\|e_{x_n}\| = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} e_{x_n}(\varphi) = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \varphi(x_n) = \|x_n\|$$

Finalement, $\|x\| = \langle \varphi, x\rangle$ avec φ donnée par le lemme. or $\langle \varphi, x\rangle = \lim\limits_n \langle \varphi, x_n\rangle$ car $x_n \rightharpoonup x$.
Mais pour tout n, $\langle \varphi, x_n\rangle \leqslant \|x_n\|$ car $\|\varphi\| \leqslant 1$.
Donc $\|x\| = \lim_n \langle \varphi, x_n\rangle \leqslant \liminf \|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ et $\varphi_n \to \varphi$ alors $\langle \varphi_n, x_n\rangle \to \langle \varphi, x\rangle$.

$$\begin{aligned}|\langle \varphi_n, x_n\rangle - \langle \varphi, x\rangle| &\leqslant |\langle \varphi_n - \varphi, x_n\rangle| + |\langle \varphi, x_n - x\rangle \\ &\leqslant \|\varphi_n - \varphi\| \sup_n \|x_n\| + |\langle \varphi, x_n - x\rangle| \to 0\end{aligned}$$

car $\sup_n \|x_n\|$ est fini par le point précédent. ■

Remarque 2.4

- *En dimension finie, les topologies faible et forte coïncident.*
- *Un ouvert de $\sigma(E, E')$ est un ouvert pour la topologie forte (réciproque fausse en dimension infinie).*
- *$U = \{x \in E, \|x\| < 1\}$ est ouvert pour la topologie forte mais pas pour la topologie faible (en dimension finie). En effet, soit $x_0 \in U$, supposons qu'il existe $V \in V_{x_0}$ tel que $V \subset U$.*
  Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tel que $V_{\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varepsilon} \subset U$.
  Il existe donc $y \in E$ non nul et telle que $\varphi_i(y) = 0$ (sinon $y \mapsto (\varphi_i(y))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est injective, donc E de dimension finie). Alors $x_0 + \mathbb{R}y \subset V$ qui est non borné, ce qui est absurde.

- *En dimension infinie, la topologie faible et forte sont différentes : en général, si $x_n \rightharpoonup x$, on n'a pas $x_n \to x$. Mais il existe des espaces où toute suite faiblement convergente converge fortement, par exemple $\ell^1(\mathbb{N})$. Ceci assure que la topologie faible n'est pas métrisable en dimension infinie.*

2.2.2 Topologie faible $*$: $\sigma(E', E)$

Définition 2.2 C'est la topologie sur E' la moins fine qui rend C^0 les $\{e_x, x \in E\}$ avec $e_x \in E''$ tel que $e_x(\varphi) = \langle \varphi, x\rangle$.

Pour tout $\varphi \in E'$, une base de voisinage de φ est donnée par $V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{\psi \in E', \forall i \in [\![1, n]\!], |\langle \psi - \varphi, x_n\rangle| < \varepsilon\}$.

Remarque 2.5 Sur E', on a la topologie forte, la topologie $\sigma(E', E)$ faible $*$ et la topologie faible $\sigma(E', (E')')$.

Proposition 2.3 La topologie faible $*$ est séparée.

Démonstration. Soit $\varphi_1 \neq \varphi_2 \in E'$.

Il existe $x \in E$ tel que $\varphi_1(x) < \beta < \varphi_2(x)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

$U = \{\varphi, \varphi(x) < \beta\}$ est ouvert et contient φ_1. $V = \{\varphi, \varphi(x) > \beta\}$ est un ouvert qui contient φ_2 et $U \cap V = \varnothing$. ■

Proposition 2.4 Soit φ_n une suite de E'. On a :

(i) $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ pour $\sigma(E', E)$ ssi $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pour tout $x \in E$

(ii) Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ pour $\sigma(E', E)$ alors $(\|\varphi_n\|)_n$ est bornée $\|\varphi\| \leqslant \liminf \|\varphi_n\|$

(iii) Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ pour $\sigma(E', E)$ et $x_n \to x$, alors $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$

Démonstration.

(i) idem qu'avant

(ii) Pour tout $\psi \in E'$, $\|\psi\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \langle \psi, x\rangle$.

Pour tout $x \in E$, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ donc $(\varphi_n(x))_n$ est borné. Par Banach-Steinhaus, on a $M = \sup_n \|\varphi_n\| < \infty$.

(iii) $|\langle \varphi_n, x_n\rangle - \langle \varphi, x\rangle| \leqslant \langle \varphi_n, x_n - x\rangle + |\langle \varphi_n - \varphi, x\rangle| \leqslant M\|x_n - x\| + |\langle \varphi_n - \varphi, x\rangle| \to 0$ ■

Remarque 2.6 Par Banach-Alaoglu, $B_{E'}$ est compacte pour $\sigma(E, E')$.

2.3 Espaces réflexifs

Soit E un Banach, on a une application $J : E \to E''$ qui à x associe l'évaluation en x.

Proposition 2.5 Pour tout $x \in E$, $\|J(x)\| = \|x\|$ donc J est continue injective.

Démonstration. $\|J(x)\| = \sup\limits_{\|\varphi\| \leqslant 1} \langle J(x), \varphi \rangle = \sup\limits_{\|\varphi\| \leqslant 1} \langle \varphi, x \rangle = \|x\|$. ■

Définition 2.3 Si E est un Banach, on dit que E est réflexif ssi J est surjective.

Remarque 2.7 Si E est réflexif, $E \sim E''$ et les topologies $\sigma(E', E'')$ et $\sigma(E', E)$ coïncident.

2.3.1 Propriétés

THÉORÈME 2.2 *Soit E un Banach.*

E est réflexif ssi $B_E = \{x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si E est réflexif, $B_{E''}$ est compacte pour la topologie $\sigma(E'', E')$ par Banach-Alaoglu.
Il suffit de montrer que $J^{-1} : (B_{E''}, \sigma(E'', E')) \to (B_E, \sigma(E, E'))$ est continue.
Par définition de $\sigma(E, E')$, il suffit de montrer que $\varphi \circ J^{-1}$ est continue pour tout $\varphi \in E'$.
Pour tout $\psi \in E''$, on a $\langle \varphi, J^{-1}\psi \rangle = \langle \varphi, x \rangle = \langle J(J^{-1}\psi), \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$
Donc $\varphi \circ J^{-1}$ est continue (par définition de la topologie).

$\Leftarrow$ On utilise le

Lemme 2.2.1 Helly
Soit E un Banach, $f_1, \dots, f_n \in E'$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in E$ de norme au plus 1 tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon$.

(ii) Pour tout $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| \leqslant \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\|$

Démonstration.

(i)$\Rightarrow$ (ii) Soit $\varepsilon > 0$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, $S = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\alpha_i - \langle f_i, x_\varepsilon\rangle)\right| + \left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i, x_\varepsilon\right\rangle\right| \\ &\leqslant S\varepsilon + \|x_\varepsilon\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\right\| \\ &\leqslant S\varepsilon + \left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\right\|\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \to 0$, on a le résultat.

(ii)$\Rightarrow$(i) On pose

$$\phi : \begin{cases} B_E & \to \quad \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto \quad (\langle f_i, x\rangle)_{1\leqslant i\leqslant n}\end{cases}$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, l'assertion i équivaut à $\alpha \in \overline{\phi(B_E)}$.
Par l'absurde, s'il existe $\alpha \notin \overline{\phi(B_E)}$ (qui est un convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$).
Or dans $\mathbb{R}^n$, on peut séparer un point et un convexe fermé qui ne contient pas ce point par un hyperplan. Il existe donc $\beta \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in B_E$, $\phi(x) \cdot \beta) \leqslant \gamma < \alpha \dot{\beta}$. ($\cdot$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$).
On a donc $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\langle f_i, x\rangle \leqslant \gamma < \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$ pour tout $x \in B_E$.
Alors $\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i\right\| \leqslant \gamma < \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$, ce qui contredit (ii). ∎

Lemme 2.2.2 Goldstine
Soit E un Banach.
$J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$.

Démonstration. Soit $\xi \in B_{E''}$, $V \in V_\xi$ pour $\sigma(E'', E')$ ie $V = \{\eta \in E'', \forall i \in [\![1, n]\!], |\langle \eta - \xi, \varphi_i\rangle| < \varepsilon$ avec $\varphi_i \in E'\}$.
On veut $\eta = J(x) \in V$ avec $\|x\| \leqslant 1$ ie il existe $x \in B_E$ tel que $|\langle J(x), \varphi_i\rangle - \langle \xi, \varphi_i\rangle| < \varepsilon$ pour tout i.
On applique le lemme 2.2.1 avec $\alpha_i = \langle \xi, \varphi_i\rangle$ et $f_i = \varphi_i$.

Il suffit de vérifier la deuxième assertion : pour tout $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \beta_i \langle \xi, \varphi_i\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \xi, \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i\right\rangle\right| \\
&\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i\right\| \quad \text{car} \quad \|\xi\| \leqslant 1
\end{aligned}$$ ∎

Lemme 2.2.3
Soit E, F des Banachs et $T = L(E,F)$.
$T \in L_c(E,F)$ ssi $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$ est continue.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in F'$, $\varphi \circ T : E \to \mathbb{R}$ est continue pour $\sigma(E,E')$ mais $T \in L_c(E,F)$ donc $\varphi \circ T \in E'$ qui est donc continue pour $\sigma(E,E')$ par définition de la topologie.
$\Leftarrow$ On utilise le théorème du graphe fermé. Si $T : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$ est continue alors $G(t) \subset (E \times F, (\sigma(E,E') \times \sigma(F,F')))$ est fermé pour cette topologie.
Il est donc fermé dans $E \times F$ pour la topologie produit des normes donc par le graphe fermé, $T \in L(E,F)$. ∎

Si B_E est compacte pour $\sigma(E,E')$ on va montrer que $JB_E = B_{E''}$ (suffisant pour avoir $JE = E''$.
J est continue de $E \to E''$ pour les topologies fortes, donc par le lemme 2.2.3, J est continues de $(E, \sigma(E,E')) \to (E'', \sigma(E'', E'''))$ donc J est continue de $(E, \sigma(E,E')) \to (E'', \sigma(E'', E'))$ car les $(e_\varphi)_\varphi \in E'''$.
Donc $J(B_E)$ est compacte pour $(E'', \sigma(E'', E'))$. Par le lemme 2.2.2, $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$ donc $J(B_E) = B_{E''}$. ∎

Remarque 2.8 Les Hilberts sont réflexifs. L^1 *n'est pas réflexif : Si* ρ_n *est une approximation de l'unité de la forme* $\rho_n = n\rho(nx)$ *avec* ρ *positive, d'intégrale* 1 *et de support inclus dans* $[-1,1]$. *On a alors* $\int \rho_n \varphi \to \varphi(0)$.

Proposition 2.6 Soit E un espace réflexif, M un sev de E fermé. Alors M est réflexif pour la topologie induite.

Démonstration. On utilise le théorème précédent. Il suffit de montrer que B_M est compacte pour $\sigma(M, M')$.

M est fermé pour la topologie $\sigma(E,E')$.

Lemme 2.2.4
Soit E un Banach, $M \subset E$ fermé, $x_0 \notin M$. Alors il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi = 0$ sur M et $\varphi(x_0) \neq 0$.

Démonstration. Si M est fermé et $x_0 \notin M$, $d(x_0, M) = d > 0$. On construit une application linéaire continue sur $M \oplus \mathbb{R}x_0$.

Pour tout $y \in M$, on écrit $\varphi(y + tx_0) = td$.

On a (si $t \neq 0$) $\|\varphi(y + tx_0)\| = |t| \left\|\varphi(\frac{y}{t} + x_0)\right\| = |t|d \leqslant |t| \left\|\frac{y}{t} + x_0\right\| = \|y + tx_0\|$ donc φ est continue. Par Hahn-Banach, on la prolonge à E. On a alors le résultat. ∎

On va montrer que M^c est ouvert. Soit $x_0 \notin M$ Il faut montrer que M^c contient un voisinage de x_0 pour la topologie faible.

On pose $V = \{x \in E, \varphi(x) > 0\}$ est ouvert pour la topologie faible et $V \subset M^c$.

Donc M est fermé pour $\sigma(E, E')$ et B_E est compact pour $\sigma(E, E')$ par le théorème précédent donc B_m est fermé dans un compact donc compact pour la topologie induite sur M par $\sigma(E, E')$.

Or sur M, la topologie induite par $\sigma(E, E')$ est $\sigma(M, M')$, puisque :

- Si $V \in V_{x_0} \cap M$ (voisinage pour $\sigma(E, E')$), $V = \{x \in M, |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon$ avec $\varphi_i \in E'\}$ est aussi un ouvert pour $\sigma(M, M')$.
- Si $V \in V_{x_0}$ pour $\sigma(M, M')$, $V = \{x \in M, |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon$ avec $\varphi_i \in M'\}$. Par Hahn-Banach, pour tout i, il existe $\widetilde{\varphi_i} \in E'$ tel que $\widetilde{\varphi_i}|_M = \varphi_i$.
  Sonc $\{x \in M, |\widetilde{\varphi_i}(x) - \widetilde{\varphi_i}(x_0)| < \varepsilon\} \subset V$ qui est un ouvert pour la topologie induite.

Donc B_m est compact pour $\sigma(M, M')$ donc M est réflexif. ∎

Proposition 2.7 Si E est un Banach, E est réflexif ssi E' l'est.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si E est réflexif, par le théorème précédent il suffit de montrer uqe $B_{E'}$ est compacte pour la topologue $\sigma(E', E'')$.
Or $\sigma(E', E'') = \sigma(E'', E')$ car E est réflexif. Par Banach-Alaoglu, $B_{E'}$ est compacte pour la topologie faible $*$.

$\Leftarrow$ Si E' est réflexif, E'' aussi. On a vu que $J(E)$ est un fermé de E'' donc réflexif. E est donc réflexif.
En effet, si on a une isométrie surjective T entre E et F Banachs alors si F est réflexif, E aussi puisque T^{-1} est continue pour la topologie forte, donc pour la topologie faible. De plus, comme c'est une isométrie, $T^{-1}(B_F) = B_E$. Comme F est réflexif, B_F est compacte (pour la topologie faible) donc B_E aussi et E est réflexif. ∎

2.3.2 Séparabilité

THÉORÈME 2.3 *Si E' est séparable, E l'est.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ dense dans E'. Pour tout n, il existe $x_n \in E$ de norme 1 tels que $f_n(x_n) \geqslant \frac{\|f_n\|}{2}$.

On va montrer que $(x_n)_n$ est une famille totale ie $\mathrm{Vect}\,\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense. Il suffit donc de montrer que son orthogonal est $\{0\}$.

Soit $\varphi \in E'$ qui annule tous les x_n. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $\|\varphi - f_n\| < \varepsilon$. On a alors

$$|f_n(x_n)| \leqslant |(f_n - \varphi)(x_n)| \leqslant \varepsilon \|x_n\|$$

donc $\|f_n\| \leqslant 2\varepsilon$. Ainsi,

$$\|\varphi\| \leqslant \|f_n - \varphi\| + \|f_n\| \leqslant 3\varepsilon$$

donc $\varphi = 0$. ■

COROLLAIRE 2.2 *E est réflexif et séparable ssi E' l'est.*

Démonstration. $E' \Rightarrow E$ est clair.

Dans l'autre sens, on a juste à montrer que E' est séparable. De plus E réflexif séparable implique E'' séparable donc E' séparable. ■

THÉORÈME 2.4 *Si E est un Banach séparable, $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie faible $*$.*

Démonstration. E est séparable donc B_E aussi. Il existe donc $(x_n)_n$ dense dans B_E. On pose $d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n\rangle|$.

d est bien une distance sur $B_{E'}$. On va montrer que sur $B_{E'}$, la topologie définie par d coïncide avec la topologie faible $*$.

- Soit $B(g,r) = \{f \in E', \|F\| \leqslant 1, d(f,g) < r\}$.

  Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{r}{4}$ donc en particulier, pour tout $f, g \in B_{E'}$,

  $$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n\rangle| \leqslant 2 \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{r}{2}$$

  Soit $V_{x_1,\dots,x_N}(g) = \{f \in E', \|f\| \leqslant 1, \forall i, |f(x_i) - g(x_i)| \leqslant \frac{r}{4N}\}$. C'est un voisinage de g pour la topologie faible $*$ et $V_{x_1,\dots,x_N} \subset B(g,r)$ donc pour tout $f \in V_{x_1,\dots,x_N}$,

  $$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n\rangle| \leqslant \frac{r}{4} + \frac{r}{2} < r$$

- Soit $V_{y_1,\dots,y_N,\varepsilon}(g)=\{f\in B_{E'},\forall i,|(f-g)(y_i)|<\varepsilon\}$ un voisinage de g pour la topologie faible.
  Pour tout i, il existe $x_i\in B_E$ tel que $|x_i-y_i|<\frac{\varepsilon}{4}$ donc $V_{x_1,\dots,x_N,\frac{\varepsilon}{2}}(g)\subset V_{y_1,\dots,y_N,\varepsilon}(g)$. On va montrer qu'il existe $r>0$ tel que $B_d(g,r)\subset V_{x_1,\dots,x_n,\frac{\varepsilon}{2}}(g)$.
  Prenons donc $f\in B_d(g,r)$. On a $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{2^n}|\langle f-g,x_n\rangle|<r$ donc pour tout $n\leqslant N$, $\langle f-g,x_n\rangle\leqslant r2^N$. Donc $B_d(g,\frac{\varepsilon}{4\cdots 2^n})\subset V_{x_1,\dots,x_N,\frac{\varepsilon}{2}}(g)$. ■

Remarque 2.9 Si E' est séparable, B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

Démonstration. Soit φ_n dense dans $B_{E'}$, $x,y\in B_E$ et $d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{2^n}\langle\varphi_n,x-y\rangle$.

Et on recommence. ■

2.3.3 Application à la convergence des suites

Proposition 2.8

- Si E est séparable, $(\varphi_n)_n$ une suite de E'. Alors si φ_n est bornée dans E', il existe $\varphi\in E'$ et une suite extraite φ_{n_k} tel que $\varphi_{n_k}\rightharpoonup\varphi$ pour $\sigma(E',E)$.
- Si E est réflexif, $(x_n)_n$ une suite de E. Si x est bornée, il existe x et n_k une suite extraite telle que $x_{n_k}\rightharpoonup x$ pour la topologie $\sigma(E,E')$.

Démonstration.

- Soit $(\varphi_n)_n\in B_{E'}(M)$ avec M un majorant de $\sup_n\|\varphi_n\|$. On a la compacité pour $\sigma(E',E)$ par Banach-Alaoglu et la métrique par le théorème précédent puisque E est séparable. D'où le résultat.
- Soit $M=\overline{\operatorname{Vect}\{x_n,n\in\mathbb{N}\}}$. M est séparable. C'est aussi un fermé d'un réflexif, donc un réflexif.
  $B_M(R)$ est donc un métrique compact pour $\sigma(M,M')$ (avec R qui borne les x_n). D'où la convergence faible pour $\sigma(M,M')$ donc pour $\sigma(E,E')$. ■

Remarque 2.10 On n'a pas supposé que E est séparable donc a priori, B_E n'est pas métrisable pour $\sigma(E,E')$.

2.3.4 Espaces uniformément convexes

Définition 2.4 Soit E un Banach, on dit que E est uniformément convexe ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1, \|x-y\| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$$

C'est une propriété géométrique qui dépend de la norme.

(a) Uniformément convexe (b) Non uniformément convexe

FIGURE 2.1 – Uniforme convexité

THÉORÈME 2.5 MILMAN-PETTIS *Les espaces uniformément convexes sont réflexifs.*

Remarque 2.11 Ce n'est pas une condition nécessaire.

Démonstration. On va montrer que $J(B_E) = B_{E''}$. Comme $J(B_E)$ est un fermé dans $B_{E''}$ pour la topologie forte, il ssufit de montrer que $J(S_E)$ est dense dans $S_{E''}$.

$$\forall \xi \in S_{E''}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S_E, \|\xi - J(x)\| < \varepsilon$$

Soit $\xi \in S_{E''}$, $\varepsilon > 0$. Par uniforme convexité, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ et $\|x-y\| > \varepsilon$ implique $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$.

Comme $\|\xi\| = 1$, il existe $f \in E'$ tel que $\langle \xi, f\rangle > 1 - \frac{\delta}{2}$. Soit $V = \{\eta \in E'', |\langle \eta - \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2}\}$. C'est un voisinage de ξ pour $\sigma(E'', E')$. On a aussi vu que $J(B_E)$ est dense dans E'' pour la topologie $\sigma(E'', E)$ (lemme de Goldstine) donc il existe $x \in B_E$ tel que $J(x) \in V$ ie $|\langle f, x\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2}$.

On va montrer que $\|\xi - J(x)\| \leqslant \varepsilon$. Par l'absurde, si $\xi \notin J(x) + \varepsilon B_{E''}$. Comme $B_{E''}$ est compact (donc fermé) pour la topologie faible $*$, $\sigma(E', E'')$, on a $(J(x) + \varepsilon B_{E''})^c$ ouvert pour la topologie $\sigma(E', E'')$.

Donc $(J(x)+\varepsilon B_{E''})^c \cap V$ est un voisinage de ξ pour la topologie $\sigma(E'', E')$ et $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour $\sigma(E'', E')$. Ainsi, il existe $\overline{x} \in B_E$, $J(\overline{x}) \in (J(x) + \varepsilon B_{E''})^c \cap V$ donc $\|\overline{x} - x\| = \|J(\overline{x}) - J(x)\| \geqslant \varepsilon$.

De plus, $J(\overline{x}) \in V$ donc $|\langle f, \overline{x}\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2}$. Ainsi,

$$2\langle \xi, f\rangle \leqslant \langle \xi, f\rangle - \langle f, \overline{x}\rangle + \langle \xi, f\rangle - \langle f, x\rangle + \langle f, x + \overline{x}\rangle$$

Donc
$$2-\delta \leqslant \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\langle f, x+\overline{x}\rangle \leqslant \delta+\|x+\overline{x}\|$$
Ainsi, par uniforme convexité, $\|x-\overline{x}\| \leqslant \varepsilon$ qui est absurde. ■

Proposition 2.9 Soit E un Banach uniformément convexe. Si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ et $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$ alors $x_n \to x$ pour la norme.

Remarque 2.12 Dans le cas d'un Hilbert, $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(H, H')$ ssi $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$. On sait de plus que $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$ donc $\|x_n\| \to \|x\|$.
$$\|x_n-x\|^2=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2\langle x_n, x\rangle \to 2\|x\|^2-2\|x\|^2=0$$

De plus, il existe des suites qui convergent faiblement non fortement. Par exemple dans $L^2(0,2\pi)$ avec $u_n=\sin(n\cdot)$ qui converge faiblement vers 0 (Riemann-Lebesgue). Pourtant $\|u_n\|_2^2 \to \pi$.

Démonstration. Si $x=0$, on n'a rien à faire. Sinon, on se ramène à $\|x\|=1$. On a $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$ et on a vu que $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$ donc $\|x_n\| \to 1$.

Soit $\lambda_n=\max(\|x_n\|, 1)$. On a $\lambda_n \to 1$. Soit $y_n=\frac{x_n}{\lambda_n}$. On a $\|y_n\| \leqslant 1$ et $y_n \rightharpoonup x$.

Considérons $\frac{y_n+x}{2}$ qui converge faiblement vers x. On a donc $\|x\|=1 \leqslant \liminf \left\|\frac{y_n+x}{2}\right\|$ et $\left\|\frac{y_n+x}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}(\|y_n\|+1) \leqslant 1$ pour tout n.

Donc $\left\|\frac{y_n+x}{2}\right\| \to 1$ et par uniforme convexité $\|x-y_n\| \to 0$. ■

2.4 Adjoints

Soit $T \in L(E, F)$, E, F Banachs.

<u>Définition 2.5</u> On définit l'adjoint de T par l'application $T^* \in L(F', E')$ telle que $\langle T^*\varphi, x\rangle=\langle\varphi, T x\rangle$.

Proposition 2.10 Si $T \in L_c(E, F)$, $T^* \in L(F', E')$ et $\|T\|=\|T^*\|$.

Démonstration. On a
$$|\langle T^*\varphi, x\rangle|\langle\|\varphi\|\|T x\| \leqslant\|\varphi\|\|T\|\|x\|$$

Et $\|T^p\varphi\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle T^*\varphi, x\rangle| \leqslant\|T\|\|\varphi\|$. Donc T^* est continue et $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

On a vu que $\|T x\|=\sup\limits_{\|\varphi\| \leqslant 1}|\langle\varphi, T x\rangle|$ donc
$$\|T X\| \leqslant \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1}|\langle T^*\varphi, x\rangle| \leqslant\|T^*\|\|x\|$$

Donc $\|T\| \leqslant \|T\|^*$ et on a l'égalité. ∎

Proposition 2.11 $\operatorname{Ker}(T^*) = (\operatorname{Im} T)^\perp$ et $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im}(T^*))^\perp$ avec
- Si $M \subset E$, $M^\perp = \{\varphi \in E', \varphi|_M = 0\}$
- Si $M \subset E'$, $M^\perp = \{x \in E, \forall \varphi \in M, \varphi(x) = 0\}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \varphi \in \operatorname{Ker}(T^*) \quad & \text{ssi} \quad T^*\varphi = 0 \quad \text{ssi} \quad \forall x \in E, \langle T^*\varphi, x\rangle = 0 \\ & \text{ssi} \quad \forall x \in E, \langle \varphi, Tx\rangle = 0 \\ & \text{ssi} \quad \operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Ker}\varphi \quad \text{ssi} \quad \varphi \in (\operatorname{Im} T)^\perp \end{aligned}$$

∎

<u>THÉORÈME 2.6</u> *Soit $T \in L_c(E,F)$. T est bijectif ssi T^* l'est.*

Démonstration. Si T^* est surjectif, $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \{0\}$ donc $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$ donc T est injectif.

De même, si T^* injectif, $\overline{\operatorname{Im}(T)} = E$. Il reste à vérifier que $\operatorname{Im}(T)$ est fermée. Pour tout $x \in E$, il existe $\varphi \in E'$ de norme inférieure à 1 telle que $\langle \varphi, x\rangle = \|x\|$. On a

$$\|x\| = \langle \varphi, x\rangle = \langle (T^{-1})^*\varphi, Tx\rangle \leqslant \left\|(T^{-1})^*\varphi\right\| \|Tx\| \leqslant \left\|(T^{-1})^*\right\| \|T\|$$

Donc il existe C tel que pour tout $x \in E$, $\|x\| \leqslant c\,\|Tx\|$ donc $\operatorname{Im}(T)$ est fermé puisque si $y_n = Tx_n \to y$, par l'inégalité précédente, $\|x_n - x_m\| \leqslant c\,\|y_n - y_m\|$ donc si $(y_n)_n$ est de Cauchy, (x_n) aussi donc converge et par continuité de T, $y = Tx \in \operatorname{Im}(T)$.

Réciproquement, si T bijectif, $TT^{-1} = T^{-1}T = \operatorname{Id}$. Pour tout φ, x on a

$$\langle \varphi, x\rangle = \langle \varphi, T^{-1}Tx\rangle = \langle T^*(T^{-1})^*\varphi, x\rangle$$

Donc $\varphi = T^*(T^{-1})^*\varphi$ donc on a $T^*(T^{-1})^* = \operatorname{Id}$ et on peut faire pareil dans l'autre sens donc T^* est bijectif. ∎

2.5 Exemples

2.5.1 Espaces de Hilbert

Le théorème de Riesz donne $H' \simeq H$. Donc $B_H(0,1)$ est compacte pour la topologie faible (Banach-Alaoglu) donc H est réflexif.

Dans un Hilbert, les topologies faible et faible $\times$ coïncident.

Si H est un Hilbert séparable, et $(x_n)_n$ bornée alors il existe une sous-suite qui converge faiblement : pour tout y, $\langle x_{n_k}, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.

2.5.2 Les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2.5.3 Cas $1 < p < \infty$

<u>Théorème 2.7</u> *Si $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est réflexif.*

Démonstration. On traite d'abord $2 \leqslant p < \infty$ en montrant que L^p est uniformément convexe. On va utiliser le

Lemme 2.7.1 Inégalité de Clarkson
$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{\|f\|_p^p+\|g\|_p^p}{2}$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|\frac{a+b}{2}|^p + |\frac{a-b}{2}|^p \leqslant \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$.

On a $\alpha^p + \beta^p \leqslant (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}$. Par homogénéité, il suffit de montrer que $1 + x^p \leqslant (1 + x^2)^{\frac{p}{2}}$ ce qui marche bien (étudier la fonction !)

En posant $\alpha = |\frac{a+b}{2}|$ et $\beta = |\frac{a-b}{2}|$, on a

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}$$

Comme $p \geqslant 2$, $x \mapsto x^{\frac{p}{2}}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ donc on a bien l'inégalité voulue. ∎

Si $\|f\|_p \leqslant 1$ et $\|g\|_p \leqslant 1$ avec $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon$, on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leqslant 1 - \frac{\|f-g\|_p^p}{2^p} \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}$$

donc

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \delta$$

avec $\delta > 0$.

Il reste le cas $1 < p < 2$. S'il existe une $T : L^p \to (L^q)'$ isométrie (q exposant conjugué de p). Si $p < 2$, L^q est réflexif dont $(L^q)'$ aussi. On a alors $T(L^p)$ fermé dans un réflexif donc réflexif. Comme $T : L^p \to T(L^p)$ est une isométrie surjective, L^p est réflexif. Il reste à trouver T.

Si $u \in L^p$, on définit T par $\langle Tu, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x$ pour tout φ.

Par Hölder, on a $\|T\| \leqslant 1$ et on va montrer que $\|Tu\|_{(L^q)'} = \|u\|_p$.

Soit $\varphi \in L^q$, $\varphi(x) = |u(x)|^{p-2}u(x)$ si $u(x)^neq0$ et 0 sinon. On a

$$\|\varphi\|_q^q = \int_\Omega |u(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(x)|^p$$

donc

$$\langle Tu, \varphi\rangle = \|\varphi\|_q^q$$

Donc $\|T\| = 1$. ∎

Remarque 2.13 Les L^p pour $1 < p < 2$ sont aussi uniformément convexes

<u>THÉORÈME 2.8</u> REPRÉSENTATION DE RIESZ *Pour tout $\varphi \in (L^p)'$, il existe $u \in L^q$ tel que $\langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$ et $\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^q}$.*

Démonstration. On définit $T : L^q \to (L^p)'$ qui vérifie $\langle Tu, v\rangle = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$

On a déjà vu que $\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^q}$ donc T est injective d'image fermée.

Il reste à montrer que T est surjective, comme $\mathrm{Im}(T)$ est fermée, il suffit de montrer que $(\mathrm{Im}\,T)^\perp = \{0\}$ (vu comme sous-espace de $(L^p)''$).

Comme L^p est réflexif, $J(L^p) = (L^p)''$. On montre que si $f \in L^p$ vérifie que $\langle J(f), Tu\rangle = 0$ pour tout u alors $f = 0$. On a

$$\langle J(f), Tu\rangle = \langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf = 0$$

Lemme 2.8.1
Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty$ alors $f = 0$ p.p.

Démonstration. Si ρ_n est une approximation de l'unité à support compact, $f * \rho_n \to f$ dans $L^1(K)$ pour tout K compact. Comme $y \mapsto \rho_n(x-y)$ est C^∞ donc $f * \rho_n = 0$ et $f = 0$. ∎

Ce qui achève la démonstration. ∎

Remarque 2.14 On a vu que si $1 < p < \infty$, L^p est séparable, ce sont donc des réflexifs séparables. Ainsi, si $(f_n)_n$ est bornée dans L^p, elle admet une sous-suite convergente pour $\sigma(L^p, (L^p)' = L^q)$ ie $\int_\Omega f_{n_k}\varphi \to \int_\Omega f\varphi$ pour tout $\varphi \in L^q$.

2.5.4 Cas L^1

L^1 est séparable.

<u>Théorème 2.9</u> Riesz $(L^1)' = L^\infty$.

Démonstration. On se ramène à Riesz dans le cas $p = 2$. Soit $w \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout K relativement compact, il existe ε_K tel que $w(x) \geqslant \varepsilon_K$ pour tout $x \in K$. (Si Ω est bornée, on prend $w = 1$, sinon on pose $w(x) = \alpha_n$ sur $\Omega \cap \{n \leqslant |x| \leqslant n+1\}$ et on choisit les α_n pour que ça marche).

Soit $\varphi \in (L^1)'$. On considère la forme linéaire

$$\begin{cases} L^2 & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle \varphi, fw \rangle \end{cases}$$

qui est bien défini car le produit de fonctions L^2 est L^1.

On a $|\langle \varphi, fw \rangle| \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \|w\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$ donc cette forme linéaire est conntinue sur L^2. Par Riesz, il existe $u \in L^2$ tel que $\langle \varphi, fw \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) \, \mathrm{d}x$ pour tout $f \in L^2$.

On va montrer que $\frac{u}{w}$ est L^∞ et que $\left\| \frac{u}{w} \right\|_\infty = \|\varphi\|_{(L^1)'}$.

Soit $C > \|\varphi\|_{(L^1)'}$, $A = \{x \in \mathbb{R}^n, \frac{u(x)}{w(x)} > C\}$. Montrons que $\lambda(A) = 0$.

Par l'absurde, supposons que $\lambda(A) > 0$. Il existe alors $\widetilde{A} \subset A$ tel que $0 < \lambda(\widetilde{A}) < \infty$. On prend alors $f = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \widetilde{A} \text{ et } u(x) > 0 \\ -1 & \text{si } x \in \widetilde{A} \text{ et } u(x) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors

$$\langle \varphi, fw \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\widetilde{A}} |u(x)| \, \mathrm{d}x$$

Donc

$$\langle \varphi, fw \rangle \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \|fw\|_{L^1} \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \int_{\widetilde{A}} w(x) \, \mathrm{d}x$$

$$C \int_{\widetilde{A}} w(d) \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{\widetilde{A}} |u(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \int_{\widetilde{A}} w(x) \, \mathrm{d}x$$

On a $c > \|\varphi\|_{(L^1)'}$ et $c \int_{\widetilde{A}} w \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \int_{\widetilde{A}} w$ ce qui est absurde car si $\lambda(\widetilde{A}) > 0$, $\int_{\widetilde{A}} w > 0$.

On a donc $\frac{u}{w} \in L^\infty$ et $\left\| \frac{u}{v} \right\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'}$. De plus, $\langle \varphi, fw \rangle = \displaystyle\int_\Omega \frac{u}{w} fw \, \mathrm{d}x$ pour tout $f \in L^2$.

Pour tout $g \in C_c(\Omega)$, soit $f = \frac{g}{w}$. Comme $w \geqslant \varepsilon_K$ sur $\mathrm{supp}(g)$, on a $\langle \varphi, g \rangle = \langle \varphi, fw \rangle = \displaystyle\int_\Omega \frac{u}{w} g \, \mathrm{d}x$.

Il existe donc $v \in L^\infty$ tel que pour tout $g \in C_c(\Omega)$, $\langle \varphi, g\rangle = \int_\Omega vg\ dx$.

Par densité de $C_c(\Omega)$ das $L^1(\Omega)$, on a $\langle \varphi, g\rangle = \int_\Omega vg$ On a aussi $\langle \varphi, g\rangle \leqslant \|v\|_\infty \|g\|_1$ donc $\|\varphi\|_1 = \|v\|_\infty$ pour tout $g \in L^1$. ■

Proposition 2.12 L^1 n'est pas réflexif.

Démonstration. On va montrer qu'il existe une suite bornée dans L^1 qui n'admet pas de sous-suite faiblement convergente. Posons $f_n(x) = \frac{1}{\lambda(B(0,\frac{1}{n}))}1_{B(0,\frac{1}{n})}$ qui est positive, L^1 et de norme 1.

Si $(f_n)_n$ admet une sous-suite faiblement convergente, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{n_k}\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $\varphi \in L^\infty$.

En prenant $\varphi = 1$, on trouve $\int f = 1$.

Pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, on a $\int f_{n_k}\varphi = 0$ pour k assez grand ($0 \notin \operatorname{supp}\varphi$).

Donc $\int f\varphi = 0$ pour tout φ et par un lemme précédent, $f = 0$, ce qui est absurde puisque $\int f = 1$. ■

Remarque 2.15 Si F est une famille bornée de L^1, à quelle confition F est relativement compacte pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$?

<u>Théorème 2.10</u> Dunford-Pettis *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, F une famille de $L^1(\Omega)$ bornée.*

F est relativement compacte pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ ssi F est uniformément intégrable ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathscr{B}(\Omega), \lambda(A) \leqslant \delta \Rightarrow \int_A f\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \forall f \in F$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Évident (SIC !)

$\Leftarrow$ Pour simplifier, on traite le cas $F \subset L^1(K)$ avec K compact.

On va montrer que si $(f_n)_n$ est bornée dans $L^1(K)$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. On suppose que $f_n \geqslant 0$. Pour tout n, on peut définit $T_n \in (C(K))'$ tel que $\langle T_n, \varphi\rangle = \int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. On a $\|T_n\| \leqslant \|f_n\|_1 \leqslant M$.

$C(K)$ est séparable, donc par Banach-Alaoglu, il existe (une suite extraite qu'on passe sous le tapis) $T \in (C(K))'$ tel que $T_n \rightharpoonup T$ pour la topologie $\sigma((C(K))', C(K))$ ie $\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \to \langle T, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in C(K)$.

<u>THÉORÈME 2.11</u> RIESZ *Soit T une forme linéaire continue positive sur $C(X)$ (X compact). Il existe une unique mesure borélienne finie telle que $\langle T, \varphi\rangle = \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu$.*

(i) *Si V est un ouvert, $\mu(V) = \sup\{Tg, g \in C(K), \mathrm{supp}(g) \subset V\}$*

(ii) *Si A est un borélien, $\mu(A) = \inf\{\mu(V), V$ ouvert $, V \supset A\}$.*

De plus, si A est un borélien, $\mu(A) = \sup\{\mu(K), K$ compact, $K \subset A\}$. et si K est compact, $\mu(K) = \sup\{Tg, g \in C(X, [0, 1], g|_K = 1\}$.

On a vu que $T_n \rightharpoonup T \in C(X)'$ donc $T \in C(X)'$ et $T \geqslant 0$ donc il existe une unique μ donnée par le théorème.
On va montrer que $\int_A f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$.
Soit $A \in \mathscr{B}(X)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $B \in \mathscr{B}(X)$ tel que $\lambda(B) \leqslant \delta$, on ait pour tout n, $\int_B |f_n|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$.
Comme la mesure de Lebesgue est régulière, il existe un compact K et un ouvert U vérifiant $K \subset A \subset U$ et $\lambda(U \setminus A) \leqslant \delta$ et $\lambda(A \setminus K) \leqslant \delta$.
On a $\mu(K) \leqslant \mu(A) \leqslant \mu(U)$.
Il existe donc $f, g \in C(X)$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subset U$, $f|_K = 1$ et $Tf - \varepsilon \leqslant \mu(A) \leqslant Tg + \varepsilon$.
On a $\lim T_n g = Tg$ et $\lim T_n f = Tf$ par convergence faible, donc à partir d'un certain rang,

$$\int f_n f\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon \leqslant T_n f - 2\varepsilon \leqslant \mu(A) \leqslant T_n g + 2\varepsilon \leqslant \int f_n g\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$$

D'où
$$\int_K f_n\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon \leqslant \mu(A) \leqslant \int_U f_n\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$$

En découpant les intégrales sur $U = A \cup (U \setminus A)$ et $A = K \cup (A \setminus K)$, on trouve
$$\left|\mu(A) - \int_A f_n\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 3\varepsilon$$

donc $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_A f_n\,\mathrm{d}x$
On voudrait montrer qu'il existe $f \in L^1$ tel qie $\mu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}x$ pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$.

<u>THÉORÈME 2.12</u> RADON-NIKODYM *Si ν est une mesure σ-finie et $\mu \ll \nu$ alors il existe $f \in L^1(\mathrm{d}\nu)$ tel que $\mathrm{d}\mu = f\,\mathrm{d}\nu$ ie $\mu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\nu$.*

On a $\mu \ll \lambda$ puisque si $\lambda(A) = 0$, $\displaystyle\int_A f_n\,\mathrm{d}x = 0$ donc $\mu(A) = 0$.
En revenant à la définition de μ,

$$\int_X f_n\varphi \to \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi f\,\mathrm{d}x$$

pour tout $\varphi \in C(X) \subset L^\infty$.
Donc $f_n \rightharpoonup f$. ■

2.5.5 Cas L^∞

L^∞ n'est pas séparable et $L^\infty = (L_1)'$ n'est donc pas réflexif (sinon L^1 le serait).

Le dual de L^∞ ne s'identifie pas à L^1. En effet, il existe $\varphi \in (L^\infty)'$ telle que φ ne s'identifie pas à un élément de L^1. On peut prendre le prolongement Hahn-Banachien à L^∞ de $f \mapsto f(0)$ définie sur $C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Mais on ne peut pas trouver $g \in L^1$ tel que $f(0) \int g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$.

On a quand même :

$$\|u\|_\infty = \sup_{\|\varphi\|_1 \leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi\,\mathrm{d}x$$

Et si $(f_n)_n$ est une suite bornée dans $L^\infty = (L^1)'$, on sait que la boule unité de L^∞ est compacte pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ et métrisable pour cette topologie car L^1 est séparable. Il existe donc $f \in L^\infty$ telle qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ vérifie $\int f_{n_k}\varphi \to \int f\varphi$ pour tout $\varphi \in L^1$.

Chapitre 3

Opérateurs compacts et de Fredholm

3.1 Opérateurs compacts

Définition 3.1 Soit $T : E \to F$ linéaire.

T est compact ssi $T(B_E)$ est relativement compact dans F (pour la topologie de la norme).

On notera $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

Remarque 3.1 Si T est compact, $T(B_E)$ est borné donc T est continue.

Proposition 3.1 Soit E, F deux Banach avec E réflexif, $T \in L_c(E, F)$. On a l'équivalence entre

(i) T compact

(ii) L'image d'un borné est relativement compact

(iii) Pour tout $(x_n)_n$ bornée, il existe n_k tel que $(Tx_{n_k})_k$ converge dans F

(iv) Pour tout $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ alors $Tx_n \to T_x$ dans F.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) Clair

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ alors x_n est bornée il existe donc n_k tel que $Tx_{n_k} \to Tx$ donc Tx est une valeur d'adhérence de $(Tx_n)_n$ et comme $Tx_n \rightharpoonup Tx$, on a $Tx_n \to Tx$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Soit $x_n \in B_E$, comme E est réflexif, $x_{n_k} \rightharpoonup x$ donc $Tx_{n_k} \to Tx$ donc $T(B_E)$ est relativement compacte. ∎

Remarque 3.2

- *Si* $\dim(E)$ *n'est pas fini,* $T : E \to F$ *compact n'est pas inversible.*
  En effet, si T *inversible,* $T^{-1}(\overline{T(B_E)})$ *est compact et de plus* B_E *est d'intérieur non vide et inclus dans* $T^{-1}(\overline{T(B_E)})$ *qui est compact donc* $\dim(E) < \infty$.
- *Soit* $T : T \to F$ *continue tel que* $\dim(\operatorname{Im} T) < \infty$ *(*T *de rang fini) alors* T *est compact.*
- *Si* $\dim(F) < \infty$*,* $L_c(E, F) \subset K(E, F)$*.*

<u>THÉORÈME 3.1</u> *Si* F *est complet,* $K(E, F)$ *est fermé dans* $L_c(E, F)$*.*

Démonstration. Montrons que $\overline{T(B_E)}$ est compact. F étant complet, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{T(B_E)}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

Soit $\varepsilon > 0$, n tel que $\|T_n - T\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme T_n est compact, il existe $x_1, \ldots, x_k$ tel que $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$.

On a donc $T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$. ■

COROLLAIRE 3.1 *Si* $T_n \to T$ *dans* $L_c(E, F)$ *et* T_n *de rang fini alors* T *est compact.*

Remarque 3.3 Quid de la réciproque $\to$ *elle est vraie dans un Hilbert mais on ne peut pas le dire dnas le cas général.*

<u>THÉORÈME 3.2</u> *Soit* $f : E \to F$*,* $u : F \to G$ *et* $g : G \to H$ *linéaires.*

Si u *est compact,* f *et* g *continues alors* $u \circ f$ *et* $g \circ u$ *sont compacts.*

<u>THÉORÈME 3.3</u> *Soit* E, F *deux Banachs,* $T \in L_c(E, F)$*.* T *est compact ssi* T^* *l'est.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ On veut montrer que si $(\varphi_n) \in F'$ et $\|\varphi_n\| \leqslant 1$ alors il existe φ_{n_k} tel que $T^*\varphi_{n_k} \to T^*\varphi$ dans E'.
Soit $K = \overline{T(B_E)}$ qui est compact car T est compact. Soit $(\varphi_n)_n \in F'$.
On a $\varphi_n \in C(K)$, $\|\varphi_n\| \leqslant 1$ donc pour tout $x \in K$, $(\varphi_n(x))_n$ est borné donc relativement compact.
Pour tout x, y, $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leqslant |x - y|$ donc $(\varphi_n)_n$ est équicontinue.
Par Ascoli, on a une suite extraite qui converge dans $C(K)$ vers $\varphi \in C(K)$.
On remarque que pour tout $x \in B_E$,

$$|\langle T^*\varphi_{n_k} - T^*\varphi_{n_l}, x\rangle| = \langle \varphi_{n_k} - \varphi_{n_l}\rangle \leqslant \sup_{y \in K} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)| \to 0$$

Donc $\|T^*\varphi_{n_k} - T^*\varphi_{n_l}\| \leqslant \sup_{y\in K} |\varphi_{n_k}(y) - \varphi_{n_l}(y)|$.

Donc $(T^*\varphi_{n_k})_k$ est de Cauchy dans E' donc converge.

$\Leftarrow$ Si T^* est compact, T est compact. On a T^{**} compact.

Soit $(x_n)_n$ tel que $\|x_n\| \leqslant 1$. On veut montrer qu'il existe une sous-suite x_{n_k} telle que Tx_{n_k} converge ?

En utilisant $J : E \to E''$, $J(x_n)$ est bornée dans E'', donc il existe n_k tel que $T^{**}(J(x_{n_k})) \to \xi \in F''$.

De plus, $\langle T^{**}(J(x_{n_k})), \eta\rangle = \langle J(x_{n_k}), T^*(\eta)\rangle = \langle \eta, Tx_{n_k}\rangle$.

On a aussi $\langle T^{**}(J(x_{n_k}) - J(x_{n_l})), \eta\rangle = \langle \eta, Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\rangle$ et

$$\begin{aligned}\left\|T_{x_{n_k}} - T_{x_{n_l}}\right\| &= \sup_{\|\eta\|\leqslant 1} \langle \eta, Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\rangle \\ &= \sup_{\|\eta\|\leqslant 1} \langle T^{**}(J(x_{n_k}) - J(x_{n_l})), \eta\rangle \\ &\leqslant \|T^{**}(J(x_{n_k})) - T^{**}(J(x_{n_l}))\| \to 0\end{aligned}$$

Donc (Tx_{n_k}) est de Cauchy dans E donc converge. ■

3.2 Opérateurs de Fredholm

Définition 3.2 Soit $T : E \to F$ linéaire.

On dit que T est de Fredholm ssi $\mathrm{Ker}(T)$ est de dimension finie, $\mathrm{Im}(T)$ est fermé de codimension finie.

Remarque 3.4 Il n'y a pas de lien entre la dimension du noyau et la codimension de l'image !!!!!

Lemme 3.3.1

Soit E un Banach, F un sev de dimension finie. Alors il existe M fermé tel que $E = F \oplus M$.

Démonstration. Soit F de base $(e_1, \dots, e_n)$. On définit les coordonnées e_i^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

Sur F, les e_i^* sont continues donc par Hahn-Banach, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ prolongements continus des e_i^*.

Soit $M = \bigcap_{i=1} \mathrm{Ker}\,\lambda_i$ qui est fermé car les λ_i sont continues. On montre que $E = F \oplus M$.

$F \cap M = \{0\}$ car si $x \in F \cap M$, $\lambda_i(x) = 0$ pour tout i donc $x = 0$ car $x \in F$.

Soit $y \in E$, on pose $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y)e_i$. On a $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$ donc $y - x \in \mathrm{Ker}\,\lambda_i$ donc $y - x \in M$ et $E \subset F \oplus M$. ■

<u>THÉORÈME 3.4</u> *Soit E un Banach, $u \in K(E)$. Alors $T = \mathrm{Id} - u$ est de Fredholm.*

Démonstration.

- $\mathrm{Ker}(T)$ est de dimension finie car $u|_{\mathrm{Ker}\, T} = \mathrm{Id}$ est compact.
- $\mathrm{Im}(T)$ est fermé. En effet, comme $\mathrm{Ker}(T)$ est de dimension finie, il existe F fermé tel que $E = \mathrm{Ker}(T) \oplus F$. On étudie $S = T|_F$ qui est injectif et $T(E) = S(F)$.
  On va montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\|Sx\| \geqslant r\,\|x\|$ pour tout $x \in F$.
  Par l'absurde, d'il existe $x_n \in F$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $Sx_n \to 0$, alors $Sx_n = Tx_n = x_n - u(x_n)$.
  x_n est bornée et u compact donc il existe x_{n_k} tel que $u(x_{n_k}) \to y$. On obtient donc $x_{n_k} \to y$, et F fermé donc $y \in F$. S est continue donc $Sx_{n_k} \to y$ donc $Sy = 0$ et par injectivité, $y = 0$. Or pour tout n, $\|x_n\| = 1$ donc contradiction. On en déduit $\exists r > 0$, $\|Sx\| \geqslant r\,\|x\|$ ce qui implique que $\mathrm{Im}(S)$ est fermée.
- $\mathrm{Im}(T)$ est de codimension finie.

  Lemme 3.4.1
  Si M est un sev de E et $\overline{M} \neq E$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_ε de norme 1 tel que $d(x_\varepsilon, M) \geqslant 1 - \varepsilon$.

  Démonstration. On peut toujours supposer $\varepsilon < 1$. Soit $y \notin \overline{M}$, $d = d(y, M) > 0$. Soit $w \in M$ tel que $\|y - w\| \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon}$.
  Soit $x_\varepsilon = \frac{y-w}{\|y-w\|}$. Pour tout $z \in M$ on a

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon - z\| = \left\| \frac{y-w}{\|y-w\|} - z \right\| &= \frac{1}{\|y-w\|} \left\| y - \underbrace{w - x\,\|y-w\|}_{\in M} \right\| \\ &\geqslant \frac{d}{\|y-w\|} \geqslant 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

  par choix de w.
  Donc $d(x_\varepsilon, M) \geqslant 1 - \varepsilon$. ■

  Par l'absurde, si $\mathrm{Im}(T)$ n'est pas de codimension finie, il existe F_n des sev tel que $\mathrm{Im}(T) \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$ avec F_k de codimension 1 dans F_{k+1}.
  Par le lemme, pour tout k, il existe $x_k \in F_k$ tel que $\|x_k\| = 1$ et $d(x_k, F_{k-1}) \geqslant 1 - \varepsilon$.
  On a $u(x_k) - u(x_l) = x_k - (Tx_k - x_l + Tx_l)$ donc $\|u(x_k) - u(x_l)\| \geqslant 1 - \varepsilon$.
  On ne peut donc pas extraire de sous-suite convergente. Contradiction.

■

Définition 3.3 Si $T : E \to F$ est de Fredholm, on définit l'indice de T par $\mathrm{Ind}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(T))$.

THÉORÈME 3.5 *Soient E, F Banachs.*

L'ensemble des opérateurs de Fredholm est ouvert dans $L_c(E, F)$ et $T \mapsto \mathrm{Ind}(T)$ est continu (donc constant sur chaque composante connexe).

COROLLAIRE 3.2 *Soit E un Banach, u compact. Si $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - u) = \{0\}$ alors $\mathrm{Id} - u$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, tu est compact donc $\mathrm{Id} - tu$ est Fredholm. $t \mapsto \mathrm{Id} - tu$ est continue donc $\mathrm{Ind}(\mathrm{Id} - u) = \mathrm{Ind}(\mathrm{Id}) = 0$.

Si $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - u) = \{0\}$, alors $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u)) = 0$ donc T est surjectif. ∎

Remarque 3.5 L'ensemble des applications linéaires continues inversibles de $E \to F$ est ouvert dans $L_c(E, F)$.

Démonstration du théorème. Soit $s : E \to F$ un opérateur de Fredholm. Il existe G sev de E fermé tel que $E = \mathrm{Ker}\, s \oplus G$.

Comme $\mathrm{Im}(s)$ est de codimension finie, il existe un sev H de dimension finie de F tel que $F = \mathrm{Im}\, s \oplus H$. On remarque que $s|_G : G \to \mathrm{Im}\, T$ est un isomorphisme.

Soit $\widetilde{s} : G \times H \to \mathrm{Im}\, S \oplus H$ tel que $\widetilde{s}(x, y) = sx + y$. $\widetilde{s}$ est un isomorphisme.

Si T est proche de s alors $\widetilde{T} : (x, y) \mapsto Tx + y$ est proche de $\widetilde{S}$ dans l'ensemble ouvert des isomorphismes donc $\widetilde{T}$ est inversible dans $L_c(G \times H, F)$. On va en déduire que T est de Fredholm.

Comme $\widetilde{T}$ est inversible, $\mathrm{Ker}\, T \cap G = \{0\}$. On a donc $G \oplus \mathrm{Ker}\, T \subset E = G \oplus \mathrm{Ker}\, s$ donc $\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Ker}\, s$ qui est de dimension finie. De plus, $\mathrm{Im}\, T$ est de codimension finie car $\widetilde{T}(G \times \{0\}) = TG$ et $\widetilde{T}(\{0\} \times H) = H$ et $\widetilde{T}$ est bijectif donc $TG \oplus H = \widetilde{T}(G \times \{0\} \oplus \{0\} \times H) = F$. Comme H est de dimension finie, $\mathrm{Im}\, T$ aussi.

Il reste à montrer que $\mathrm{Im}\, T$ est fermée.

Lemme 3.5.1
Soient E, G deux Banach, $\varphi : E \to G$ linéaire continue.

Si $\varphi(E)$ est de codimension finie alors $\varphi(E)$ est fermé.

Démonstration. Il exite F un sev de G de dimension finie tel que $G = \varphi(E) \oplus F$. On peut supposer φ injectif (quitte à quotienter par $\mathrm{Ker}\, \varphi$ puisque c'est un fermé, on conserve un Banach).

F est de dimension finie donc G/F est un Banach et la projection π est continue. $\pi \circ \varphi$ est un isomorphisme donc inversible et son inverse est continue.

$\varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}$ est continue et c'est une bijection de G/F sur $\varphi(E)$. $\varphi(E)$ est donc complet donc fermé. ∎

Il reste à montrer que Ind est continu. On a vu que G et $\operatorname{Ker} T$ sont en somme directe. Il existe M sev de dimension finie tel que $E = G \oplus \operatorname{Ker} T \oplus M$. De plus $T : G \oplus M \to TG \oplus TM$ est un isomorphisme donc $\dim TM = \dim M$.

On a

$$\operatorname{Ind}(T) = \dim \operatorname{Ker} T - \operatorname{codim}(\operatorname{Im} T) = \dim \operatorname{Ker} T - (\dim H - \dim TM)$$

et $F = TG \oplus H$ donc $\operatorname{Ind}(T) = \dim \operatorname{Ker} s - \operatorname{codim} \operatorname{Im} s = \operatorname{Ind} s$. ∎

Remarque 3.6 $\operatorname{Ind}(\operatorname{Id} - u) = 0$ *si u est compact.*

3.3 Spectre d'un opérateur

Soit E un Banach sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.4 Si $A \in L(E)$, l'ensemble résolvant de A est $R(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \operatorname{Id} - A \text{ est inversible}\}$. $\sigma(A) = R(A)^c$ est le spectre de A.

Démonstration. On peut aussi définir $\sigma_{\mathbb{R}}(A)$ mais il peut être vide. ∎

Théorème 3.6 *$R(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Si $z \in R(A)$, on pose $R(z) = (z \operatorname{Id} - A)^{-1}$ qui est analytique.

Démonstration. Si $z_0 \in R(A)$, $z_0 - A$ est inversible si k est assez petit, $z_0 + k - A$ l'est aussi. Pour la suite on a deux manières de le montrer :

- On montre le développement en série entière

$$(z_0 + h - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z_0 - A)^{-n} h^n (z_0 - A)^{-1}$$

- On utilise

$$\begin{aligned}(z - A)^{-1} - (w - A)^{-1} &= (z - A)^{-1}((w - A) - (z - A))(w - A)^{-1} \\ &= -(z - w)(z - A)^{-1}(w - A)^{-1}\end{aligned}$$

  Donc $\frac{R(z) - R(w)}{z - w} = -(z - A)^{-1}(w - A)^{-1}$ et la limite $z \to w$ existe dans $L_c(E)$ et vaut $-(w - A)^{-2}$.
  Donc R est holomorphe. ∎

Définition 3.5 Soit E un Banach, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to E$. On dit que f est fortement holomorphe ssi pour tout $z_0 \in \Omega$, $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans E.

Définition 3.6 Soit E un Banach, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : \Omega \to E$.

f est faiblement holomorphe ssi pour tout $l \in E'$, $l \circ f$ est holomorphe.

Théorème 3.7 *Les deux définitions sont équivalentes.*

Démonstration. On a déjà une implication, montrons l'autre. Si f est faiblement holomorphe, pour tout $l \in E'$, $l \circ f$ est holomorphe donc vérifie la formule de Cauchy.

Pour tout $z \in \Omega$, et D disque tel que $z \in D$, $\overline{D} \subset \Omega$,

$$l(f(z)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{l(f(w))}{w-z} \, \mathrm{d}w$$

On a donc en particulier

$$l\left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} l(f(w)) \frac{1}{h} \left(\frac{1}{w-z-h} - \frac{1}{w-z}\right) \mathrm{d}w$$

Soit $x_{h,k} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+k)-f(z)}{k}$. On a

$$\begin{aligned} l(x_{h,k}) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{(w-z-h)(w-z)} - \frac{1}{(w-z-k)(w-z)} l(f(w)) \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{k-h}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{l(f(w))}{(w-z-h)(w-z-k)(w-z)} \, \mathrm{d}w \end{aligned}$$

On a donc borné $\rho_{h,k} = l(\frac{x_{h,k}}{h-k})$ indépendamment de h, k. Par Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{h,k} \rho_{h,k} < +\infty$ donc il existe $M > 0$ tel que pour tout h, k,

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right| \leqslant M|h-k|$$

■

Théorème 3.8 *Soit $A \in L_c(E)$ avec E un Banach sur $\mathbb{C}$.*

$\sigma(A)$ est fermé borné non vide et si $\rho(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$, alors $\rho(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration. $R(A)$ est ouvert donc $\sigma(A)$ est fermé.

$\sigma(A)$ est borné car si $z \in \sigma(A)$ et $z \neq 0$ alors $z - A = z(\mathrm{Id} - \frac{A}{z})$ et si $|z| > \|A\|$, $\left\|\frac{A}{z}\right\| < 1$ donc $\mathrm{Id} - \frac{A}{z}$ est inversible donc $z - A$ est inversible. Donc $\sigma(A) \subset D(0, \|A\|)$.

On a vu que $z \mapsto R(z)$ est holomorphe sur $R(A)$ donc si $\sigma(A) = \varnothing$, R est entière. Or on a

$$\|R(z)\| \leqslant \frac{1}{|z|} \left\| \left(\mathrm{Id} - \frac{1}{z}\right)^{-1} \right\| \leqslant \frac{c}{|z|}$$

donc $R(z)$ est entière bornée et tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$ donc $R = 0$. Contradiction.

Notons $c_n = \|A^n\|$. On a $c_{n+m} \leqslant c_n c_m$ et par division euclidienne, si $n \geqslant k$, on a $n = kq + r$ et $c_n \leqslant (c_k)^q c_r$. En passant à la puissance $\frac{1}{n}$ et à la limsup, on a

$$\limsup_n c_n^{\frac{1}{n}} \leqslant c_k^{\frac{1}{k}} \leqslant \liminf c_k^{\frac{1}{k}}$$

Donc la limite $l = \lim_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe.

On montre ensuite que $l = \rho(A)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > l$. Il existe r tel que $|z| > r > l$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|z| > r > \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ donc $\frac{\|A^n\|}{r^n} < 1$ donc $z - A = z(\mathrm{Id} - \frac{A}{z})$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{A^n}{z^n}$ est donc convergente donc $z - A$ est inversible. On a donc $l \geqslant \rho(A)$.

Si $|z| > \rho(A)$, $z \mapsto (z\,\mathrm{Id} - A)^{-1}$ est holomorphe donc $w \mapsto (\mathrm{Id} - wA)^{-1}$ est holomorphe sur $|w| < \frac{1}{\rho(A)}$. Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} A^n x^n$ (qui vaut $\frac{1}{l}$) est supérieur à $\frac{1}{\rho(A)}$ donc $\rho(A) \geqslant l$. ■

3.4 Spectre des opérateurs compacts

Remarque 3.7 La structure du spectre d'un opérateur en dimension infinie est compliquée. En particulier, il n'est pas forcément discret ni constitué uniquement de valeurs propres.

Exemple 3.1 On prend

$$T : \begin{cases} L^2([0,1]) & \to & L^2([0,1]) \\ f & \mapsto & t \mapsto tf(t) \end{cases}$$

T n'a pas de valeur propre : si λ en est une, $(\lambda - t)f(t) = 0$ presque partout donc $f = 0$ et il n'y a pas de valeur propre. Pourtant $\sigma(T) = [0,1]$. Il suffit de montrer que $]0,1[\subset T$.

Par l'absurde, si $\lambda - T$ est inversible, il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in L^2$, $\|(\lambda - T)f\|_2 \geqslant c\,\|f\|_2$.

Posons $\rho_n(t) = \sqrt{n}\rho(n(\lambda - t))$ avec $\rho \in C_c^\infty(]0,1[)$ telle que $\int \rho^2 = 1$. On a

$$\|(\lambda - T)\rho_n\|_2^2 = \int_0^1 n(\lambda - t)\rho(n(\lambda - t))^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}^2 \int_{\mathbb{R}} s^2 \rho(s)^2 \,\mathrm{d}s \to 0$$

Donc $\lambda - T$ n'est pas inversible et $[0,1] \subset \sigma(T)$.

Réciproquement, si $\lambda \notin [0,1]$, $\lambda - T$ est inversible et $(\lambda - T)^{-1}g(t) = \frac{g(t)}{\lambda - t} \in L^2([0,1])$ si $g \in L^2$ et $\lambda \notin [0,1]$. Donc $\sigma(T) = [0,1]$.

<u>THÉORÈME 3.9</u> *Soit E un Banach, $A \in L_c(E)$ compact.*

Pour tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, λ est une valeur prpre et $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id} - A)$ est de dimension finie.

Remarque 3.8 Si $\dim(E) = \infty$ on a nécessairement $0 \in \sigma(A)$.

Démonstration. Si $\lambda \neq 0$ on a vu que $\lambda \mathrm{Id} - A$ est Fredholm d'indice nul donc $\lambda \mathrm{Id} - A$ est inversible ssi $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id} - A) = \{0\}$. Comme $\lambda \mathrm{Id} - A$ est Fredholm, $\dim(\lambda \mathrm{Id} - A) < \infty$. ■

Remarque 3.9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si A est compact, $(\lambda \mathrm{Id} - A)^n = \lambda^n \mathrm{Id} - B$ est Fredholm (et B est compact) donc $\mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id} - A)^n$ est de dimension finie.

Lemme 3.9.1

Soit E un Banach, A compact.

Si $\lambda \neq 0$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\lambda - A)^r = \mathrm{Ker}(\lambda - A)^n$.

Démonstration. Par l'absurde, on aurait $\mathrm{Ker}(\lambda - A) \subsetneq \mathrm{Ker}(\lambda - A)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Ker}(\lambda - A)^k \subsetneq \ldots$ pour tout k.

On réutilise le lemme de Riesz. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $x_n \in \mathrm{Ker}(\lambda - A)^n$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\mathrm{d}(x_n, \mathrm{Ker}(\lambda - A)^{n-1}) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Posons $T = \lambda - A$. Pour $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
\|A(x_n) - A(x_k)\| &= \|\lambda x_n - Tx_n - \lambda x_k + Tx_k\| \\
&= |\lambda| \left\| x_n - \frac{Tx_n + \lambda x_k - Tx_k}{\lambda} \right\| \geqslant |\lambda|(1 - \varepsilon)
\end{aligned}$$

Donc (Ax_n) n'a pas de sous-suite convergente, ce qui est absurde car x_n est bornée et A compact. ■

<u>Définition 3.7</u> Le plus petit entier qui vérifie le lemme s'appelle l'exposant de la valeur propre λ.

<u>THÉORÈME 3.10</u> *Soit E un Banach, A compact, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}$ alors $E = \mathrm{Ker}(\lambda - A)^r \oplus \mathrm{Im}(\lambda - A)^r$. Ces deux sous-espaces sont fermés et stables par A.*

De plus, si $\mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, $\mu \neq \lambda$ et s est l'exposant de μ, $\mathrm{Ker}(\mu - A)^s \subset \mathrm{Im}(\lambda - A)^r$.

Démonstration.

- La stabilité par A est claire.
- Si $x \in \mathrm{Ker}(\lambda - A)^r \cap \mathrm{Im}(\lambda - A)^r$, avec $T = \lambda - A$, on a $x = Ty$ et $Tx = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(\lambda - A)^{2r} = \mathrm{Ker}(\lambda - A)^r$ donc $x = 0$.
- $(\lambda - A)^r$ est Fredholm donc son image est fermé et on a la décomposition $E = \mathrm{Ker}(\lambda - A)^r \oplus \mathrm{Im}(\lambda - A)^r$.

- Soit $S = (\mu - A)^s$ et $T = (\lambda - A)^r$, et $x \in \operatorname{Ker} S$. On décompose $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} T$ et $z \in \operatorname{Im} T$.
  On a $Sx = 0 = Sy + Sz$. Comme $ST = TS$, $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$ sont stables par S donc $Sy = Sz = 0$.
  De plus $P = (\mu - X)^s$ et $Q = (\lambda - X)^r$ sont premiers entre eux donc par Bezout, il existe U, V tel que $UP + VQ = 1$.
  On a donc $y = U(A)Sy + V(A)Ty = 0$ donc $x = z \in \operatorname{Im} T$, d'où le résultat. ■

<u>Théorème 3.11</u> *Soit E un Banach, A compact.*

Alors $\sigma(A)$ est dénombrable. On peut alors l'ordonner : $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n-1}|$ et $\lambda_n \to 0$ si $\dim(E) = +\infty$.

Démonstration. Soit $c > 0$ on va montrer que l'ensemble des valeurs propre de module supérieur à c est fini. On raisonne par l'absurde. Sinon, il existe une suite de valeurs propres $|\lambda_n| \geqslant c$. Soit w_n uen suite de vecteurs propres distincts associés aux λ_n.

Posons $E_n = \operatorname{Vect}\{w_1, \ldots, w_n\}$. On a $E_n \subsetneq E_{n+1} \subsetneq \ldots$.

Par le lemme de riesz, il existe $x_n \in E_n$ de norme 1 tel que $\mathrm{d}(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Si $n > k$, on a $Ax_n - \lambda_n x_n \in E_{n-1}$ donc $\|Ax_n - Ax_k\| = \|\lambda_n x_n + y\|$ avec $y \in E_{n-1}$. Donc on a $\|Ax_n - Ax_k\| \geqslant c(1 - \varepsilon)$.

Donc (Ax_n) n'a pas de sous-suite convergente, ce qui est absurde.

On écrit donc $\sigma(A) \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|\lambda| \geqslant \frac{1}{n}\} \cap VP(A)$ donc $\sigma(A)$ est dénombrable. Le résultat précédent assure aussi que la limite de λ_n est 0. ■

Remarque 3.10 Les théorèmes précédents constituent les théorèmes spectraux pour les opérateurs compacts. On en déduit que si λ_n sont les valeurs propres non nulles, $E = \operatorname{Ker}(\lambda_0 - A)^{r_0} \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(\lambda_k - A)^{r_k} \oplus H_k$ avec H_k stable par A.

Chapitre 4

Théorème spectral dans les espaces de Hilbert

4.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

4.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 4.1 Soit H un $\mathbb{C}$-ev muni d'un produit scalaire sesquilinéaire hermitien défini positif :

- $\forall y,\ x \mapsto (x, y)$ est linéaire
- $\forall x,\ y \mapsto (y, x)$ est semi-linéaire
- $\forall x, y,\ (x, y) = \overline{(y, x)}$
- $(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

THÉORÈME 4.1 CAUCHY-SCHWARZ *Pour tout $x, y \in H$, $|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.*

Remarque 4.1 *$x \mapsto (x, x)$ est une norme donc H est un evn.*

Définition 4.2 H est un Hilbert ssi il est complet pour cette norme.

COROLLAIRE 4.1 $\|x\| = \sup\limits_{\|y\| \leqslant 1} |(x, y)|$.

4.1.2 Projection sur un convexe fermé

Proposition 4.1 Identité du parallélogramme Pour tout $x, y \in H$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

THÉORÈME 4.2 *Soit k un convexe fermé non vide.*

Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in K$ tel qu'on ait $\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|$.

De plus y est caractérisé par : pour tout $z \in K$, $\Re(x - y, z - y) \leqslant 0$.

Démonstration.

! Si y_1, y_2 vérifient $\|x - y_i\| = d(x, K) =: d$, par l'identité du parallélogramme, on a

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 4d^2 - 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \leqslant 0$$

Donc $y_1 = y_2$.

∃ Soit $y_n \in K$ tel que $\|x - y_n\| \to d$.
Pour tout n, m, par l'identité du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2 \to 0\end{aligned}$$

Donc y_n est de Cauchy et comme H est complet, il existe $y \in H$ tel que $y_n \to y$. On a donc $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\|$.

- Il reste la caractérisation. Si $\|x - y\| = d$ alors $\Re(x - y, z - y) \leqslant 0$.
Si J est C^1 sur un convexe K alors en posant y tel que $J(y) = \inf_K J$ alors $DJ(y)(z - y) \geqslant 0$ pour tout $z \in K$.
Pour tout $z \in K$ et $t \in [0, 1]$, $(1-t)y + tz \in K$ donc $J((1-t)y + tz) \geqslant J(y)$ donc $\frac{J(y+t(z-y))-J(y)}{t} \geqslant 0$.
En faisant tendre t vers 0, on a $DJ(y)(z - y) \geqslant 0$.
Réciproquement, si y vérifie $DJ(y)(z - y) \geqslant 0$ pour tout $z \in K$, et comme J est convexe, $J(y) \leqslant J(z)$ pour tout z. En effet, si J est convexe C^1, on a $J(z) \geqslant J(y) + DJ(y)(z - y) \geqslant J(y)$. ∎

Corollaire 4.2 *La projection P_K sur K est 1-lipschitzienne donc continue.*

Définition 4.3 Si Y est un sev de H on pose $Y^\perp = \{x \in H, \forall y \in Y, (x, y) = 0\}$.

Proposition 4.2 $Y^\perp$ est un fermé de H.

Théorème 4.3 *Soit Y un sev fermé de H. On a $H = Y \oplus Y^\perp$ et $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Remarque 4.2 Si Y n'est pas fermé, $\overline{Y}$ est fermé et $\overline{Y}^\perp = Y^\perp$. On a donc que $H = \overline{Y} \oplus Y^\perp$ et donc $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.

Démonstration. Y est un convexe fermé donc P_Y est continue.

Pour tout $x \in H$, soit $y = P_Y(x)$. Par la caractérisation de y, on a pour tout z,

$$\Re(x - y, z - y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \Re(x - y, h) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - y, h) = 0 \Leftrightarrow x - y \in Y^\perp$$

(appliquer en $\pm h$, et $\pm ih$).

Donc $H \subset Y + Y^\perp$. On a de plus $Y \cap Y^\perp = \{0\}$ donc $H = Y \oplus Y^\perp$. ∎

4.1.3 Formes linéaires continues

<u>Théorème 4.4</u> Riesz *Pour tout $l \in H'$, il existe $a \in H$ tel que $l = (\cdot, a)$.*

Démonstration. Si $l \neq 0$, $\mathrm{Ker}(l)$ est un sous-espace fermé de H.

Donc $H = \mathrm{Ker}\, l \oplus \mathbb{C}b$. Pour tout $x \in H$, $x = y + \lambda b$ donc $lx = \lambda lb$ mais $(x, b) = \lambda \|b\|^2$ donc $lx = (x, b)\frac{lb}{\|b\|^2}$.

Il suffit donc de prendre $a = b\frac{l(b)}{\|b\|^2}$. ■

Remarque 4.3 On en déduit que les Hilberts sont réflexifs.

<u>Théorème 4.5</u> Lax-Milgram *Soit $a : H \times H \to \mathbb{C}$ telle que*

- *$\forall y \in H$, $x \mapsto a(x, y)$ est linéaire*
- *$\forall x \in H$, $x \mapsto a(x, y)$ est semi-linéaire*
- *a est continue*
- *a est cœrcive : il existe $\alpha > 0$ tel que $|a(x, x)| \geqslant \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.*

Alors pour tout $l \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que $a(x, y) = l(x)$ pour tout $x \in H$.

Remarque 4.4 Si de plus $a(x, y) = \overline{a(y, x)}$ alors on a défini un produit scalaire équivalent sur H et donc le théorème correspond à Riesz pour ce produit scalaire.

Démonstration. Par Riesz, on a pour tout $y \in H$, $x \mapsto a(x, y) \in H'$ donc il existe un unique Ay tel que $a(x, y) = (x, Ay)$ pour tout $x \in H$.

Par unicité dans Riesz, A est linéaire. Donc pour tout $x, y \in H$, $a(x, y) = (x, Ay)$. En écrivant $l \in H'$ comme $(\cdot, f)$, résoudre $a(x, y) = l(x)$ revient à résoudre $(x, Ay) = (x, f)$ ie $Ay = f$.

Il faut montrer que $A \in L(H)$ est bijective.

A est continue car $\|Ay\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |(x, Ay)| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |a(x, y)| \leqslant M \|y\|$ car a est continue. Donc $A \in L_c(H)$ et $\|A\| \leqslant M$.

Montrons que A est injective. Si $y \in \mathrm{Ker}(A)$, $(x, Ay) = 0 = a(x, y)$ donc $|(y, Ay)| = 0 = |a(y, y)| \geqslant \alpha \|y\|^2$ par cœrcivité. Donc $y = 0$. On va ensuite montrer que $\mathrm{Im}\, A$ est fermé d'orthogonal nul.

Si $x \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp$, $(x, Ay) = 0$ donc $\alpha \|x\|^2 \leqslant |a(x, x)| = |(x, Ax)| = 0$ donc $x = 0$. $\mathrm{Im}\, A$ est fermé donc pour tout $x \in H$, $|(x, Ax)| = |a(x, x)| \geqslant \alpha \|x\|^2$ par cœrcivité. Par Cauchy-Schwarz, $|(x, Ax)| \leqslant \|x\| \|Ax\|$.

Donc pour tout $x \in H$, $\|Ax\| \geqslant \alpha \|x\|$ donc $\mathrm{Im}(A)$ est fermé (déjà fait).

Ainsi, A est bijectif donc pour tout $f \in H$, il existe un unique $y \in H$ tel que $f = Ay$ ie $a(x, y) = (x, f)$ pour tout $x \in H$. ■

Remarque 4.5

- *Ce théorème sert pour résoudre les équations elliptiques : si* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $(A\xi, \xi) \geqslant \alpha \|\xi\|^2$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$.
  Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $-\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f$ *sur* Ω *avec* $u|_\Omega = 0$ *est une équation elliptique.*
- *On a vu seulement le théorème spectral pour* A *compact dans* $L_c(E)$. *Le cas des opérateurs non bornés comme* $u \mapsto u''$ *qui sont à résolvante compacte c'est à dire que pour tout* $f \in E$, *il existe un unique* u *tel que* $u'' = f$ *et l'application qui à* f *associe* u *est un opérateur compact donc on peut utiliser le théorème spectral.*

4.1.4 Bases hilbertiennes

Soit H un Hilbert.

Définition 4.4 Une famille $(x_i)_i$ est orthonormée ssi $\|x_i\| = 1$ et $(x_i, x_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

Remarque 4.6 Une famille orthonormée est libre.

Définition 4.5 $(x_i)_{i\in I}$ est une base orthonormée (hilbertienne) ssi $H = \overline{\text{Vect}\{x_i, i \in I\}}$.

Remarque 4.7 Ce n'est pas forcément une base au sens usuel.

Théorème 4.6 *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Si H est séparable, il existe $(x_n)_n$ tel que $\overline{\text{Vect}\{x_n, n \in \mathbb{N}\}} = H$ et on obtient une base par Gram-Schmidt.

Sinon, on utilise le lemme de Zorn. On considère F l'ensemble des familles orthonormées de H partiellement ordonné par l'inclusion.

F est inductif non vide donc il admet une famille $B = (x_i)_{i\in I}$ maximale. On a $H = \overline{\text{Vect}\{B\}}$. Sinon, on a $y \in H \setminus \overline{\text{Vect}\{B\}} =: F$.

F est fermé donc $H = F \oplus F^\perp$. Soit $x = P_F(y)$. $(y - x, x_i) = 0$ donc $\widetilde{B} = (\frac{y-x}{\|y-x\|}, B)$ est une famille orthonormée qui contient B, d'où une contradiction. ∎

Proposition 4.3 Soit (e_n) une base hilbertienne de H. Pour tout $x \in H$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (x, e_n)e_n$ est convergente dans H et vaut x.

De plus, $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, e_n)|^2$.

Exemple 4.1 Dans le cas $L^2([0,2\pi])$, $e_n(t)=e^{int}$, la décomposition correspond à la décomposition en série de Fourier :

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{int}$$

avec convergence dans L^2 et $c_n=(f,e_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N}|x_n|^2=\left\|\sum_{n=0}^{N}(x,e_n)e_n\right\|^2$$

$y:=\sum_{n=0}^{N}(x,e_n)e_n\in\mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_n\}$ donc $H=\mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_n\}\oplus F$ donc $\|y\|^2\leqslant\|x\|^2$. D'où la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^2$.

Par le même raisonnement, pour tout p,q,

$$\left\|\sum_{p\leqslant n\leqslant q}(x,e_n)e_n\right\|^2=\sum_{p\leqslant n\leqslant q}|(x,e_n)|^2\to 0$$

Donc $\sum_{n=0}^{N}(x,e_n)e_n$ est une suite de Cauchy dans H donc converge vers un certain y. Comme la série converge dans H, on a

$$(y,e_i)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(x,e_n)(e_n,e_i)=(x,e_i)$$

(e_i) est une base hilbertienne donc $x=y$. De plus, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}^{|}x_n|^2\leftarrow\sum_{n=0}^{N}|x_n|^2=\left\|\sum_{n=0}^{N}(x,e_n)e_n\right\|^2\to\|x\|$$

D'où $\|x\|=\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2$. ∎

Remarque 4.8 Le résultat précédent nous dit que

$$\begin{cases}\ell^2 & \to & H\\ (x_n) & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\end{cases}$$

est une isométrie bijective. On va traiter le cas non séparable.

Définition 4.6 Soit $(x_i)_{i\in I}$, une famille d'éléments de H. On dit que la famille est sommable ssi il existe $x \in H$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \subset I$ fini tel que pour tout $K \subset I$ fini qui contient J, on ait

$$\left\| x - \sum_{i\in K} x_i \right\| \leqslant \varepsilon$$

Lemme 4.6.1
Soit φ_n une base hilbertienne et $\alpha_n \in \ell^2$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\varphi_n$ converge dans H et ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Démonstration. On a déjà vu que $x := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\varphi_n$ converge dans H.

Soit $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective et $N \in \mathbb{N}$. On a bien convergence de la série $\sum_{k=0}^{N} \alpha_{n(k)}\varphi_{n(k)}$ car

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} \alpha_{n(k)}\varphi_{n(k)} \right\|^2 = \sum_{k=p}^{q} |\alpha_{n(k)}|^2 \to 0$$

car $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i|^2$ est absolument convergente.

Donc il existe $y \in H$ tel que $y = \sum_{n\in\mathbb{N}_{n(k)}}^{\alpha} \varphi_{n(k)}$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(y, \varphi_i) = \alpha_i = (x, \varphi_i)$ donc $x = y$. ∎

<u>Théorème 4.7</u> *Soit (e_i) une base hilbertienne de H. Pour tout $x \in H$, $J = \{i \in I, (x, e_i) \neq 0\}$ est dénombrable indexable par φ.*

On a alors $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x, e_{\varphi_n})e_{\varphi(n)}$ et $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_{\varphi(n)})|^2$ et la somme de dépend pas de φ.

Démonstration. Soit $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ et $J_n = \{i \in I, |(x, e_i)| > \frac{\|x\|}{m}\}$. Pour tout $i_1, \dots, i_k \in J_m$, on a

$$\sum_{l=1}^{k} |(x, e_{i_l})|^2 = \left\| \sum_{l=1}^{k} (x, e_{i_l})e_{i_l} \right\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

D'où $\frac{\|x\|^2 k}{m^2} \leqslant \sum_{l=1}^{k} |(x, e_{i_l})|^2 \leqslant \|x\|^2$ et $k \leqslant m^2$. Ainsi J_m est fini et $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_m$ est dénombrable. Le deuxième point est une conséquence du lemme. ∎

4.2 Opérateurs autoadjoints compacts dans les espaces de Hilbert

Définition 4.7 $A \in L_c(H)$ est autoadjoint ssi pour tout x, y, $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Théorème 4.8 *Si A est autoadjoint, $x \mapsto (Ax, x)$ est une forme quadratique réelle, dont la nullité implique celle de A.*

Démonstration. $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$ donc $(Ax, x) \in \mathbb{R}$.

Si $(Ax, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = (A(x+y), x+y) = (Ax, x) + (Ay, x) + (Ax, y) + (Ay, y) = 2\Re(Ax, y)$$

De même avec $x + iy$, $2\Im(Ax, y) = 0$. Ainsi, $A = 0$. ■

Théorème 4.9 Spectral *Soit H un Hilbert et A autoadjoint compact.*

Alors il existe $(z_i)_{i \in I}$ des vecteurs propres de A qui forment une base hilbertienne de H.

De plus, $\{i, \lambda_i \neq 0\}$ est dénombrable et 0 est le seul point d'accumulation de $(\lambda_i)_i$.

Remarque 4.9

- *I n'est pas forcément dénombrable*
- *On a déjà démontré la deuxième assertion*
- *Une autre manière d'écrire le théorème est la décomposition*

$$H = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{K} z_n)}$$

  avec K le corps de base.
- *Les valeurs propres sont réelles ($(Az_i, z_i) = \lambda_i \|z_i\|^2$).*

Démonstration. Si $A = 0$ c'est fini. On prend par la suite $A \neq 0$. Montrons d'abord que A possède une valeur propre non nulle. Posons $M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x) \in \mathbb{R}$.

Montrons que le sup est atteint. il existe $x_n \in H$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $(Ax_n, x_n) \to M$. x_n est bornée et la boule unité de H est compacte pour la topologie faible.

Il existe donc $x \in H$ et x_{n_k} une suite extraite tel que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ et par compacité, $Ax_{n_k} \to Ax$.

On a $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \to M$ et $Ax_{n_k} \to Ax$ et $x_{n_k} \rightharpoonup x$ donc $(Ax_{n_k}, x_{n_k}) \to (Ax, x)$ donc $M = (Ax, x)$. On a de plus $\|x\| \leqslant \liminf \|x_{n_k}\| = 1$. De plus $x \neq 0$ car $A \neq 0$ ($x \mapsto (Ax, x) \neq 0$). Soit $y = \frac{x}{\|x\|}$.

On a $\|y\| = 1$ et $(Ay, y) = \frac{M}{\|x\|^2}$. Si $\|x\| < 1$, $(Ay, y) > M$ et $\|y\| = 1$ ce qui est absurde donc $\|x\| = 1$.

On en déduit $x = \sup_{\|z\|\neq 0} R(z)$ avec $R(z) = \frac{(Az,z)}{\|z\|^2}$. R atteint son maximum en x donc $DR(x)h = 0$ pour tout $h \in H$.

$$\begin{aligned} R(x+h) &= \frac{(Ax,x) + (Ax,h) + (Ah,x) + O(\|h\|^2)}{\|x\|^2 + 2\Re(x,h) + O(\|h\|^2)} \\ &= (Ax,x) - 2(Ax,x)\Re(x,h) + 2\Re(Ax,h) + O(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Donc pour tout h, $\Re(Ax, h) = M\Re(x, h)$ et $\Re((A - M)x, h) = 0$. En appliquant à ih, $((A - M)x, h) = 0$ donc $Ax = Mx$ et M est un valeur propre non nulle.

Soit F l'espace engendré par les vecteurs propres de A. On veut $F = H$. Si ce n'est pas le cas, F étant un fermé, on aurait $H = F \oplus F^\perp$ avec $F^\perp \neq \{0\}$.

F est stable par A qui est autoadjoint donc $F^\perp$ est aussi stable par A. $A|_{F^\perp}$ est encore autoadjoint compact qui admet un vecteur propre qui est un vecteur propre de A, ce qui contredit la définition de F. Donc $F^\perp = \{0\}$. ■

4.3 Calcul fonctionnel

4.3.1 Cadre général

On prend $A \in L_c(E)$ et $f \in X$ un ensemble de fonctions. Quand peut-on définir $f(A)$?

Si $f \in \mathbb{C}[X]$, on sait définir $f(A)$, de même si f est une série entière de rayon $R > \rho(A)$ le rayon spectral de A.

Définition 4.8 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\overline{\sigma(A)} \subset \Omega$. Soit γ un contour fermé dans $\omega \cap \sigma(A)^c$ d'indice 0 pour tout $z \notin \Omega$ et 1 pour $z \in \sigma(A)$.

On pose alors pour f holomorphe sur Ω

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (z - A)^{-1} f(z) \,\mathrm{d}z$$

Remarque 4.10 L'indice est défini par $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} \,\mathrm{d}w$.

Théorème 4.10

(i) *Pour tout* $f \in \mathbb{C}[X]$, $f(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$.

(ii) *L'application*

$$\begin{cases} H(\Omega) & \to & L_c(E) \\ f & \mapsto & f(A) \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre.

(iii) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ *pour tout* $f \in H(\Omega)$.

(iv) *Si* $f \in H(\Omega)$, $\sigma(A) \subset \Omega$ *et* $g \in H(\Omega')$ *tel que* $f(\sigma(A)) \subset \Omega'$ *alors* $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

Démonstration.

(i) Il suffit de montrer que si $f(z) = z^k$ alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-A)^{-1} f(z)\,\mathrm{d}z = A^k$. On calcule donc cette intégrale en remarquant que

$$(z-A)^{-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{z^n}$$

et que la série converge normalement sur γ. Alors, on permute somme et intégrale, ce qui nous ramène à calculer

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{A^n}{z^{n+1}} z^k\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ A^k & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-A)^{-1} f(z)\,\mathrm{d}z = A^k$$

(ii) Le seul point non trivial est $(fg)(M) = f(M)g(M)$. par la formule de Cauchy, $\int_\gamma f(z)(z-M)^{-1}\,\mathrm{d}z$ ne dépend pas de γ, donc en écrivant

$$f(M) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} f(w)(w-M)^{-1}\,\mathrm{d}w \text{ et } g(M) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} g(z)(z-M)^{-1}\,\mathrm{d}z$$

on peut supposer que γ_1 est à l'intérieur du domaine délimité par γ_2 (ie $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$ pour tout $z \in \gamma_1$). On a alors

$$\begin{aligned} f(M)g(M) &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f(w)(w-M)^{-1}(z-M)^{-1} g(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)g(z)}{z-w}((w-M)^{-1} - (z-M)^{-1})\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

On peut utiliser Fubini et, comme $z \mapsto \frac{g(z)}{z-w}$ est holomorphe ($w \in \gamma_2$), $\int_{\gamma_1}\frac{g(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0$ donc $I_1 = 0$.

De même, $w \mapsto \frac{f(w)}{z-w}$ a une singularité en $w = z$ donc $\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}w = \mathrm{Res}(f, z) = -f(z)$ ($\mathrm{Res}(F/G) = F/G'$). Ainsi, $I_2 = -(gf)(M)$ et on a bien le résultat.

(iii) Si $\mu \notin f(\sigma(A))$, $\sigma(A)$ est compact et f est continue donc il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, $|\mu - f(\lambda)| \geqslant c_0$.
Donc il existe Ω un ouvert contenant $\sigma(A)$ tel que $|\mu - f(z)| \geqslant \frac{c_0}{2}$ pour tout $z \in \Omega$.
$g(z) = \frac{1}{\mu - f(z)}$ est holomorphe sur Ω puisque $z \mapsto \mu - f(z)$ ne s'y annule pas. Par (ii), on peut définir $g(A)$ et on a

$$g(A)(\mu - f(A)) = (g(\mu - f))(A) = \mathrm{Id}$$

Donc $\mu - f(A)$ est inversible donc $\mu \notin \sigma(f(A))$.
Si $\mu \in f(\sigma(A))$, il existe λ tel que $\mu = f(\lambda)$. On pose $g(z) = \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$. Si f est holomorphe, g aussi. Ainsi, $g(A)$ est bien définie et $(A-\lambda)g(A) = f(A) - f(\lambda)$.
Or $(A-\lambda)g(A)$ n'est pas inversible donc $f(A)-f(\lambda)$ non plus et $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$.

(iv) Si f est analytique sur $\Omega \supset \sigma(M)$ et g analytique sur 0 contenant $f(\sigma(M))$ alors $(g \circ f)(M) = g(f(M))$.
Par (iii), $f(\sigma(M)) = \sigma(f(M))$ donc si γ_1 enlace $\sigma(f(M))$,

$$g(f(M)) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} g(z)(z - f(M))^{-1}\,\mathrm{d}z$$

De même, $h(w) = \frac{1}{z-f(w)}$ est holomorphe sur un ouvert contenant $\sigma(M)$ donc $h(M) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} h(w)(w-M)^{-1}\,\mathrm{d}w$. Donc

$$\begin{aligned}
g(f(M)) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} g(z)\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{z-f(w)}(w-M)^{-1}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}(w-M)^{-1}\underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{g(z)}{z-f(w)}\,\mathrm{d}z}_{=g(f(w))}\,\mathrm{d}w \\
&= (g\circ f)(M)
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.11 *Ce type de résultat s'appelle calcul fonctionnel.*
On appelle $\sigma(f(M)) = f(\sigma(M))$ « résultat d'image spectrale ».

Remarque 4.12 *Si on a un trou sur la formule des résidus, on fait le calcul : si γ est un cercle de rayon R,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} A^n z^{k-n-1}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^n(R\mathrm{e}^{i\theta})^{k-n-1}R\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^n R^{k-n}(\mathrm{e}^{i\theta})^{k-n}\,\mathrm{d}\theta = A^k\delta_{k,n}
\end{aligned}$$

4.3.2 Cas des opérateurs auto-adjoints compacts sur un Hilbert

Soit H un Hilbert, A auto-adjoint compact.

<u>Théorème 4.11</u> *Pour tout f bornée définie sur $\sigma(A)$, on peut définir $f(A)$ par*

(i) $f(A) = \mathrm{Id}$ *avec* $f = 1$.

(ii) *l'opérateur associé à* Id_H *est* A.

(iii) $f \mapsto f(A)$ *est un morphisme d'algèbre*

(iv) $\|f(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)| = \|f\|_{L^\infty}$

(v) *Si f est réelle, $f(A)$ est auto-adjoint*

(vi) *Si f est positive $f(A)$ aussi.*

Démonstration. On a $H = \mathrm{Ker}(A) \oplus^\perp \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}e_n$. Posons

$$f(A)(x) = f(0)y + \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)x_n e_n \text{ avec } y = P_{\mathrm{Ker}\,A}x$$

(i), (ii) et (iii) en découlent. De plus,

$$\|f(A)x\|^2 = |f(0)|^2|y|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)|^2|x_n|^2 \leqslant \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$$

et le sup est atteint en le e_n tel que $\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |f(\lambda)|$ soit atteint en λ_n. ∎

Remarque 4.13 Dans ce cas là les propriétés de calcul découlent de la propriété de diagonalisation.

Dans le cas général, on déduit des propriétés de décomposition spectrale des propriétés d'un calcul fonctionnel défini sur les fonctions continues

4.4 Théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints

Soit H un Hilbert, A un opérateur autoadjoint.

4.4.1 Propriétés générales du spectre d'un opérateur autoadjoint

<u>THÉORÈME 4.12</u> *Si A est autoadjoint, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Remarque 4.14 On avait déjà cette propriété pour les opérateurs autoadjoints compacts, comme conséquence du fait que le spectre est constitué uniquement de valeurs propres.

Démonstration. On va montrer que pour tout λ non réel, $A-\lambda$ est inversible. Posons $a(x,y) = (x,(A-\lambda)y)$ pour tout $(x,y) \in H$. On va utiliser Lax-Milgram.

Pour tout y, $x \mapsto a(x,y)$ est linéaire, pour tout x, $y \mapsto a(x,y)$ est antilinéaire, $|a(x,y)| \leqslant \|x\| \|y\| \|A-\lambda\|$ donc a est continue. Enfin, $|a(x,x)| = |(Ax,x) - \lambda \|x\|^2| \geqslant |\Im(\lambda)| \|x\|^2$.

Donc pour tout $z \in H$ il existe un unique $y \in H$ tel que $a(x,y) = (x,z)$ pour tout x. On a donc $(A-\lambda)y = z$ donc $A-\lambda$ est bijectif et $\lambda \notin \sigma(A)$. ∎

<u>THÉORÈME 4.13</u> *Soit $A \in L_c(H)$ autoadjoint. Alors $\rho(A) = \|A\|$.*

Démonstration. On a vu que $\rho(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|A\|$.

Si A est autoadjoint, on a encore

$$\|Ax\|^2 = (Ax,Ax) = (A^*Ax,x) = (A^2x,x) \leqslant \left\|A^2\right\| \|x\|^2$$

donc $\|A\|^2 \leqslant \|A^2\|$. Par récurrence, $\|A\|^{2^k} \leqslant \left\|A^{2^k}\right\|$. Ainsi,

$$\rho(A) = \lim_k \left\|A^{2^k}\right\|^{\frac{1}{2^k}} \geqslant \|A\|$$ ∎

<u>THÉORÈME 4.14</u> *Si $A \in L_c(H)$ est autoadjoint alors $\sigma(A) \subset [a,b]$ avec $a = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax,x)$, $b = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax,x)$ et de plus $a,b \in \sigma(A)$.*

Démonstration.

- Si $\lambda < a$, on peut montrer que $A-\lambda$ est inversible. On pose $m(x,y) = ((A-\lambda)x,y)$ qui est linéaire en x, antilinéaire en y, continue et

  $$m(x,x) = (Ax,x) - \lambda \|x\|^2 \geqslant (a-\lambda)\|x\|^2 > 0$$

  si $\lambda < a$. Par Lax-Milgram, $A-\lambda$ est inversible. Par le même type d'argument, on montre que $\lambda - A$ est inversible si $\lambda > b$. On a donc bien $\sigma(A) \subset [a,b]$.

- Il reste à montrer que $a, b \in \sigma(A)$. Par définition de a et b, on a $|a| \leqslant \|A\|$ et $|b| \leqslant \|A\|$.
  De plus, $\rho(A) = A$ car A est symétrique. Donc $\|A\| \leqslant \max(|a|, |b|) \leqslant \|A\|$.
  Ainsi, $\max(|a|, |b| \, \|A\| = \rho(A)$ donc a ou b appartient à $\sigma(A)$. Pour conclure dnas le cas général, on étuide $A_c = A + c \operatorname{Id}$ pour $c \in \mathbb{R}$. On peut choisir c_1, c_2 tel que $a_{c_1} = a + c_1 \sigma(A_{c_1})$ et $b_{c_2} \in \sigma(A_{c_2})$ donc $a, b \in \sigma(A)$. ■

<u>Théorème 4.15</u> *Si $M, N \in L_c(H)$ sont autoadjoint. Alors*

$$\mathrm{d}_H(\sigma(M), \sigma(N)) \leqslant \|M - N\|$$

avec d_H la distance de Hausdorff sur $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

$$\mathrm{d}_H(A, B) = \max(\sup_{x \in A} \mathrm{d}(x, B), \sup_{x \in B} \mathrm{d}(x, A))$$

Démonstration. Soit $d = \|M - N\|$. Supposons que $d > \mathrm{d}_H(\sigma(M), \sigma(N))$. On peut supposer par symétrie $\sup\limits_{x \in \sigma(M)} \mathrm{d}(x, \sigma(N)) > d$. Donc il existe $\mu \in \sigma(M)$ tel que $\mathrm{d}(\mu, \sigma(N)) > d$ donc pour tout $\nu \in \sigma(N)$, $|\mu - \nu| > d$.

On obtient que $\mu \notin \sigma(N)$ et même que $\frac{1}{\mu - z} =: f(z)$ est holomorphe sur un voisinage sur spectre de N. Par le calcul fonctionnel, on a $\sigma(f(N)) = f(\sigma(N)) = \{\frac{1}{\mu - \nu}, \nu \in \sigma(N)\}$.

On a $|f(\sigma(N))| < \frac{1}{d}$ et comme N est symétrique, $f(N)$ le reste, on a donc $\rho(f(N)) = \|f(N)\| = \|(\mu - N)^{-1}\|$. Ainsi, $\|(\mu - N)^{-1}\| < \frac{1}{d}$.

Mais $\mu - M = \mu - N + n - M = (\mu - N)(\operatorname{Id} + (\mu - N)^{-1}(N - M))$ est donc inversible ($\|(\mu - N)^{-1}(N - M)\| < 1$). Donc $\mu \notin \sigma(M)$, ce qui est absurde. ■

4.4.2 Calcul fonctionnel pour les opérateurs autoadjoints

Soit $q \in \mathbb{R}[X]$. Si M est autoadjoint, $q(M)^* = q(M)$.

On a donc $\rho(q(M)) = \|q(M)\|$ et $\sigma(q(M)) = q(\sigma(M))$ donc $\|q(M)\| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(q(M))} |\lambda| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(M)} |q(\lambda)|$.

L'application ϕ qui à une fonction polynômiale réelle sur $\sigma(M)$ associe un élément de $L_c(H)$ via $q \mapsto q(M)$ est un morphisme d'algèbre et une isométrie.

Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dnas un complet, comme par Stone-Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynômes réelles sur $\sigma(M)$ est dense dans $C^0(\sigma(M))$, ϕ s'étend en un morphisme d'algèbres continu de $C^0(\sigma(M)) \to L_c(E)$.

<u>THÉORÈME 4.16</u> *Si $M \in L_c(H)$ est autoadjoint,*

(i) $(fg)(M) = f(M)g(M)$ *pour tout* $f, g \in C^0(\sigma(M))$

(ii) $\|f(M)\| = \|f\|_\infty$

(iii) $f(M)$ *est symétrique*

(iv) $\sigma(f(M)) = f(\sigma(M))$

Démonstration. On écrit f et g comme limite de polynômes et tout passe à la limite dans (i), (ii), (iii).

Ça marche aussi dans (iv) mais on a besoin de vérifier que les limites au sens de Hausdorff et au sens habituel correspondent. ■

Proposition 4.4 Soit $M \in L_c(H)$ autoadjoint. M est positif (ie pour tout x, $(Mx, x) \geqslant 0$) ssi $\sigma(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ $a \inf_{\|x\|=1} (Mx, x) \geqslant 0$ donc $\sigma(M) \subset \mathbb{R}_+$.

$\Leftarrow$ Si $\sigma(M) \subset \mathbb{R}^+$, $a \geqslant 0$ donc $M \geqslant 0$. ■

Remarque 4.15 Si A est autoadjoint positif, on peut définir $\sqrt{A}$ par le calcul fonctionnel. En effet, $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\sigma(A)$.

4.4.3 Résolution spectrale d'un opérateur autoadjoint

Si A est autoadjoint compact et H séparable, on peut écrire $H = \overset{\perp}{\bigoplus_n} H_n$. Si E_n est la projection orthogonale sur H_n alors $\mathrm{Id} = \sum_{n \in \mathbb{N}_n}^{E}$ et $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n E_n$.

Posons pour tout $S \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$E(S) = \sum_{n, \lambda_n \in S} E_n$$

C'est une projection orthogonale et on peut formellement écrire

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda)$$

$S \mapsto E(S)$ a les propriétés d'une mesure à valeur projecteur.

On va donnet un sens à cette formule pour les opérateurs autoadjoints. Si $f = \alpha 1_A$ alors $\int_{\sigma(A)} f \,\mathrm{d}E = \alpha E(A)$.

Si $M \in L_c(H)$ est autoadjoint, on a vu que pour tout $f \in C^0(\sigma(M))$ on peut définir $f(M)$. Soit $x, y \in H$. $l_{x,y}(f) = (f(M)x, y)$.

$f \mapsto l_{x,y}(f)$ est une forme linéaire sur $C^0(\sigma(M))$. De plus,

$$|l_{x,y}(f)| = |(f(M)x, y)| \leqslant \|f(M)\| \, \|x\| \, \|y\| \leqslant \|f\| \, \|x\| \, \|y\|$$

$l_{x,y}$ est donc une forme linéaire continue sur $C^0(\sigma(M))$. Par Riesz, il existe $m_{x,y}$ mesure borélienne sur $\sigma(M)$ tel que pour tout $f \in C^0(\sigma(M))$,

$$l_{x,y}(f) = \int_{\sigma(M)} f(\lambda) \, \mathrm{d}m_{x,y}(\lambda)$$

On a construit une famille $m_{x,y}$ de mesures. On a les propriétés suivantes :

Définition 4.9 Si $\mu : X \to \mathbb{C}$ est une mesure complexe alors on définit sa valuation totale par

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)|, A = \bigsqcup A_n \right\}$$

Théorème 4.17

- *$(x, y) \mapsto m_{x,y}$ est linéaire en x et antilinéaire en y.*
- *$m_{y,x} = \overline{m_{x,y}}$*
- *$|m_{x,y}|(\sigma(M)) \leqslant \|x\| \, \|y\|$*
- *Les mesures $m_{x,x}$ sont réelles positives.*

Démonstration.

(i) Tout découle de l'unicité dans Riesz.

(ii) Pour tout $f \in C^0(\sigma(M))$,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(M)} f(\lambda) \, \mathrm{d}m_{y,x} &= l_{y,x}(f) = (f(M)y, x) \\ &= (y, \overline{f}(M)x) = \overline{(\overline{f}(M)x, y)} = \int_{\sigma(M)} f(\lambda) \overline{\mathrm{d}m_{x,y}}\end{aligned}$$

(iii) $|m_{x,y}|(\sigma(M)) = \|l\| \leqslant \|x\| \, \|y\|$

(iv) On considère $l_{x,x}$. Si f est positive, $f(M)$ aussi puisque $\sigma(f(M)) = f(\sigma(M)) \subset \mathbb{R}^+$.
Ainsi pour tout $f \geqslant 0$, $l_{x,x}(f) \geqslant 0$. Par Riesz, $l_{x,x}$ est eprésenté par une mesure positive donc $m_{x,x} \geqslant 0$. ∎

Grâce au théorème précédent, pour tout $S \in \mathscr{B}(\sigma(M))$, $m_{x,y}(S) \in \mathbb{C}$ est bien défini.

Par (i), $x \mapsto m_{x,y}(S)$ est linéaire et $y \mapsto m_{x,y}(S)$ est anti-linéaire. De plus, $(x, y) \mapsto m_{x,y}(S)$ est continue par (ii).

Par Riesz (sur un Hilbert), il existe $E(S) \in L_c(H)$ tel que $m_{x,y}(S) = (E(S)x, y)$ pour tout $x, y \in H$.

<u>Théorème 4.18</u>

(i) $E(S)^* = E(S)$

(ii) $\|E(S)\| \leqslant 1$

(iii) $E(\varnothing) = 0$, $E(\sigma(M)) = \mathrm{Id}$

(iv) $E(S \cup T) = E(S) + E(T)$ *si* $S \cap T = \varnothing$

(v) $E(S)M = ME(S)$

(vi) $E(S \cap T) = E(S)E(T)$

(vii) $\forall S$, $E(S)$ *est une projection orthogonale. Si* $S \cap T = \varnothing$, *alors* $\mathrm{Im}(E(S))$ *et* $\mathrm{Im}(E(T))$ *sont orthogonales.*

(viii) $E(S)E(T) = E(T)E(S)$

Démonstration.

(i) Csq de la def

(ii) idem

(iii) $(E(\varnothing)x, y) = m_{x,y}(\varnothing) = 0$ donc $E(\varnothing) = 0$.
De même, $(E(\sigma(M))x, y) = m_{x,y}(\sigma(M)) = \int_{\sigma(M)} \mathrm{d}m_{x,y} = (f(M)x, y) = (x, y)$ avec $f = 1$ donc $f(M) = \mathrm{Id}$. Donc $E(\sigma(M)) = \mathrm{Id}$.

(iv) $m_{x,y}(S \cup T) = m_{x,y}(S) + m_{x,y}(T)$ donc on a le résultat sur E.

(v) Par propriété du calcul fonctionnel :

$$\begin{aligned} & Mf(M) = f(M)M \\ \text{donc } & (f(M)Mx, y) = (Mf(M)x, y) = (f(M)x, My) \\ \text{donc } & m_{x,My} = m_{Mx,y} \end{aligned}$$

Ainsi, $(E(S)Mx, y) = (ME(S)x, y)$ donc $ME(S) = E(S)M$.

(vi) On peut étendre le calcul fonctionnel continu aux fonctions boréliennes bornées. Si $f \in C^0(\sigma(M))$ alors $(f(M)x, y) = \int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y}$. Comme $m_{x,y}$ est une mesure et $\sigma(M)$ est compact, cette intégrale est bien définie pour tout $f \in \mathscr{B}(\sigma(A))$ (fonctions Boréliennes mesurables bornées).
Pour tout $f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$, $(x, y) \mapsto \int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y}$ est une forme linéaire en x, antilinéaire en y et continue (de norme $\leqslant \|f\|_\infty$).
Par Riesz dans les Hilbert, pour tout $f \in \mathscr{B}(\sigma(M))$, il existe un unique $B_f \in L_c(H)$ tel que $(B_f x, y) = \int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y}$. On note $B_f = f(M)$.
On a donc étendu le calcul fonctionnel à des fonctions $\mathscr{B}(\sigma(M))$.
De plus, on a

<u>THÉORÈME 4.19</u> *$\phi : f \mapsto f(M)$ est un morphisme d'algèbres et $\|f(M)\| \leqslant \|f\|_\infty$.*

Démonstration. On montre seulement le point non trivial : $(fg)(M) = f(M)g(M)$. On le montre d'abord pour $f \in C(\sigma(M))$ et $g \in \mathscr{B}(\sigma(M))$. On a $(f(M)g(M)x, y) = (g(M)x, \overline{f}(M)y) = \int_{\sigma(M)} g(\lambda)\,\mathrm{d}m_{(x,\overline{f}(M)y)}$ et $((fg)(M)x, y) = \int_{\sigma(M)}^{f} g(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y}$.
Comme $m_{x,y}$ et $m_{x,\overline{f}(M)y}$ sont construites par Riesz, les fonctions de $C^0(\sigma(M))$ sont denses dans $L^1(\mathrm{d}m_{x,y})$ et dans $L^1(\mathrm{d}m_{x,\overline{f}(M)y})$.
En particulier, pour tout $g \in \mathscr{B}(\sigma(M))$, il existe $(g_n) \in C^0(\sigma(M))$ tel que $\sup \|g_n\|_{L^\infty} < \infty$ et $g_n \to g$ $m_{x,y}$ p.p. et $m_{x,\overline{f}(M)y}$ p.p.
Pour tout n, g_n est continue donc par convergence dominée,

$$(f(M)g_n(M)x, y) = \int_{\sigma(M)} g_n(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,\overline{f}(M)y} \to \int_{\sigma(M)} g(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,\overline{f}(M)y}$$

et

$$(f(M)g_n(M)x, y) = ((fg_n)(M)x, y) \to \int_{\sigma(M)} f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y}$$

car $\sup\limits_n |g_n(\lambda)| \leqslant M$ et $\sup\limits_n |f(\lambda)g_n(\lambda)| \leqslant M$ (et les constantes sont L^1 car les mesures en questions sont finies sur $\sigma(M)$ qui est compact).
Donc $(f(M)g(M)x, y) = ((fg)(M)x, y)$ pour f continue et g borélienne.
On recommence un coup pour avoir le résultat pour f, g boréliennes. ∎

En revenant à la définition de $E(S)$,

$$(E(S)x, y) = m_{x,y}(S) = \int_{\sigma(M)} 1_S\,\mathrm{d}m_{x,y} = (1_S(M)x, y)$$

(car $1_S \in \mathscr{B}(\sigma(M))$) donc $E(S \cap T) = 1_{S\cap T}(M) = (1_S 1_T)(M) = 1_S(M)1_T(M) = E(S)E(T)$.

(vii) Par (vi), $E(S) = E(S \cap S) = E(S)E(S) = E(S)^2$ donc $E(S)$ est un projecteur. Comme $E(S)^* = E(S)$ et $\|E(S)\| \leqslant 1$ il est orthogonal.

(viii) Conséquence directe de (vi) ∎

Proposition 4.5 Soit (S_n) une suite de boréliens disjoins. On a pour tout $x \in H$,

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) x = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(S_n)x$$

avec convergence dans H de la série.

Démonstration. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in H$. On a (additivité finie) :

$$E\left(\bigcup_{k=n}^{m} S_k\right) x = \sum_{k=n}^{m} E(S_k)x$$

Donc $\left\| E\left(\bigcup_{k=n}^{m} S_k\right) x \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} \|E(S_k)x\|^2$ car les images sont orthogonales. Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{m} \|E(S_k)x\|^2 \leqslant \left\| E\left(\bigcup_{k=n}^{m} S_k\right) \right\|^2 \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2$$

donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|E(S_k)x\|^2$ est convergente car $\|E(S)\| \leqslant 1$ pour tout S.

Comme $\left\| \sum_{k=n}^{m} E(S_k)x \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} \|E(S_k)x\|^2 \to 0$. Donc $\sum_{k=0}^{n} E(S_k)x$ est une suite de Cauchy dans H donc converge. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} E(S_k)x \in H$.

Il reste à montrer que $E\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k\right) x = \sum_{k\in\mathbb{N}} E(S_k)x$. Pour tout $y \in H$, on a

$$\begin{aligned}\left(E\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k\right) x, y\right) &= m_{x,y}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_{x,y}(S_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (E(S_k)x, y) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} E(S_k)x, y\right)\end{aligned}$$

Donc on a bien le résultat. ■

Remarque 4.16 Sur $L_c(H)$, on peut mettre plein de topologies. On dit que $T_n \to T$ avec

- *convergence normale $\|T_n - T\| \to 0$*
- *convergence forte (ATTENTION : il s'agit de la topologie faible) : $T_n x \to Tx$ pour tout x.*
- *convergence faible : $(T_n x, y) \to (Tx, y)$.*

<u>Définition 4.10</u> On dit que $S \to E(S)$ est une mesure à valeur projecteurs ssi pour tout S, $E(S)$ est une projection orthogonale, $E(\varnothing) = 0$ et E est σ-additive : $E\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k\right) x = \sum_{k\in\mathbb{N}} E(S_k)x$ pour tout $x \in H$.

<u>THÉORÈME 4.20</u> *Soit H un Hilbert, M autoadjoint. il existe une unique mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ à valeur projecteur $S \to E(S)$ tel que $E(S \cap T) = E(S)E(T)$ et*

$$\forall f \in C^0(\sigma(M)), f(M) = \int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$$

Remarque 4.17 *L'intégrale est définie comme intégrale de Lebesgue. Si $f = \sum \alpha_i A_{S_i}$ alors*

$$\int f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \sum f(\alpha_i)E(S_i)$$

Démonstration. L'intégrale est définie au sens précédent pour $f \in \mathscr{B}(\sigma(M))$. De plus,

$$\left(\int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x, y\right) = \int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y} = (f(M)x, y)$$

Il suffit de le vérifier pour les fonctions étagées. Si $f = \sum \alpha_i 1_{S_i}$, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda x, y\right) &= \left(\left(\sum_i f(\alpha_i)E(S_i)\right)x, y\right)\\ &= \sum_i f(\alpha_i)(E(S_i)x, y) = \sum_i f(\alpha_i)m_{x,y}(S_i)\\ &= \int_{\sigma(M)} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,y} = (f(M)x, y)\end{aligned}$$

■

Remarque 4.18 *En particulier, en prenant $f = 1$, on a $\mathrm{Id} = \int_{\sigma(M)} \mathrm{d}E_\lambda$ et $f(\lambda) = \lambda$ pour tout λ, on a $M = \int_{\sigma(M)}^{\lambda} \mathrm{d}E_\lambda$.*

4.4.4 Représentation spectrale

On veut généraliser le cas des opérateurs autoadjoints compacts en montrant que si M est autoadjoint, il existe un espace $L^2(X, \mu)$ et une fonction bornée F telle que $UAU^{-1} = f \mapsto Ff$.

<u>Définition 4.11</u> Soit $x \in H$. On dit que x est cyclique ssi $\{A^n x, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H.

Remarque 4.19 *De manière équivalente, $\{P(A)x, P \in \mathbb{C}[X]\}$ est dense dans H ou alors $H = \{f(A)x, f \in C^0(\sigma(A))\}$.*

Lemme 4.20.1
S'il existe $x \in H$ cyclique alors il existe μ_x mesure borélienne sur $\sigma(A)$ et $U : H \to L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_x)$ unitaire tel que

$$\forall f \in L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_x), (UAU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

Démonstration. On pose $U(f(A)x)(\lambda) = f(\lambda)$ pour tout $f \in C(\sigma(A))$.

- U est bien défini : il faut montrer que si $f(A)x = g(A)x$ alors $f = g$ pour une certaine mesure μ_x. On a

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|^2 &= (f(A)x, f(A)x) = ((\overline{f}f)(A)x, x) \\ &= \int_{\sigma(A)} \overline{f}f(\lambda)\,\mathrm{d}m_{x,x} = \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}m_{x,x}\end{aligned}$$

  On prend $\mu_x = m_{x,x}$, ceci assure la bonne définition de U car si $f(A)x = 0$, alors $f = 0$ p.p. par l'égalité précédente, comme x est cyclique.
- U est une isométrie car $\|f(A)x\|^2 = \|f\|_2^2$.
- U est donc injectif à image fermée donc il reste à montrer que U est surjectif. On a $C^0(\sigma(A)) \subset \mathrm{Im}(U)$ et comme $\mathrm{d}m_{x,x}$ est régulière (Riesz), $C^0(\sigma(A))$ est dense dans $L^2(\sigma(A), \mathrm{d}m_{x,x}$. Ainsi, comme $\mathrm{Im}(U)$ est fermée, $\mathrm{Im}(U) = L^2$ donc U est surjective.
- On a $(UAU^{-1}f)(\lambda) = (UAf(A)x)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ donc c'est fini. ■

<u>THÉORÈME 4.21</u> *Soit A autoadjoint. Si H es séparable, il existe*

- *$(H_n)_n$ des espaces fermés stables par A, tels que $H = \bigoplus H_n$ et pour tout n, H_n est stable pour A.*
- *μ_n des mesures boréliennes sur $\sigma(A)$.*
- *$U : H \to \bigoplus L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_n)$ unitaire tel que pour $f \in \bigoplus L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_n)$,*

$$(UAU^{-1}f)_n(\lambda) = \lambda f_n(\lambda)$$

Remarque 4.20

- *On peut prendre $\mu_n = m_{x_n,x_n}$.*
- *La décomposition n'est pas unique.*
- *On tretrouve la diagonalisation des matrices ou des opérateurs compacts en prenant $\mu_n = \delta_{\lambda_n}$.*

Démonstration.

Lemme 4.21.1

Si H est séparable et A autoadjoint alors on a une décomposition hilbertienne $H = \bigoplus H_n$ avec H_n invariant par A et H_n cyclique pour $A|_{H_n}$.

Démonstration. Par récurrence. Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne. Soit $H_1 = He_1 = \{f(A)e_1, f \in C^0(\sigma(A))\}$ cyclique et stable par A.

Soit $k(2)$ le plus petit k tel que $e_k \notin H_1$ et $f_2 = e_{k(2)} - P_{H_1}^{\perp}(e_{k(2)})$. On a $H_1 \oplus^{\perp} H_{f_2}$. En effet, H_1 est stable par A autoasjoint donc $H_1^{\perp}$ aussi.

Par récurrence, on construit H_n tel que pour tout n, $\langle e_1, \ldots, e_{k(n)}\rangle \subset H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$. ■

On décompose $H = \bigoplus H_n$. Il existe μ_n et $U_n : H_n \to L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_n)$ unitaire avec

$$(U_n A U_n)^{-1} f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

pour tout $f \in L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_n)$. On pose $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $x_n \in H_n$.

$$U(x) = (U_n x_n)_n$$

est par définition unitaire de $H \to \bigoplus^{\perp} L^2(\sigma(A), \mathrm{d}\mu_n)$. ∎

Remarque 4.21

- *La théorie se généralise aux opérateurs autoadjoints non bornés.*
- *Un cas déjà connu est $A = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : H^1 \to L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.*
- *Une réalisation concrète du théorème est donné par la transformée de Fourier.*

4.5 Décomposition du spectre

Soient H un Hilbert, A autoadjoint.

4.5.1 Avec la décomposition spectrale

Proposition 4.6 $\lambda \in \sigma(A)$ ssi $\forall \varepsilon > 0, E(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[) \neq 0$.

Démonstration.

- Si $\lambda \notin \sigma(A)$, $\sigma(A)^c$ est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\subset \sigma(A)^c$. Pour tout $x, y \in H$,

$$(E(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[)x, y) = \int_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[\cap\sigma(A)} \mathrm{d}m_{x,y} = 0$$

Réciproquement, si $E(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[) = 0$. Pour tout $f \in \mathscr{L}^\infty(\sigma(A))$,

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \int_{\sigma(A)\cap]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$$

On va montrer que $A - \lambda$ est inversible. Soit

$$g(\mu) = \frac{1}{\mu - \lambda} 1_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \in \mathscr{L}^\infty(\sigma(A))$$

On a

$$\begin{aligned}(A - \lambda)g(A) = g(A)(A - \lambda) &= \int_{\sigma(A)} (\mu - \lambda)g(\mu)\,\mathrm{d}E_\mu \\ &= \int_{\sigma(A)\cap]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \mathrm{d}E_\lambda = \int_{\sigma(A)} \mathrm{d}E_\lambda = \mathrm{Id}\end{aligned}$$ ∎

Proposition 4.7 Caractérisation des valeurs propres $\lambda \in \mathrm{vp}(A)$ ssi $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

Démonstration. Si λ est valeur propre, il existe $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$. Par récurrence, on en déduit que $P(A)x = P(\lambda)x$pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

Par le calcul fonctionnel, pour tout $f \in \mathscr{L}^\infty(\sigma(A))$, $f(A)x = f(\lambda)x$. En prenant $f = 1_{\{\lambda\}}$, on a $1_{\{\lambda\}}(A)x = x$. Par définition, on a $1_S(A) = E(S)$ pour tout $S \in \mathscr{B}(\sigma(A))$ donc $E(\{\lambda\})x = x$ donc $E(\{\lambda\}) \neq \{0\}$ (en fait $E = \mathrm{Id}$ sur $\mathrm{Ker}(A - \lambda)$.

Si $E(\{\lambda\}) \neq 0$, on montreque $AE(\{\lambda\}) = \lambda E(\{\lambda\})$. Par le calcul fonctionnel,

$$\begin{aligned} AE(\{\lambda\}) = A1_{\{\lambda\}}(A) &= \int_{\sigma(A)} \mu 1_{\{\lambda\}}(\mu)\,\mathrm{d}E_\mu \\ &= \int_{\{\lambda\}} \mu\,\mathrm{d}E_\mu = \lambda 1_{\{\lambda\}}(A) = \lambda E(\{\lambda\}) \end{aligned}$$ ■

Remarque 4.22 En fait, $E(\{\lambda\})$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(A-\lambda)$.

Définition 4.12 On dit que λ est dans le spectre discret de A ($\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ ssi λ est valeur propre isolée de multiplicité finie. On dit que λ est dans le spectre essentiel sinon.

Remarque 4.23 On a une décomposition $\sigma(A) = \sigma_{disc}(A) \sqcup \sigma_{ess}(A)$.

Proposition 4.8 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $E(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[)$ est de dimension infinie.

De manière équivalente, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $E(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[)$ est de dimension finie.

Démonstration. Si $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$. C'est une valeur propre donc $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$. De plus λ_0 est isolé : il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[) = E(\{\lambda_0\})$.

λ_0 est de multiplicité finie donc $\mathrm{Ker}(\lambda_0 - A)$ est de dimension finie donc $E(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[)$ aussi.

S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[)$ est de dimension finie, alors on montre d'abord que λ_0 est isolé. Sinon il existe $\lambda_n \in \sigma(A)$ qui tend vers λ_0 et $\lambda_n \neq \lambda_m$ pour $n \neq m$.

On peut alors trouver des intervalles disjoints I_n contenant λ_n dans leur intérieur et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$.

On a $E(I_n) \neq 0$ et si $n \neq m$, $I_n \cap I_m = \varnothing$ donc $\mathrm{Im}(E(I_n))$ et $\mathrm{Im}(E(I_m))$ sont en somme directe orthogonales. Ainsi,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} E(I_n) = E\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) \leqslant E(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[) < \infty$$

Contradiction. Donc λ_0 est isolé.

Finalement, $E(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[) = E(\{\lambda_0\})$ donc λ_0 est valeur propre de multiplicité finie. ■

4.5.2 En utilisant les mesures spectrales

<u>Théorème 4.22</u> de décomposition de Lebesgue *Pour toute mesure borélienne μ,*

$$\mu = \mu_{ac} \oplus \mu_{pp} \oplus \mu_c$$

avec μ_{ac} absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, μ_{pp} discrète et μ_c continue (ne charge aucun singleton).

On peut décomposer H en appliquant cette décomposition aux $m_{x,y} = m_{x,y}^{ac} \oplus m_{x,y}^{pp} \oplus m_{x,y}^{x}$.

On a alors une décomposition $H = E^{ac}(\sigma(A)) \oplus E^{pp}(\sigma(A)) \oplus E^{c}(\sigma(A))$. Ces trois espaces sont invariants pour A. On définit alors

$$\sigma^{ac}(A) = \sigma(A|_{E^{ac}(\sigma(A))}), \sigma^{pp}(A) = \sigma(A|_{E^{pp}(\sigma(A))}) \text{ et } \sigma^{c}(A) = \sigma(A|_{E^{c}(\sigma(A))})$$

Chapitre 5

Espaces localement convexes

5.1 Formes géométriques de Hahn-Banach

5.1.1 Jauge d'un convexe

Proposition 5.1 Si K est convexe, il contient tous les barycentres de ses points.

Proposition 5.2 Useless sauf pour gagner du temps

- Si K est convexe $-K$ l'est.
- Si K, L sont convexes, $K + L$ aussi
- une intersection de convexes est convexe
- une union de convexes totalement ordonnés est convexe
- si l est linéaire et K convxe, $l(K)$ est convexe et $l^{-1}(K)$ aussi.

Définition 5.1 Soit $S \subset E$. On note $\mathrm{co}(S)$ l'enveloppe convexe de S, c'est le plus petit convexe contenant S, par exemple l'intersection des convexes qui contiennent S.

Proposition 5.3

$$\mathrm{co}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, x_i \in S, a_i \geqslant 0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}$$

Démonstration. On pose K l'ensemble de droite. C'est un convexe. Si L est un convexe avec $S \subset L$ alors $K \subset L$ par caractérisation de la convexité donc $\mathrm{co}(S) = K$. ∎

Définition 5.2 Soit $S \subset E$, $x_0 \in S$. On dit que x_0 est un point intérieur ssi

$$\forall y \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall t, |t| \leqslant \varepsilon, x_0 + ty \in S$$

Remarque 5.1 On n'a pas besoin de topologie pour cette définieion. Si on a un evn (même evt) et si S est ouvert, tous les points sont intérieurs.

Définition 5.3 Jauge d'un convexe Soit K un convexe dont 0 est un point intérieur. On pose

$$p_K(x) = \inf \left\{ a > 0, \frac{x}{a} \in K \right\}$$

Remarque 5.2 C'est bien défini et $p_K(x) \in \mathbb{R}$ car 0 est un point intérieur de K.

Théorème 5.1 *Si $x, y \in K$ et $\lambda > 0$, $p_K(\lambda x) = \lambda p_K(x)$ et $p_K(x+y) \leqslant p_K(x) + p_K(y)$.*

Démonstration.

- $\{a, \frac{x}{a} \in K\} = \{a, \frac{\lambda x}{\lambda a} \in K\}$ donc $p_K(\lambda_x) = \lambda p_K(x)$.
- Soit $a, b > 0$, $\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \in K$. Alors

$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} \in K$$

par convexité. On a donc $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b} \in K$ donc $p_K(x+y) \leqslant a+b$. En prenant l'inf, on a le résultat. ■

Proposition 5.4

- Si $x \in K$, $p_K(x) \leqslant 1$
- x est un point intérieur de K ssi $p_K(x) < 1$.

Démonstration. Le premier point est clair. Si x est un point intérieur, soit $a > 0$ tel que $\frac{x}{a} \in K$. Comme x est intérieur, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout t vérifiant $|t| < \varepsilon$, on a $x + \frac{tx}{a} \in K$ donc $\frac{x}{\frac{a}{a+t}} \in K$.

Par définition de p_K, $p_K(x) \leqslant \frac{a}{a+t} < 1$. Réciproquement, si $p_K(x) < 1$, par définition de l'inf, il existe $0 < a < 1$ tel que $\frac{x}{a} \in K$. Donc $x = (1-a)0 + a\frac{x}{a} \in K$ avec $a \in]0,1[$. Il reste à montrer que x est intérieur.

Soit $y \in E$. Pour tout $t > 0$, $p_K(x+ty) \leqslant p_K(x) + tp_K(y)$. Pour un certain ε, on a pour tout $|t| \leqslant \varepsilon$, $p_K(x) + tp_K(y) < 1$ donc $x + ty \in K$. pour conclure on fait pareil avec $-y$. ■

5.1.2 Théorèmes de séparation

Définition 5.4 H est un hyperplan ss'il existe $l \in E^* \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $H = \{x \in E, l(x) = c\}$.

O est un demi-espace ouvert ss'il existe $l \in E^* \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $O = \{x \in E, l(x) < c\}$.

Un demi-espace fermé c'est la même chose avec $\leqslant$.

Remarque 5.3 *Ce sont bien des ouverts et des fermés s'il y a une topologie sur E et $l \in E'$.*

<u>THÉORÈME 5.2</u> *Soit K convexe non vide tel que tous les points de K sont intérieurs et $y \notin K$. Alors il existe un hyperplan tel que $l(x) < c \leqslant l(y)$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. On peut supposer $0 \in K$ quitte à translater. p_K est donc bien définie et $p_K(x) < 1$ pour tout $x \in K$ et $p_K(y) \geqslant 1$.

On prend donc $c = 1$ et on pose $l(y) = 1$. On prolonge l à $\mathbb{R}y$ par $l(ay) = a$. On remarque que $l(z) \leqslant p_K(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}y$. En egget, si $z = ay$ alors $a < 0$, c'est clair et sinon, $l(z) = al(y) \leqslant ap_K(y) = p_K(ay)$.

Par Hahn-Banach, on prolonge l à E en gardant $l(z) \leqslant p_K(z)$ pour tout $z \in E$. On a donc le résultat car pour tout $x \in K$, $l(x) \leqslant p_K(x) < 1$ car tous les points de K sont intérieurs. ∎

Remarque 5.4 *Par la même démonstration, on peut montrer que si K est un convexe avec un point intérieur et $y \notin K$, alors il existe $l \in E^* \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in K$, $l(x) \leqslant c \leqslant l(y)$.*

<u>THÉORÈME 5.3</u> *Soit H et M convexes disjoints tels que l'un des deux contient un point intérieur. il existe $c \in \mathbb{R}$ et $l \in E^*$ tel que $l(u) \leqslant c \leqslant l(v)$ pour tout $u \in H$, $v \in M$.*

Démonstration. On se ramène au cas précédent : $K = H - M$ est convexe, contient un point intérieur et ne contient pas 0.

On utilise pa proposition précédente avec K et $y = 0$. Il existe $l \in E^*$ tel que $l(x) \leqslant 0$ donc pour tout $y \in H$, $z \in M$, $l(y - z) \leqslant 0$ donc $l(y) \leqslant l(z)$. ∎

5.2 EVT localement convexes (EVTLC)

5.2.1 Espace vectoriels topologiques (EVT)

<u>Définition 5.5</u> On dit que E est un evt si E est un ev muni d'une topologie séparée telle que $(x, \lambda) \to \lambda x$ et $(x, y) \mapsto x + y$ sont continues.

Exemple 5.1 Les evn sont des evt pour la topologie de la norme. Si E est un evn alors $(E, \sigma(E, E'))$ est un evt et $(E', \sigma(E', E))$ est un evt.

Proposition 5.5

- Si U est ouvert, $x + U$ et λU le sont pour $x \in E$ et $\lambda \neq 0$.
- Si U est ouvert tous ses points sont intérieurs.

Démonstration. Le premier point est clair. Soit $x \in U$. On veut montrer que pour tout $y \in E$, $xx+ty \in U$ pour t assez petit. Soit $x = \{t \in \mathbb{R}, x+ty \in U\}$. $0 \in X$, et $X = \varphi^{-1}(u)$ avec $\varphi : t \mapsto x + ty$ continue. X est donc un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $|t| \leqslant \varepsilon$, $t \in X$. Donc $x + ty \in U$. ■

Définition 5.6 Soit E un evt. On dit que E est localement convexe ssi la topologie de E possède une base de voisinages convexes.

Exemple 5.2 Les exemples précédents sont tous des evtlc.

THÉORÈME 5.4 *Soit E un evtlc. Alors E' sépare les points : pour tout $x \neq y \in E$, il exist el $\in E'$ linéaire continue tel que $l(x) \neq l(y)$.*

Remarque 5.5 Si on regarde sur E evtlc, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est bien une topologie séparée donc E est aussi evtlc pour cette topologie.

Démonstration. On peut supposer $x = 0$ et $y \neq 0$. par définition de la topologie d'evtlc, il existe T un voisinage ouvert de 0 convexe tel que $y \notin T$. Par le premier théorème de séparation, il existe $l \in E^*$ tel que $l(x) < 1 = l(y)$ pour tout $x \in T$.

On avait construit l telq ue $l(z) \leqslant p_T(z)$ pour tout $z \in E$. Il reste donc à vérifier que $l \in E'$. On va montrer que l est continue en montrant que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\{x \in E, l(x) < c\}$ et $\{x \in E, l(x) > c\}$ dont ouverts.

Soit z tel que $l(z) < c$. On veut montrer qu'il existe un voisinage V de z tel que $l(w) < c$ pour tout $w \in V$. On va chercher ce voisinage sous la forme $V = z + rT$ avec $r > 0$ bien choisi. Pour tout $y \in T$,

$$l(z + ry) = l(z) + rl(y) \leqslant l(z) + rp_T(y) < l(z) + r$$

Pour $r = c - l(z) > 0$, on a $l(z + ry) < c$ pour tout $y \in T$. On a donc $z + rT \subset \{l < c\}$ Il reste à traiter $\{l > c\}$ et on se ramène au cas d'avant quitte à supposer $T = -T$ (suffit de considérer $T \cap -T$). ■

5.2.2 Théorème de Krein-Milman

Points extrêmaux

Définition 5.7 Sout K convexe, $S \subset K$. On dit que S est un ensemble extrêmal ssi S est convexe non vide, et pour tout $x \in S$. Si $x = (1-t)y + tz$ avec $t \in]0, 1[$ et $y, z \in K$ alors $y \in S$ et $z \in S$.

Un point x est extrêmal ssi $\{x\}$ l'est.

THÉORÈME 5.5 *Soit E un evtlc, K compact convexe non vide. K possède un point extrêmal.*

Démonstration. On utilise Zorn. Soit X l'ensemble des $S \subset K$ fermés non vides et extrêmaux.

On ordonne X par l'inclusion descendante. $X \neq \varnothing$ car $K \in X$. X est inductif car si $(S_i)_i$ est totalement ordonnées, soit $S = \bigcap\limits_{i \in I} S_i$. Il faut montrer que $S \in X$.

S est convexe fermé et non vide car c'est une intersection décroisssante de compacts non vides donc si l'intersection est vide, $K = \bigcup\limits_{i \in I} S_i^c$ est ouvert donc il existe $J \subset I$ dfini tel que $K \subset \bigcup\limits_{i \in J} S_i^c$ donc $\bigcap\limits_{i \in J} S_i = \varnothing$, ce qui est absurde car les S_i sont non vides et S_i est totalement ordonnée. Donc $S \neq \varnothing$.

S est aussi un ensemble extrêmal par la définition. Ainsi, X est inductif. Par Zorn, il possède un élément maximal S. Montrons que c'est un singleton.

Si $y \neq z \in S$, il existe $l \in E'$ tel que $l(y) \neq l(z)$ par le théorème précédent. l est continue sur K compact donc il existe $m = \min\limits_{x \in S} l(x)$. Notons $M = \{x \in S, l(x) = m\}$. C'est un fermé car l est continue.

$M \subsetneq S$ car l prend au moins deux valeurs. M est extrêmal car il est convexe et si $x \in M$ s'écrit $(1-t)x_1 + tx_2$ avec $x_1, x_2 \in S$ alors $m = l(x) = (1-t)l(x_1) + tl(x_2) \geqslant m$ donc $l(x_1) = l(x_2) = m$.

Comme S est extrêmal, si $x = (1-t)x_1 + tx_2$ avec $x_1, x_2 \in K$, on a $x_1, x_2 \in S$. Par le calcul précédent, $x_1, x_2 \in M$ donc $M \in X$ et $M \subsetneq S$. Absurde. Donc M a un seul élément. ■

Remarque 5.6 In a en fait que tout ensemble extrêmal A fermé non vide possède un élément extrêmal. En effet, il suffit de considérer pour X l'ensemble des $S \subset A$ fermés extrêmaux non vides et la suite de la démonstration est identique.

Krein-Milman

En dimension finie, on a le

<u>Théorème 5.6</u> Carathéodory *En dimension N, tout point d'un compact convexe est combinaison convexe d'au plus $N+1$ points.*

<u>Théorème 5.7</u> Krein-Milman *Soit E un evtlc, K compact convexe non vide. K est l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble S de ses points extrêmaux.*

Démonstration. $S \neq \varnothing$ par le théorème précédent.

On va montrer que $\overline{\mathrm{co}(S)}^c \subset K^c$. Soit $z \notin \overline{\mathrm{co}(S)}$.

Lemme 5.7.1
Dans E evtlc, soit K un compact convexe et $z \notin K$. Il existe $l \in E'$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $l(z) = c$ et $l(x) < c$ pour tout $x \in K$.

Démonstration. Comme K est compact, il existe V ouvert convexe contenant 0 tel que $z \notin K+V$. En effet, pour tout $y \in K$, $z \neq y$ donc (topologie séparée) il existe U_y ouvert convexe contenant 0 tel que $z \notin y + U_y$.

$K \subset \bigcup_{y \in K} (y + \frac{1}{2}U_y)$ donc il existe $y_1, \dots, y_n$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + U_{y_i})$.

Soit $V = \bigcap_{i=1}^{n} \frac{1}{2} U_{y_i}$ est un ouvert contenant 0 et $z \notin K+V$ par construction.

$K+V$ est connexe et tous ses points sont intérieurs donc il existe $l \in E^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $l(y) < c \leqslant l(z)$ pour tout $y \in K+V$. Il reste à montrer l continue. l est bornée par définition ($l(y) < c$) et on montrera plus tard une caractérisation de la continuité qui rendra l continue. ∎

En utilisant le lemme, il existe $l \in E'$ tel que $l(z) = c$ et $\sup_{x \in \overline{\mathrm{co}(S)}} l(x) < c$. l est continu sur K donc atteint son maximum. Il existe donc $y \in K$ tel que $l(y) = \sup_K l =: M$.

On considère $\widetilde{S} = \{y, l(y) = M\} \cap K$. C'est un convexe non vide fermé extrêmal donc il possède un point extrêmal et $M = \sup_{\overline{\mathrm{co}(S)}} l$.

Comme $l(z) > M$, $z \notin K$. ∎

<u>THÉORÈME 5.8</u> VARIANTE DU THÉORÈME DE SÉPARATION *Soit E un evtlc, K compact convexe, F fermé convexe disjoints. Alors il existe $l \in E'$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $l(y) < c \leqslant l(z)$ pour tout $y \in K$, $z \in F$.*

Démonstration. cf. preuve du théorème précédent. ∎

Une autre démonstration de Stone-Weierstrass

<u>THÉORÈME 5.9</u> *Soit A une sous(algèbre de $C^0(K)$ avec K compact. Si A sépare les points et contient les constantes, $\overline{A} = C^0(K)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $l|_A = 0$ alors $l = 0$. Soit $l \in C^0(K)'$ nulle sur A. Si $l \neq 0$, quitte à considérer $\frac{l}{\|l\|}$, on peut supposer $\|l\| = 1$.

Soit $X = \{\varphi \in C^0(K)', \varphi|_A = 0 \text{ et } \|\varphi\| \leqslant 1\}$. C'est un convexe non vide compact pour la topologie faible $*$ sur $C(K)'$ puisque $X = B_{C(K)'}(0,1) \cap \bigcap_{x \in A} \{\varphi, \varphi(x) = 0\}$.

On va décrire les points extrêmaux de X. Soir $\varphi \in X$ extrêmal. Nécessairement $\|\varphi\| = 1$. Par Riesz, il existe μ mesure borélienne telle que $\varphi(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pour tout $f \in C(K)$ et $\|\varphi\| = |\mu|(K) = 1$.

Fixons $g \in A$ tel que $0 < g < 1$. On considère les formes linéaires $\varphi_1 : f \mapsto \varphi(fg)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \varphi(f(1-g))$ et on pose $a = \|\varphi_1\|$ et $b = \|\varphi_2\|$. Comme A est une algèbre, $\varphi_1|_A = 0 = \varphi_2|_A$.

De plus, $a, b \in]0,1]$ donc $\varphi_1, \varphi_2 \in X$. On a

$$\|\varphi\| = |\mu|(X) = \int_X \mathrm{d}|\mu| = \int_X g \, \mathrm{d}|\mu| + \int_X (1-g) \, \mathrm{d}|\mu| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$$

Donc $a + b = 1$. On peut écrire $\varphi = a\frac{\varphi_1}{a} + b\frac{\varphi_2}{b}$ et $\frac{\varphi_1}{a}, \frac{\varphi_2}{b} \in X$.

Comme φ est extrêmal, $\varphi = \frac{\varphi_1}{a} = \frac{\varphi_2}{b}$ donc pour tout $f \in C(K)$,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \frac{g}{a} \, \mathrm{d}\mu$$

Donc $g = a$ sur le support de μ. On va en déduire qu'il existe $p \in K$ tel que $\operatorname{supp} \mu = \{p\}$. Sinon il exist e$p, q \in K$ distincts tels que $p, q \in \operatorname{supp}(\mu)$. Comme A sépare les points, il existe $h \in A$ tel que $h(p) \neq h(p)$ (avec $0 < h < 1$ en renormalisant). On peut alors utiliser ce qui précède pour $g = h$.

On trouve donc $h = a$ sur le support de μ donc $h(p) = h(q)$ absurde. DOnc $\operatorname{supp} \mu = \{p\}$ et $\mu = \pm\delta_p$.

Conclusion, pour tout $f \in A$, $\varphi(f) = 0 = \pm f(p)$. Pour f constante égale à 1, on a une contradiction. ∎

Calcul des variations

Définition 5.8 Soit $J : E \to \mathbb{R}$. On dit que J est semi-continue inférieurement ssi pour tout $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $J(y) \geqslant J(x) - \varepsilon$ pour tout $y \in V$.

Lemme 5.9.1
Dans un evn, J est sci ssi sont épigraphe est fermé.

Démonstration.

- Si J est sci, soit (λ, x) n'appartenant pas à l'épigraphe $\mathcal{E}$ de J, ie $\lambda < J(x)$. Il existe $V \in \mathcal{V}(y)$ tel que $J(y) > \frac{\lambda}{2}$ pour tout $y \in V$.
  Donc $]-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}[\times V \subset \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}^c$ est ouvert.
- Si $\mathcal{E}(J)$ est fermé et $x \in E$. Si J n'est pas sci en x, comme E est un evn, il existe $\varepsilon > 0$ et $y_n \to x$ tel que $J(y_n) \leqslant J(x) - \varepsilon$.
  On a $(y_n, J(x) - \varepsilon) \in \mathcal{E}$ donc par fermeture, $(x, J(x) - \varepsilon) \in \mathcal{E}$ donc $J(x) - \varepsilon \geqslant J(x)$ contradiction. ∎

Lemme 5.9.2
Soit E un evn, C convexe. C est fermé faible ss'il est fermé fort.

Démonstration. Par définition, fermé faible implique fermé fort.

Si C est convexe fermé fort, on montre que C^c est ouvert faible. Si $z \in C^c$, on applique le théorème de séparation d'un fermé et d'un compact à C et $\{z\}$.

Il existe donc $l \in E'$ tel que $l(y) < c \leqslant l(z)$ pour tout $y \in C$. Soit $M = \sup_C l$. Soit $V = \{x, l(x) > \frac{M+c}{2}\}$. C'est un ouvert pour le topologie faible qui contient z et tel que $V \cap C = \varnothing$. Donc C^c est ouvert faible. ■

Théorème 5.10 *Si E est un evn réflexif et $J : E \to \mathbb{R}$ convexe sci, et telle que*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = \infty$$

alors il existe $y \in E$ tel que $J(y) = \inf_E J(x)$.

Démonstration. Soit $y_n \in E$telq ue $J(y_n) \to \inf J(y) =: I$. y_n est bornée car $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} J(x) = \infty$.

E est réflexif donc il existe $y \in E$ et une suite extraite (y_{n_k}) qui converge faiblement vers y. Il reste à montrer que $J(y) \leqslant I$. Considérons l'épigraphe $\mathcal{E}$ de J.

J est sci convexe donc $\mathcal{E}$ est fermé convexe. Donc $\mathcal{E}$ est fermé faible donc $(y, I) \in \mathcal{E}$. DOnc $I \geqslant J(y)$ et l'inf est atteint. ■

Exemple 5.3 Soit $f \in L^2([a,b])$ et $J(u) = \frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2 \,\mathrm{d}x - \int_a^b fu \,\mathrm{d}x$ et $E = \{u \in H^1(a,b), u(a) = u(b) = 0\}$. C'est un Hilbert et il existe $v \in E$ tel que $J(v) = \inf J(u)$.

On vérifie ensuite que E est solution de $-u'' = f$ avec $u(a) = u(b) = 0$.

En considérant $f \in L^2(\Omega)$ et $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu$, il existe $v \in H_0^1(\Omega$ tel que $J(b) = \int J(u)$. v est alors solution de $-\delta v = f$ avec $v|_{\partial\Omega} = 0$.

5.2.3 Théorème de Choquet

Théorème 5.11 *Soit E un evtlc, K compact convexe non vide et K_e l'ensemble des ses point extrêmaux.*

Pour tout $u \in K$, il existe m_u mesure de probabilité sur $\overline{K_e}$ tel que $u = \int_{\overline{K_e}} \lambda \,\mathrm{d}m_u(\lambda)$ au sens faible, ie pour tout $l \in E'$,

$$l(u) = \int_{\overline{K_e}} l(\lambda) \,\mathrm{d}m_u(\lambda)$$

Remarque 5.7 C'est une généralisation de Carathéodory en dimension infinie.

Démonstration. Soit $u \in K$ et $l \in E'$. K est compact donc le sup M et l'inf m sont atteinds. De plus, $l^{-1}(\{M\}) \cap K$ et $l^{-1}(\{m\}) \cap K$ sont des fermés convexes extrêmaux non vides donc contiennent un point extrêmal.

Donc M et m sont atteints sur K_e. Si l_1 et l_2 sont deux formes linéaires égales sur K_e alors, comme

$$\min_{K_e} l \leqslant l(u) \leqslant \max_{K_e} l$$

$l_1 = l_2$ sur K. Donc $l|_K$ est complètement déterminée par $l|_{K_e}$.

Pour $l \in E'$, on pose $f(q) = l(q)$ pour tout $q \in \overline{K_e}$. On a $f \in C^0(\overline{K_e})$. Ainsi, pour tout $u \in K$, $l(u) = \phi_u(f)$ avec $\phi_u : C(\overline{K_e}) \to \mathbb{R}$.

Posons $L = \{f \in C^0(\overline{K_e}), \exists l \in E', f = l|_{K_e}\}$ sev de $C^0(\overline{K_e})$. $f \mapsto \phi_u(f)$ est linéaire sur L.

On considère $\widetilde{L} = L \cup \{1\}$ et on pose $\phi(f_0) = 1$. On utilise une variante de Hahn-Banach :

<u>Théorème 5.12</u> *Soit Y un sev des fonctions bornées sur X ($B(X)$) tel qu'il existe $y_0 \in Y$ avec $y_0(s) \geqslant 1$ pour tout $s \in X$. Soit l une forme linéaire positive sur Y.*

l s'étend en une forme linéaire positive sur $B(X)$.

Démonstration. Posons $p(x) = \inf\{l(y), x \leqslant y\}$ en posant $x \leqslant y$ ssi pour tout $s \in X$, $x(s) \leqslant y(s)$.

p est bien définie car pour tout $x \in B(X)$, il existe $c = \sup\limits_X |x|$ tel que $|x| \leqslant cy_0$.

Pour tout $y \in B(X)$ tel que $x \leqslant y$, on a $-cy_0 \leqslant x \leqslant y$ donc $-cl(y_0) \leqslant l(x) \leqslant l(y)$ car $l \geqslant 0$. Ainsi, $p(x)$ est bien défini.

De plus p est positivement homogène et sous-additive et si $x \in Y$, $l(x) = p(x)$. Par Hahn-Banach, l se prolonge en une forme linéaire sur $B(X)$, $l(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in B(X)$. De plus l est positive. ■

ϕ_y est une forme linéaire positive sur $\widetilde{L}$, $1 \in \widetilde{L}$ donc ϕ_u se prolonge en une forme linéaire positive sur $C(\overline{K_e})$.

$\overline{K_e}$ est compact donc par Riesz, il existe m_u mesure borélienne sur $\overline{K_e}$ positive telle que $\phi_u(f) = \int_{\overline{K_e}} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_u(\lambda)$ pour tout $f \in C(\overline{K_e})$.

Par construction de ϕ_u, pour tout $l \in E'$ et $f = l|_{K_e}$, on a

$$l(u) = \phi_u(f) = \int_{\overline{K_e}} f(\lambda)\,\mathrm{d}m_u(\lambda) = \int_{\overline{K_e}} l(\lambda)\,\mathrm{d}m_u(\lambda)$$

De plus, $1 = \phi_u(f_0) = \int_{\overline{K_e}} \mathrm{d}m_u(\lambda) = m_u(\overline{K_e})$ donc m_u est une probabilité. ■

5.3 Exemples et caractérisations des evtlc

On prend un ev E et $(p_i)_i$ une famille de semi-normes. On considère E muni de la topologie la moins fine rendant continue les p_i. Une base de voisinage ouverts de 0 est donnée par

$$U_{\varepsilon,J} = \{x \in E, \forall j \in J p_j(x) < \varepsilon\}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $J \subset I$ finie.

Exemple 5.4 Dans le cas de la topologie faible, $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$ pour tout $\varphi \in E'$.

Lemme 5.12.1
Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, \lambda) \mapsto \lambda x$ sont continues et si pour tout $x \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$ alors la topologie est séparée.

Exemple 5.5 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, on considère $C^0(\Omega)$ et pour tout K compact inclus dans Ω, on pose $p_K(x) = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$ et on munit $C^0(\Omega)$ de la topologie définie par les p_K.

La convergence pour cette topologie est équivalente à la convergence sur tout compact.

De même, on peut munir $C^k(\Omega) = \{f \in C^0(\Omega), \partial^\alpha f \in C(\Omega) \forall |\alpha| \leqslant k\}$ d'une topologie d'evtlc pour les semi-normes $p_K = \sup\limits_{x \in K, |\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha f|$ (convergence pour cette topologie ssi toutes les dérivées partielles convergent uniformément sur tout compact.

$C^\infty(\Omega)$ est muni d'une topologie d'evtlc avec la famille de semi-normes $(p_{K,k})_{K,k}$.

À chaque fois, on peut définir la topologie par une famile dénombrable de semi-normes.

<u>Définition 5.9</u> On définit l'espace de Schwarz par

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall k, \alpha, (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha f(x)| \text{ borné}\}$$

On peut le munir d'une topologie d'evtlc par $p_{k,m}(f) = \sup_{x, |\alpha| \leqslant m} |(1 + |x|^2)^k \partial^{x=\alpha} f(x)|$.

Proposition 5.6 E est un evtlc séparé ss'il existe $(p_i)_{i \in I}$ famille de semi-normes définissant la topologie.

Démonstration. Soit E un evtlc, il existe U_i ouvert convexes (symétriques quitte à considérer $U_i \cup -U_i$) base de voisinage de 0.

Pour tout i, on considère p_i les jauges des U_i. La topologie engendrée par les p_i est exactement celle engendrée par les U_i ($U_i = \{x, p_i(x) < 1\}$). ∎

Remarque 5.8 Riesz reste vrai pour les evtlc : E est de dimension fini ss'il est localement compact.

5.4 Formes linéaires et dualité

Définition 5.10 Soit E un evt, $A \subset E$. A est dit bornée ssi pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tek que $A \subset \lambda V$.

Remarque 5.9 On peut toujours supposer que la topologie est définie par $(p_i)_{i\in I}$. $\mathcal{V}(0)$ est alors engendré par les $U_{\varepsilon,J} = \{x \in E, |p_j(x)| < \varepsilon \forall j \in J\}$ pour $J \subset I$ fini et $\varepsilon > 0$.

A est bornée ssi pour tout $\varepsilon > 0$ et $J \subset I$ finie, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $A \subset \lambda U_{\varepsilon,j}$.

Ceci est équivalent à $\forall \varepsilon, J$; il existe $\lambda \neq 0$ tel que $p_j(\frac{x}{\lambda}) < \varepsilon$ pour $j \in J$ et $x \in A$, ou encore à

$$\forall J \subset I \text{ finie }, \exists M, p_j(x) \leqslant M \forall x \in A, j \in J$$

Donc A est bornée ssi l'est pour tout les p_i.

Application : $A = (f_n)_n$ suite de fonctions continues.

A est bornée dans $C^0(\Omega)$ ssi pour tout $K \subset \Omega$ relativement compact, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_K(f_n) \leqslant M$.

Proposition 5.7 Soit E evtlc, L une forme linéaire.

L est continue ssi il existe un voisinage V de 0 tel que $L(V)$ est borné.

Démonstration. Si L est continue, $V = L^{-1}(]-1,1[)$ est un voisinage de 0 et $L(V)$ est borné.

Réciproquement, s'il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $L(V)$ est borné, il existe $M > 0$ tel que $L(V) \subset]-M, M[$. Par homogénéité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que $L(\delta V) \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Par définition de la topologie d'evtlc, $\delta V \in \mathcal{V}(0)$, donc L est continue en 0. ■

Remarque 5.10 Dans le cas où E est un evn, la conséquence de la proposition est L est continue ssi elle est lipschitzienne en 0.

Corollaire 5.1 *Soit E evtlc, $(p_i)_i$ famille de semi-normes qui définit la topologie et L forme linéaire.*

L est continue ss'il existe M et $J \subset I$ finie telle que $|L(x)| \leqslant M \sup_{j\in J} p_j(x)$ pour tout $x \in E$.

Exemple 5.6 Pour $C(\Omega)$, $L : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ linéaire.

L est continue ssi il existe $M > 0$ et K compact de Ω tel qie $|L(f)| \leqslant M p_K(f)$ pour tout $f \in C(\Omega)$.

Démonstration. L est continue ss'il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $L(V) \subset]-M, M[$. $V \in \mathcal{V}(0)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ et $J \subset I$ finie tel que $U_{\varepsilon,J} \subset V$.

Donc $L(U_{\varepsilon,J}) \subset]-M, M[$ Pour conclure, pour tout $x \in E$, $\frac{x}{2\varepsilon \sup\limits_{j\in J} p_j(x)} \in U_{\varepsilon,J}$ par homogénéité donc

$$\left| L\left(\frac{x}{2\varepsilon \sup_{j\in J} p_j(x)} \right) \right| \leqslant M$$

Donc $|L(x)| \leqslant 2\varepsilon M \sup p_j(x)$.

Pour l'autre sens, on a que si $x \in U_{\varepsilon,J} \in \mathcal{V}(0)$, on a $|L(x)| \leqslant M\varepsilon$. ■

<u>Définition 5.11</u> Soit E un evtlc, E' les formes linéaires continues sur E. On définit la topologie faible $*$ sur E' comme la topologie la moins fine sur E' qui rend continues les évaluations.

<u>Théorème 5.13</u> Banach-Alaoglu *Soit E un evt, U un voisinage ouvert convexe équilibré (ie $\lambda U \subset U$ pour $|\lambda| < 1$).*

On pose $K_U = \{\varphi \in E', |\varphi(x)| \leqslant 1 \forall x \in U\}$. C'est un compact pour la topologie faible $*$.

Démonstration. Soit p la jauge de U. Pour tout $\varphi \in K_U$, $|\varphi(x)| \leqslant 2p(x)$. On a donc $K_U \subset \prod\limits_{x\in E} [-2p(x), 2p(x)]$ (compact par Tychonov).

On montre que sur K_U la topologie produit est égale à la topologie faible $*$ et $\overline{K_U} \subset E'$. (cf preuve de Banach Alaoglu d'avant). ■

5.5 Complétude

<u>Définition 5.12</u> Suite de Cauchy Soit E un evt, $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que x_n est de Cauchy ssi $x_n - x_m$ tend vers 0 quand $n, m \to \infty$, c'est à dire :

$$\forall V \in \mathcal{V}(0), \exists N, \forall n, m \geqslant N, x_n - x_m \in V$$

<u>Définition 5.13</u> E evtlc est complet ssi toute suite de Cauchy converge.

Proposition 5.8 Soit E un evt complet. Si la topologie est définie par une métrique d invariante par translation alors (E, d) est complet.

Exemple 5.7 $C(\Omega), C^k(\Omega)$, $S(\mathbb{R}^n)$ dont des evtlc complets. Par exemple pour $C(\Omega)$, on prend une suite f_n de Cauchy pour $C(\Omega)$.

Elle est de Cauchy sur chaque $C(K)$ avec $K \subset \Omega$ compact donc si $\Omega = \bigcup_l K_l$ (croissante), on a $f_n \to f^l$ sur chaque K_l uniformément. On a $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1}$ donc $f^{l+1}|_{K_l}$.

On pose alors pour tout $x \in \Omega$, $f(x) = f^l(x)$ si $x \in K_l$ qui est bien définie et continue sur Ω. Comme il y a cvu sur tous les K_l, on a la cvu dans $C(\Omega)$.

Définition 5.14 On appelle espace de Fréchet tout evtlc complet métrisable avec une distance invariante par translation.

Remarque 5.11 Si E est un Fréchet, on remarque que E est à base de voisinage dénombrable puisque E est métrique.

Proposition 5.9 Si E est un Fréchet alors la topologie de E est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes $(p_n)_n$.

Démonstration. Il existe une base de voisinages ouverts convexes symétriques dénombrable de 0 U_n. On prend p_n la jauge de U_n. ∎

Remarque 5.12 Si E est un Fréchet, E est une métrique complet donc de Baire. Ainsi, le théorèmes de Banach se généralisent aux Fréchets.

THÉORÈME 5.14 BANACH-STEINHAUS *Soit E un Fréchet avec une topologie engendrée par les semi-normes $(p_n)_n$, F un evtlc avec une topologie engendrée par une famille Q de semi-normes.*

Soit $\varphi_i \in L_c(E, F)$. Si pour tout $q \in Q$ et $x \in E$, $\sup_i q(\varphi_i(x)) < \infty$ alors pour tout $q \in Q$, il existe J finie et $c > 0$ tel que $\sup_i q(\varphi_i(x)) \leqslant c \sup_{n\in J} p_n(x)$.

Exemple 5.8 Dans le cas particulier $F = \mathbb{R}$, on sait que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ (bornitude ponctuelle) et la conclusion est $|\varphi(x)| \leqslant c \sup_{k\in J} p_k(x)$, ce qui équivaut à φ continue.

Lemme 5.14.1
Soit $L : E \to F$ linéaire avec E, F evtlc avec des topologies définies par P et Q, familles de semi-normes.

Alors L est continue ssi pour tout $q \in Q$, il existe $c > 0$ et $P' \subset P$ finie tel que $q(Lx) \leqslant \sup_{p\in P'} p(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. L est continue ssi pour tout $q \in Q$, $q \circ L$ l'est. Or $q \circ L$ est homogène et on a $q \circ L$ continue en 0 ssi $q \circ L$ est bornées ssi le résultat puisqu'on a maintenant une forme linéaire. ∎

Démonstration du théorème. On pose $A_n = \{x \in E, q(\varphi_i(x)) \leqslant n, \forall i \in I\}$.

A_n est fermé puisque q et φ_i sont continues et l'hypothèse donne $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Par Baire, il existe n_0 tel que $\overset{\circ}{A_{n_0}} \neq \varnothing$. On prend x dedans. Il existe U voisinage de 0 tel que $x + U \subset A_{n_0}$. On a alors $q(\varphi_i(x+y)) \leqslant n_0$ pour $i \in I$, $y \in I$ donc $q(\varphi_i(y)) \leqslant c$.

$U \in \mathcal{V}(0)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ et $P' \subset P$ finie tel que $\{x, p(x) < \varepsilon, \forall p \in P'\} \subset U$.

Par homogénéité, pour tout $x \in E$, $\frac{\varepsilon x}{2 \sup_{p\in P'} p(x)} \in U$ donc $q(\varphi_i(x)) \leqslant 2c \sup_{p\in P'} p(x)$ pour tout $x \in E$. ■

5.6 Limites inductives de topologies

On veut munir $C_c(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ d'une topologie avec de bonnes propriétés. On ne sait pas encore le faire car $C_c(\Omega)$ n'est pas fermé dans $C(\Omega)$ pour la topologie de $C(\Omega)$.

On a déjà vu que $C^\infty(\Omega)$ est une espace de Fréchet. Si $T \in (C^\infty(\Omega))'$, il existe K, k et M tel que pour tout $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant M p_{K,k}(\varphi)$.

$(C^\infty(\Omega))'$ ne contient pas L^1_{loc}. Soit T tel que $\langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi$ avec $f \in L^1_{\text{loc}}$. Si le support de f n'est pas compact alors $T \notin (C^\infty(\Omega))'$.

Le bon espace à considérer est $C_c^\infty(\Omega)'$.

5.6.1 Principe général

Soit E un ev qui s'écrit comme réunion de E_i evtlc. On a vu que la topologie τ_i sur E_i est engendrée par une famille de semi-normes $(p_j^i)_{j\in J_i}$.

Définition 5.15 On appelle topologie limite inductive des (E_i, τ_i) la topologie la plus fine d'evtlc sur E tel que pour tout $i \in I$, l'injection canonique $\mathcal{I} : E_i \hookrightarrow E$ soit continue.

Proposition 5.10 Soit τ la topologie ci-dessus. τ est la topologie engendrée par la famille des semi-normes $P = \{p, p|_{E_i}$ continue pour tout $i\}$.

Démonstration. Soit $\tilde{\tau}$ la topologie sur E engendrée par P. $(E, \tilde{\tau})$ est bien un evtl (cf caractérisation des evtlc).

Soit $i \in I$. On veut montrer que $\mathcal{I}$ est continue pour tout i. Par définition de $\tilde{\tau}$, $\mathcal{I}$ est continue ssi $p \circ \mathcal{I}$ est continue pour tout $p \in P$. Mais $p \circ \mathcal{I} = p|_{E_i}$ donc $p \circ \mathcal{I}$ est continue. Ainsi, $\tilde{\tau} \subset \tau$.

Reciproquement, soit τ' une topologie d'evtlc sur E telle que $\mathcal{I}$ est continue.

Soit Q une famille de semi-normes définissant cette topologie sur E. Pour tout $q \in Q$, q est continue pour cette topologie donc $q \circ \mathcal{I} = q|_{E_i}$ est continue comme composée d'applicaitons continues. Donc $q \in P$. Alors $\tau' \subset \tilde{\tau}$ donc $\tau \subset \tilde{\tau}$ et on a bien l'égalité des topologies. ■

Proposition 5.11 Soit $T : E \to F$ linéaire avec F un evtlc et E la limite inductive des (E_i, τ_i).

T est continue ssi $T|_{E_i}$ est continue pour tout i.

Démonstration. Si T est continue, $T|_{E_i} = T \circ \mathcal{I}$ est donc continue.

Pour montrer que T est continue, il suffit de montrer que $q \circ T$ est continue pour tout $q \in Q$ avec Q une famille de semi-normes engendrant la topologie de F.

Alors $q \circ T|_{E_i}$ est une semi-normes sur E continue donc $q \in P$ donc T est continue. ■

Corollaire 5.2 *Soit T une forme linéaire sur E.*

T est continue ssi $T|_{E_i}$ est continue pour tout t ssi pour tout i, il existe M et $J_i \subset P_i$ finie telle que $|T(x)| \leqslant M \sup_{j \in J_i} p_j^i(x)$ pour tout $x \in E_i$.

À partir de maintenant, on suppose que les E_k sont inclus et fermés dans E_{k+1} et $\tau_{k+1}|_{E_k} = \tau_k$.

Proposition 5.12

1. Si U est un convexe symétrique non vide tel que $U \cap E_k \in \tau_k$ alors U est un voisinage de 0 pour (E, τ).
2. $\tau|_{E_k} = \tau_k$ pour tout k
3. Si chaque (E_k, τ_k) est séparé alors (E, τ) l'est.
4. E_k est fermé dans (E, τ)

Démonstration.

1. Pour tout k, $U \cap E_k$ est un voisinage de 0 pour τ_k. Il existe U_k ouvert convexe de E_k contenant 0 tel que $U_k \subset U \cap E_k$. donc $j_U|_{E_k} = j_{U \cap E_k} \leqslant j_{U_k}$ avec j_V la jauge associée V.
   Donc $j_U|_{E_k}$ est continue pour tout k donc $j_U \in P$. Mias $\{x, j_U(x) < 1\}$ est un ouvert inclus dans U donc U est un voisinage de 0 dans E.
2. Soit $V \in \tau|_{E_k}$. il existe $U \in \tau$ tel que $V = U \cap E_k$. Mais $U \cap E_k = (\mathcal{I}|_{E_k})^{-1}(U)$ donc $U \cap E_k \in \tau_k$.
   Réciproquement, Si $U_k \in \tau_k$, on veut montrer qu'il existe $U \in \tau$ tel que $U_k = U_c ap E_k$. On peut supposer V ouvert convecte contenant 0.

Lemme 5.14.2
Soit E un evtlc contenant F, U un ouvert convexe de F. Il existe C ouvert convexe tel que $U = C \cap F$.

Démonstration. Soit U ouvert convexe de F contenant 0. Il existe V ouvert de E tel que $U = V \cap F$.

E est un evtlc donc il existe un ouvert W convexe contenant 0 tel que $W \subset V$. On pose $C = \bigcup_{t\in[0,1]} (tW + (1-t)U)$. On vérifie que C est ouvert convexe et que $C \cap F = U$. ■

En utilisant le lemme, on montre par récurrence, qu'il existe une suite $(U_{k+l})_l$ croissante d'ouverts convexes tels que $U_{k+l} \subset E_{k+l}$ et $U_k = U_{k+l} \cap E_l$. En posant U la réunion des U_{k+1}, U est ouvert convexe et $U \cap E_k = U_k$.

3. Soit $x \neq 0$. Il existe k tel que $x \in E_k$. τ_k est séparée donc il existe U_k voisinage de 0 tel que $x \notin U_k$.

   On pose U l'union des U_{k+l} (la même suite qu'au-dessus). U est un ouvert de E qui ne contient pas x.
4. On montre que E_k^c est ouvert. SOit $x \notin E_k$. E_k est fermé dans E_k avec $m > k$ tel que $x \in E_m$.

   Il existe un voisinage U_k de 0 dans E_m tel que $(x + U_m) \cap E_k = \varnothing$. On construit une suite U_{m+l} comme précédemment et on pose encore U l'union des U_{m+l}. Alors $(x + U) \cap E_k = \varnothing$ et U est un voisinage de 0. ■

5.6.2 Convergence

<u>Théorème 5.15</u> *Soit $x_n \in E$. $x_n \to x$ dans E ssi il existe k tel que pour tout n, $x_n \in E_k$, $x \in E_k$ et $x_n \to x$ dans E_k.*

Démonstration. $\Leftarrow$ est évident. Dans l'autre sens, si $x_n \to x$ dans E, on montre d'abord qu'il existe k tel que $x_n \in E_k$. Par l'absurde, il existe k_l, n_l telles que $x_{n_l} \in E_{k_l+1} \setminus E_{k_l}$.

E_{k_l} est fermé et par le théorème de séparation, il existe $T_l \in E'$ tel que $T_l|_{E_{k_l}} = 0$ et $T_l(x_{n_l}) \neq 0$. Soit

$$p(x) = \sum_{l=1}^{\infty} l \frac{|T_l(x)|}{|T_l(x_{n_l})|}$$

On a qu'un nombre fini de termes non nuls donc la somme est bien définie. Pour tout l, T_l est linéaire donc p_l est une semi-norme. q est continue sur E

donc $p \in P$. Comme $x_n \to x \in E$, $(p(x_n))_n$ est bornée. Or on a $p(x_{n_l}) \geqslant l \to +\infty$, ce qui est absurde. Ainsi, $x_n \in E_k$ pour tout n.

Comme $\tau_k = \tau|_{E_k}$, $x_n \to x$ dans E_k. ∎

Proposition 5.13 Si (E_k, τ_k) est complet pour tout k alors (E, τ) est complet.

Démonstration. Soit x_n de Cauchy dans (E, τ). On remarque que pour tout $p \in P$, $p(x_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge. Par le même raisonnement, il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout n. Donc x_n de Cauchy dans E_k donc converge dans E_k donc dans E. ∎

Si (E_k, τ_k) sont des Fréchets, est-ce que (E, τ) est de Fréchet ? Ceci revient à considérer la métrisabilité de τ.

Proposition 5.14 Une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet n'est pas métrisable.

Démonstration. Si (E, τ) est métrisable, c'est un espace de Baire. Si on l'écrit comme l'union des E_k (qui sont fermés). Les E_k sont d'intérieur vide, donc on contredit le théorème de Baire. ∎

Proposition 5.15 Soient (E_k, τ_k) des espaces de Fréchet et $T \in E^*$. $T \in E'$ ssi R est séquentiellement continue ie pour tout $x_n \to 0$, $Tx_n \to 0$ dans E.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Évident

$\Leftarrow$ Supposons que T est séquentiellement continue. On a vu que T est continu ssi $T|_{E_k}$ est continu. Pour tout k, E_k est un Fréchet donc métrisable donc $T|_{E_k}$ est continu ssi il l'est séquentiellement. ∎

5.6.3 Topologie de $C_c^\infty(\Omega)$ et distributions

On a $C_c^\infty = \bigcup\limits_{K \subset\subset \Omega} C_K^\infty(\Omega)$ (et l'union peut être prise sur un esemble dénombrable de compacts).

C_K^∞ est un espace de Fréchet pour la topologie engendrée par les semi-normes $(p_{k,K})_k$ (vu précédemment).

On munit alors $C_c^\infty(\Omega)$ de la topologie limite inductive.

Proposition 5.16

- $C_c^\infty(\Omega)$ est complet pour cette topologie
- $\varphi_n \to \varphi$ dans $C_c^\infty(\Omega$ ss'il existe K relativement compact dans Ω tel que $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pour tout n et $\varphi_n \to \varphi$ dans $C_K^\infty(\Omega)$. C'est-à-dire que teoutes les dérivées de φ_n cvu sur K vers celles de φ.

On note $D'(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))'$.

Proposition 5.17 $T \in D'(\Omega)$ ssi T est linéaire et $T|_{C_K^\infty(\Omega)}$ est continue pour tout K ssi T est linéaire et pour tout $\varphi_n \to 0$ dans $C_c^\infty(\Omega)$, $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$.

Ceci est équivalent à T est linéaire et

$$\forall K \subset\subset \Omega, \exists M, k, \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega), |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M p_{K,k}(\varphi)$$

Exemple 5.9 $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset D'(\Omega)$ et $\delta_0 \in D'(\mathbb{R}^n)$.

