Équations aux dérivées partielles elliptiques

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Équations aux dérivées partielles

Une EDP est une équations dont l'inconnue est une fonction et fait intervenir les dérivées partielles de cette fonction. L'ordre de l'EDP est l'ordre maximal de dérivation de la fonction. En première approche, on peut classifier les EDP en trois grandes familles :

- les EDP elliptiques, dont le prototype est l'équation de Laplace : $f = -\nabla u$.
- les EDP hyperboliques, dont les prototypes sont l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

  et l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta u$$

- les EDP paraboliques, dont le prototype est l'équation de la chaleur

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

1.2 Un peu de modélisation

L'équation type qui va nous intéresser est l'équation de Laplace dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Cette équation ne sera jamais examinée seule (sinon on n'a aucune chance d'avoir l'unicité) mais on lui adjoindra une condition aux limités au bord $\partial\Omega$ de Ω.

La condition $u = u_0$ sur $\partial\Omega$ s'appelle condition de Dirichlet. Si $u_0 = 0$, on dit qu'on impose la condition de Dirichlet homogène.

La condition aux limites $\frac{\partial u}{\partial \nu} = u_1$ où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i$ et $\nu(x)$ est le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$ s'appelle condition de Von Neumann.

Du point de vue de la modélisation les EDPE décrivent des phénomènes stationnaires, des situations d'équilibres indépendantes du temps.

En thermique, pour décrire la température à l'équilibre dans un corps Ω thermiquement conducteur, $f = -\Delta u$ avec $u = u_0$ sur $\partial\Omega$. Ici, u désigne la température, f les sources et u_0 les thermostats au bord.

Si on pose une condition de Neumann, c'est le flux de chaleur qu'on fixe. Si on la fixe à 0, le flux est nul signifiant une isolation parfaite.

En mécanique du solide, l'équation de Laplace intervient pour modéliser la position d'équilibre d'une membrane élastique. Si $n = 2$ u désigne le déplacement vertical de la membrane. f désigne les forces verticales exercées sur la membrane et u_0 représente le fait que la membrane est fixée au bord.

En mécanique des fluides, u désigne la fonction courant ou le potentiel des vitesses.

En électrostatique, u désigne le potentiel, f la densité des charges, la condition de Dirichlet décrit une interface avec un conducteur parfait et la condition de Neumann un champ électrique dont la composante normale est imposée.

Un modèle plus généraliste consiste à remplacer le Laplacien par une somme de dérivées partielles secondes : $Lu = f$ où

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f$$

où les fonctions $a_{i,j}$ sont données, avec des conditions aux limites.

Définition 1.1 L'équation précédente est dire (uniformément) elliptique dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ssi il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \left\|\xi\right\|_2^2$$

Exemple 1.1 Avec $L = -\Delta$, on a $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ donc clairement cœrcif.

Si $Lu = -\Delta u - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \left\|\xi\right\|_2^2 + \varepsilon \xi_1 \xi_2$$

avec $(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \left\|\xi\right\|_2^2 \leqslant |\xi_1\xi_2| \leqslant \frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}$. Donc on garde une équation elliptique pour $\varepsilon < 2$.

1.3 Un exemple simple

1.3.1 Sans terme d'ordre 0

On se place en dimension 1, on prend $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'inconnue, $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la donnée et on considère

$$f = -u'' \text{ avec } u(0) = u(1) = 0$$

Proposition 1.1 Cette équation admet une unique solution C^2 donnée par

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y \text{ où } G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant x \\ x(1-y) & \text{sinon} \end{cases}$$

est la fonction de Green.

Démonstration. Pour l'existence on vérifie que ça marche. Soient u_1 et u_2 deux solutions. Posons $v = u_1 - u_2$.

On a $v'' = 0$ donc $v(x) = ax + b$ donc $a = b = 0$ et $u_1 = u_2$. ■

De cette expression, on peut tirer plusieurs propriétés qualitatives :

- La solution dépend de façon continue de f. (On peut majorer la norme de $f \mapsto u$ (linéaire) par $\frac{7}{2}$)
- Principe du maximum faible : si $f \geqslant 0$ alors $u \geqslant 0$.
- Principe du maximum fort : si $f \geqslant 0$ et $f \neq 0$ alors $u > 0$.

Ces propriétés sont en fait très générales pour les problèmes elliptiques. On ne disposera que très rarement d'une formule explicite pour les montrer.

1.3.2 Méthode de tir

On veut résoudre

$$f = -u'' + bu$$

avec $u(0) = u(1) = 0$.

Proposition 1.2 On suppose f et b continues avec $b \geqslant 0$. Il existe une unique solution.

On va résoudre le problème annexe donné en remplaçant $u(1) = 0$ par $u'(0) = \alpha$. Par Cauchy-Lipschitz, on a une unique solution pour tout α.

Lemme 1.0.1
u_α est solution du système de départ ssi $u_\alpha(1) = 0$. L'application $\alpha \to u_\alpha(x)$ est continue et strictement croissante. De plus

$$u_\beta(x) \geqslant u_\alpha(x) + (\beta - \alpha)x$$

Démonstration. On a $u''_\beta - u''_\alpha = b(u_\beta - u_\alpha)$, $u_\beta(0) - u_\alpha(0) = 0$ et $u'_\beta(0) - u'_\alpha(0) = \beta - \alpha > 0$.

La fonction $u_\beta - u_\alpha$ est positive dans un voisinage de 0 épointé. Comme $b \geqslant 0$, $u''_\beta - u''_\alpha \geqslant 0$ donc $u'_\beta - u'_\alpha \geqslant \beta - \alpha > 0$ et on a le résultat.

La continuité découle des théorèmes de continuité d'une solution d'une équation à paramètres. ∎

Corollaire 1.1 *Il existe un unique α tel que $u_\alpha(1) = 0$ et donc notre problème admet une unique solution $u \in C^2([0,1])$.*

Démonstration. $\alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est continue strictement croissante avec l'inégalité, on trouve

$$u_\beta(1) \geqslant u_0(0) + \beta \text{ pour } \alpha = 0$$

$$u_\alpha(1) \leqslant u_0(1) + \alpha \text{ pour } \beta = 0$$

Donc $\lim\limits_{\beta \to \pm\infty} u_\beta(1) = \pm\infty$ donc $\alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

0 admet donc un unique antécédent. ∎

Remarque 1.1

- *Pour ce problème elliptique en dimension 1, on n'a pas besoin de méthodes sophistiquées, les théorèmes classiques d'EDO suffisent.*
- *La méthode en paramétrant le problème par $u'(0)$ (dite méthode de tir) fournit une méthode numérique de calcul d'une approximation de la solution implémentable sur ordinateur.*
- *La méthode ne se généralise pas à la dimension supérieure. On a utilisé ici que le problème de Cauchy était bien posé.*

Exemple 1.2 Problème mal posé On considère $-\Delta u = 0$ sur $\Omega =]0, \pi[^2$ avec $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = u_1(x,0)$.

Il n'existe pas d'application $(u_0, u_1) \mapsto u$ continue.

Prenons (au hasard !) $u_0(x) = \sin(kx)$ et $u_1(x) = 0$ avec $k \in \mathbb{N}$. Le problème admet une unique solution de la forme $u(x,y) = A(y)B(x)$.

Les conditions initiales en $y = 0$ permettent de prendre $B(x) = \sin(kx)$, $A(0) = 1$ et $A'(0) = 0$. On trouve alors $A(y) = \mathrm{ch}(ky)$ et enfin

$$u(x,y) = \mathrm{ch}(ky)\sin(kx)$$

On a donc une application $\Phi : u_0, u_1 \to u$ qui est linéaire et elle est continue ssi il existe $c > 0$ tel que $\|u\| \leqslant c\,\|u_0\|$.

Or $\|u_0\| = 1$ et $\|u\| = \mathrm{ch}(k\pi) \to \infty$. Le problème est donc mal posé.

En conséquence, il existera des suites u_0^n qui convergent ettelles que $\Phi(u_0^n)$ ne convergent pas et même des données initiales pour lesquelles le problème n'a pas de solution. Par exemple, soit $u_0(x) = x(\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ avec cvn. On aurait donc $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \operatorname{ch}(ky)$ mais ça ne converge pas.

Définition 1.2 Un problème est dit bien posé au sens de Hadamrd ssi il admet une unqiue solution qui dépend continûment de ses paramètres.

1.3.3 Vers la formulation variationnelle

Montrons directement la propriété d'unicité de la solution. Supposons en avoir deux : u_1 et u_2. $u := u_1 - u_2$ est solution de

$$-u'' + bu = 0, u(0) = 0, u(1) = 0$$

On a

$$0 = \int_0^1 u(x)(b(x)u(x) - u''(x)) \,\mathrm{d}x$$

Or, par IPP,

$$-\int_0^1 u''(x)u(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x + 0$$

Ainsi

$$\int_0^1 ((u'(x))^2 + b(x)u(x)^2) \,\mathrm{d}x = 0$$

et l'intégrade est positive donc $u'(x) = 0$ donc $u = \mathit{cste} = 0$. Ainsi $u_1 = u_2$.

En poussant plus loin la méthode, on peut en faire un théorème d'existence.

On cherche u solution de $-u'' + bu = f$ avec $u \in V$ où

$$V = \{v \in C^2([0,1]), u(0) = u(1) = 0\}$$

. On cherche une formulation faible de l'équation. Si $v \in V$, on a $(-u'' + bu)v = fv$ donc en intégrant et par IPP,

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) \,\mathrm{d}x + \int_0^1 b(x)u(x)v(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 v(x)f(x) \,\mathrm{d}x$$

Les deux formulations sont équivalents (il suffit de remonter les calculs).

Or cette équation est de la forme : trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$, $a(u,v) = l(v)$ où $a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 buv$ et $l(v) = \int_0^1 vf$. On l'appelle formulation variationnelle.

<u>THÉORÈME 1.1</u> LAX-MILGRAM *Soit V un Hilbert, a une forme bilinéaire continue, l une forme linéaire continue.*

Sous l'hypothèse de cœrcivité : $\exists c_0 > 0, \forall u \in V, a(u,u) \geqslant c_0 \|u\|^2$, il existe un unique u tel que pour tout v, $a(u,v) = l(v)$.

Ce théorème permettrait presque de conclure sauf qu'on n'est pas dans un Hilbert. On voudrait donc se placer dans H^1. Mais sur un tel espace il faut pouvoir parler de dérivée seconde.

- Soit on prend un espace le plus régulier possible
- Soit on prend un espace de fonctions moins régulières qui soit un espace de Hilbert

On va étudier dans le prochain chapitre les espaces de Sobolev et le distributions.

Chapitre 2

Espaces de Sobolev et distributions

2.1 Éléments de distributions

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 Fonctions tests Soit Ω un ouvert et $D(\Omega)$ l'ensemble des fonctions qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ de support compact inclus dans Ω.

On notera $D(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ d'éléments de $D(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.1 La fonction $\theta(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $\theta_n(x) = \theta(1 - \|x\|^2)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2 On dit que θ_ε est une famille régularisante ssi $\mathrm{supp}(\theta_\varepsilon) \subset \overline{B(0,\varepsilon)}$, $\theta_\varepsilon \geqslant 0$, $\int \theta_\varepsilon = 1$ et $\theta_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.1

- Soit $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\theta_\varepsilon * u \in D(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_\varepsilon * u \to u$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$.
- Soit $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $\theta_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
  De plus, si $p < \infty$, $\theta_\varepsilon * u \to u$ dans L^p. Si $\mathrm{supp}(u)$ est compact, $\theta_\varepsilon * u \in D(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.3 On dit que u est une distribution sur Ω si u est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$, au sens où pour tout K compact, il existe k_K et une constante C_K telle que pour tout $\varphi \in B(\Omega)$ avec $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, on a

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C_K \max_{|\alpha| \leqslant k_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$$

On note $D'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributuons sur Ω.

Remarque 2.1 Dans la plupart des exemples qu'on rencontrera, l'entier k_K peut être pris indépendamment du compact K. Dans une telle situation, on dira que a distribution est d'ordre fini. La plus petite valeur de k qui convient est l'ordre de la distribution.

2.1.2 Exemples importants

Les fonctions f localement intégrables définissent une distribution d'ordre 0 par $\varphi \mapsto \int f\varphi$.

Les masses de Dirac sont des distributions d'ordre 0.

Lemme 2.0.1
$D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Si $u \in D'(\Omega)$, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $\varphi \in D(\Omega)$; $\langle u, \varphi\rangle \leqslant c\, \|\varphi\|_2$.

Grâce au lemme, on peut prolonger uniquement le forme linéaire u en une forme linéaire continue $\widetilde{u}$ sur L^2.

Par Riesz, il existe une unique $f \in L^2$ tel que $\widetilde{u}(g) = \int fg$ pour tout $g \in L^2$. EN particulier, pour tout $g \in D(\Omega)$, $\langle u, g\rangle = \widetilde{u}(g)$.

Plus généralement, si $u \in D'(\Omega)$ telle que

$$\exists c > 0, \forall \varphi \in D(\Omega), |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant c\, \|\varphi\|_p$$

avec $1 \leqslant p < \infty$. Alors on peut identifier u à une fonction de $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

C'est faux pour $p = \infty$, il suffit de prendre par exemple la masse de Dirac.

2.1.3 Convergence

Définition 2.4 On dit qu'une suite de distributions u_n converge vers u ssi pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$$

On notera $u_n \rightharpoonup u$.

Remarque 2.2 On a nécessairement unicité de la limite dans $D'(\Omega)$.

Proposition 2.2 Si $f_n \to f$ dans L^1 alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $D'(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\left|\int f_n\varphi - \int f\varphi\right| = \left|\int (f_n - f)\varphi\right| \leqslant \int |f_n - f||\varphi| \leqslant \|f_n - f\|_1 \|\varphi\|_\infty \to 0 \quad \blacksquare$$

Proposition 2.3 Si $f_n \to f$ dans L^2 alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $D'(\Omega)$.

Démonstration. Par Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int (f-f_n)\varphi\right| \leqslant \|f_n - f\|_2 \, \|\varphi\|_2$$

■

Proposition 2.4 Toute suite régularisante converge vers δ_0 dans $D'(\Omega)$.

2.1.4 Dérivation des distributions

Définition 2.5 Soit $u \in D'(\Omega)$. On note $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

De même, si α est un multientier, on note $\partial^\alpha u$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle$$

Proposition 2.5 Si $f \in C^1(\Omega)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coïncide avec la dérivée de f au sens usuel.

La dérivation est une opération continue sur $D'(\Omega)$ au sens où su $u_n \rightharpoonup u$ alors $\partial^\alpha u_n \rightharpoonup \partial^\alpha u$.

Démonstration. Soit $f \in C^1(\Omega)$, notons provisoirement $\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ la dérivée partielle de f dans $D'(\Omega)$. et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée partielle usuelle.

On montre que pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\left\langle \widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi$$

On a

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= -\int_{x'} \int_{x_i = a(x')}^{b(x')} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_i \rangle \,\mathrm{d}x' \\ &\overset{IPP}{=} \int_{x'} \int_{a(x')}^{b(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \,\mathrm{d}x_i \,\mathrm{d}x' = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Si $u_n \rightharpoonup u$, et $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\langle \partial^\alpha u_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_n, \partial^\alpha \varphi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle$$

■

Exemple 2.2 Fonction de Heaviside : $H(x) = 0$ si $x < 0$ et 1 si $x > 0$ (distribution car L^∞).

La dérivée au sens des distributions de H est δ_0. En effet, si $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

2.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

2.2.1 Définition et structure

Définition 2.6 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ ssi $u \in L^2(\Omega)$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ au sens des distributions.

On considère sur $H^1(\Omega)$ le produit scalaire :

$$(u, v) = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x$$

et la norme

$$\|u\| = \sqrt{\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2^2}$$

<u>Théorème 2.1</u> *C'est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Il suffit de montrer la complétude. Soit u_n une suite de Cauchy dans H^1.

Alors u_n est de Cauchy dans L^2 et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ aussi pour tout i donc $u_n \to u$ dans L^2. De même, pour tout i, il existe v_i tel que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to v_i$ dans L^2.

Il reste à montrer que $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. On aura alors

$$\|u_n - u\|_H^2 = \|u_n - u\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - v_i\right\|_2^2 \to 0$$

Or on sait que $u_n \to u$ dans L^2 donc dans $D'(\Omega)$ et idem pour les dérivées.

Par continuité de la dérivation des distributions, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i}$, d'où $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. ■

2.2.2 Le cas $H^1(\mathbb{R}^n)$

Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int \mathrm{e}^{-ix\xi}u(x)\,\mathrm{d}x$$

Si $u \in L^1 \cap L^2$ alors $u \in L^\infty \cap L^2$ et $\|\widehat{u}\|_2 = \|u\|_2$. Ceci permet de prolonger la définition de $\widehat{u}$ depuis $L^1 \cap L^2$ sur L^2 entier.

$\widehat{u}$ est donc bien définie sur L^2.

Définition 2.7 Définition équivalente de $H^1(\mathbb{R}^n)$

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2, \forall j, \xi_j \widehat{u} \in L^2\}$$

Démonstration. On va utiliser que pout tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ et $j \in [\![1, n]\!]$, $\widehat{\partial_{x_j}\varphi} = i\xi_j\widehat{\varphi}$. Notons $H = \{u \in L^2, \forall j, \xi_j\widehat{u} \in L^2\}$.

$H^1 \subset H$ Soit $u \in L^2$ telle que $\partial_j u \in L^2$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

$$(\widehat{\partial_j u}, \widehat{\varphi}) = (\partial_j u, \varphi) = -\langle u, \partial_j \varphi\rangle = -(\widehat{u}, \widehat{\partial_j\varphi}) = -\int \widehat{u}\overline{i\xi_j\widehat{\varphi}}\,\mathrm{d}\xi$$

Comme $\widehat{\partial_j u} \in L^2$ et $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans L^2, on peut identifier $\xi_j\widehat{u}$ avec $-i\widehat{\partial_j u}$ en tant que fonction L^2 donc $u \in H$.

$H \subset H^1$ Soit $u \in L^2$ tel que $\xi_j\widehat{u} \in L^2$. Le même calcul donne

$$\langle \partial_j u, \varphi\rangle = i(\xi_j\widehat{u}, \widehat{\varphi})$$

Par auchy-Schwarz, $|\langle\partial_j u, \varphi\rangle| \leqslant \|\xi_j\widehat{u}\|_2 \|\widehat{\varphi}\|_2$

Donc $\partial_j u \in L^2$ donc $u \in H^1$. ■

Remarque 2.3 On étend ici toutes les définitions des ditributions à valeurs réelles pour des distributions à valeurs complexes en prenant des formes sesquilinéaires.

Proposition 2.6 L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $H^1_c = \{u \in H^1, \mathrm{supp}(u) \text{ compact}\}$. Montrons que H^1_c est dense dans H^1.

Soit $X \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(x) = 1$ sur $B(0, 1]$ et nulle sur $B(0, 2[^c$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = X(\frac{x}{n})u(x)$.

On a $u_n \to u$ pp. et $|u_n(x)| \leqslant \|X\|_\infty |u(x)|$. Par convergence dominée, $u_n \to u$ dans L^2.

On a $\|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_2 + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_2$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \varphi\right\rangle &= -\left\langle u_n, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle = -\left\langle X\left(\frac{x}{n}\right)u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle = -\left\langle u, X\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, X\left(\frac{x}{n}\right)\varphi\right\rangle + \left\langle \frac{1}{n}\frac{\partial X}{\partial x_i}\left(\frac{x}{n}\right)u, \varphi\right\rangle\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}X(\frac{x}{n})\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{n}\frac{\partial X}{\partial x_i}(\frac{x}{n})u$ converge bien vers $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

On a donc bien $u_n \to u$ dans H^1.

Montrons maintenant que $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans H^1_c. Soit θ_ε une identité approchée paire à support dans $B(0,\varepsilon]$.

Soit $u_\varepsilon = \theta_\varepsilon * u \in D(\mathbb{R}^n)$. Il faut montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans H^1. On a déjà la convergence L^2 de u_ε. Il suffit de montrer que $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = \theta_\varepsilon * \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle u_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\iint \theta_\varepsilon(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int u(y)\int \theta_\varepsilon(y-x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int u(y)\frac{\partial \theta_\varepsilon * \varphi}{\partial x_i}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta_\varepsilon * \varphi \right\rangle = \left\langle \theta_\varepsilon * \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans L^2. ∎

Corollaire 2.1 *Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\|u\|^2_{H_1} = \int (1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.*

Démonstration. On procède par densité. Si $u \in H^1$, il existe $u_n \in D(\mathbb{R}^n)$ tel que $u_n \to u$ dans H^1.

$$\|u_n\|^2_{H^1} = \|u_n\|_2^2 + \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\|_2^2 = \|\widehat{u}_n\|_2^2 + \sum_{j=1}^n \|\xi_j \widehat{u_n}\|_2^2 = \int (1+|\xi|^2)|\widehat{u_n}|^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

On passe ensuite à la limite (preuve à terminer). ∎

2.2.3 L'espace $H^1_0(\Omega)$

Définition 2.8 Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on n'a pas en général la densité de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On pose donc $H^1_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ au sens de la norme H^1.

Lemme 2.1.1
$H^1(]0,1[)$ s'injecte dans $C^0([0,1])$.

Démonstration. Soit $u \in H^1(]0,1[)$. Montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour presque tout $x \in]0,1[$, $u(x) = \alpha + \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $f(x) = \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $\varphi \in D(]0,1[)$,

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle &= -\int_0^1 f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 u'(t)\int_t^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \langle u', \varphi\rangle\end{aligned}$$

Donc $f' = u'$ au sens des distributions et $f = u + cste$.

Pour presque tout x et y avec $y \leqslant x$, on a

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left|\int_y^x u'(t)\right| \leqslant \int_y^x |u'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sqrt{x-y}\sqrt{\int_y^x (u'(t))^2 \,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{x-y}\,\|u'\|_2 \end{aligned}$$

Donc u s'identifie à une fonction continue sur $[0,1]$.

Il reste à montrer que l'injection est continue. Soit $u \in H^1(]0,1[)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = u(x) - \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t$.

On a $|\alpha| \leqslant |u(x)| + \|u'\|_2$ donc $|\alpha|^2 \leqslant 2|u(x)|^2 + 2\|u\|_2^2$

$$|\alpha|^2 = \int_0^1 |\alpha|^2 \leqslant 2\|u\|_{H^1}^2$$

Donc $|\alpha| \leqslant \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1}$.

Finalement

$$|u(x)| \leqslant |\alpha| + \left|\int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |\alpha| + \|u'\|_2 \leqslant C\,\|u\|_{H^1}$$

donc l'injection est continue. ■

Remarque 2.4 En dimension 1, une fonction $u \in H^1$ a naturellement une valeur au bord car elle est continue sur $\overline{\Omega}$.

En dimension > 1, une fonction H^1 n'est plus nécessairement continue.

2.3 Traces des fonctions $H^1(\Omega)$

2.3.1 Le cas $\Omega = \mathbb{R}_n^+$

On pose $\Omega = \mathbb{R}_n^+ = \{(x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$.

Définition 2.9 On pose $H_0^1(\mathbb{R}_n^+) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$ et on a $H_0^1 \subsetneq H^1(\Omega)$.

Lemme 2.1.2
$D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration. On prouve que H_c^1 est dense dans H^1 comme quand on a montré que $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ à support compact dans Ω. On a $\varepsilon_0 = \mathrm{d}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega) > 0$. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et θ_ε une fonction régularisante sur $\mathbb{R}^n$.

Posons $\widetilde{u} = u 1_\Omega$ et $u_\varepsilon = \theta_\varepsilon * \widetilde{u}$. On a $u_\varepsilon \to \widetilde{u}$ dans L^2 donc $u_\varepsilon|_\Omega \to u$.

On doit montrer la convergence dans $L^2(\Omega)$ de $\partial_i u_\varepsilon$ vers $\partial_i u$. Si on montre que $\partial_i u_\varepsilon = \widetilde{\partial_i u} * \theta_\varepsilon$, on a fini. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\varphi \,\mathrm{d}x = \iint \widetilde{u}(y)\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\int \widetilde{u}(y)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y_i}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \langle \partial_i \widetilde{u}, \varphi_\varepsilon\rangle \\ &= \langle \widetilde{\partial_i u}, \varphi_\varepsilon\rangle = \int \widetilde{\partial_i u}(x)\varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \langle \widetilde{\partial_i u} * \theta_\varepsilon, \varphi\rangle\end{aligned}$$

où $\varphi_\varepsilon = \varphi * \theta_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^n)$.

Il reste à montrer que $\partial_i \widetilde{u} = \widetilde{\partial_i u}$. Soit $K = \operatorname{supp}(u)$. Il existe $\theta \in D(\Omega)$ valant 1 sur K.

$$\langle \partial_i \widetilde{u}, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{u}\partial_i(\theta\varphi)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_i(\theta\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\partial_i u)\theta\varphi\,\mathrm{d}x$$

car $\partial_i u \in L^2(\Omega)$.

Soit φ fixée. On prend une suite de compacts K_n et les θ_n associées telles que pour tout x, $\theta_n(x) \to 1$ et $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$. Par convergence dominée

$$\int_\Omega \partial_i u\theta_n\varphi \to \int_\Omega \partial_i u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\partial_i u}\varphi$$

D'où $\widetilde{\partial_i u} = \partial_i \widetilde{u}$.

On pose $\tau_h u(x) = u(x + he_n)$ où $x \in \Omega_h$ ssi $x + he_n \in \Omega$. Montrons que $\tau_h u|_\Omega \to u$ dans $H^1(\Omega)$. On approche u dans L^2 par une suite $u_\varepsilon \in C_c^0(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\|\tau_h u - u\|_2 &= \|\tau_h u - \tau_h u_\varepsilon\| + \|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon - u\| \\ &\leqslant 2\|u_\varepsilon - u\|_2 + \|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_2\end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$ et ε tel que $\|u - u_\varepsilon\|_2 < \frac{\eta}{4}$. Pour ce ε, il existe h_0 tel que pour tout $h < h_0$, $\|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_2 < \frac{\eta}{2}$ et ça marche. La convergence des dérivées est facile car $\partial_i(\tau_h u) = \tau_h(\partial_i u)$.

$\varphi_{\varepsilon,h} \to \theta\tau_h u$ dans $H^1(\Omega_h)$ et $\varphi_{\varepsilon,h}|_\Omega \to \theta\tau_h u|_\Omega$ dans $H^1(\Omega)$.

Pour $h \to 0$, on a $\theta\tau_h u|_\Omega \to \theta u = u$. ■

Lemme 2.1.3
$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)\}$.

Démonstration. Soit H l'espace de droite.

$\subset$ Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Par définition, il existe $\varphi_\varepsilon \in D(\Omega)$, $\varphi_\varepsilon \to u$ dans $H^1(\Omega)$.
$\widetilde{\varphi_\varepsilon} \in D(\mathbb{R}^N)$ avec $\|\widetilde{\varphi_\varepsilon}\|_{H^1} = \|\varphi_\varepsilon\|_{H^1}$.
L'application $\varphi \to \widetilde{\varphi}$ est linéaire et continue par rapport aux normes H^1. Or $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ et $\varphi_\varepsilon \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. $\widetilde{\varphi_\varepsilon}$ est donc

de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui est complet donc converge vers $v \in H^1$ donc dans L^2.
Or $\varphi_\varepsilon \to u$ dans H^1 donc dans L^2 donc $v = \widetilde{u}$ et $u \in H$.

$\supset$ Soit $u \in H$, on veut approcher u par $\varphi_\varepsilon \in D(\Omega)$ au sens de la norme $H^1(\Omega)$.
On sait que $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Soit $v_k = \tau_{-h}\widetilde{u}$ avec $h > 0$. $v_h(x', x_N) = \widetilde{u}(x', x_N - h)$.
Si $x_N < h$, $\widetilde{u}(x', x_N - h) = 0$ donc $v_h(x) = 0$. On refait comme dans la preuve précédente : il existe une suite $\varphi_{\varepsilon,h} \in D(\Omega)$ telle que $\varphi_{\varepsilon,h} \to v_h$ quand $h \to 0$ en norme H^1.

$$\|\varphi_{\varepsilon,h} - u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|\varphi_{\varepsilon,h} - v_h\| + \|v_h - \widetilde{u}\| \qquad \blacksquare$$

Tout repose sur un calcul pour $\varphi \in D(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned}(\varphi(x', 0))^2 &= -\int_0^\infty \frac{\partial \varphi(x', x_N)^2}{\partial x_N} \,\mathrm{d}x_N = -2\int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', x_N)\varphi(x', x_N)\,\mathrm{d}x_N \\ &\leqslant 2\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\right\| \leqslant 2\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x')\right\|_2 \|\varphi(x')\|_2 \leqslant \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}^2 + \varphi^2 \,\mathrm{d}x_N\end{aligned}$$

Donc $\|\varphi(x', 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \|\varphi\|_{H^1}$.

Comme $D(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ l'application $\gamma_0 : v(x', x_N) \mapsto v(x', 0)$ se prolonge par continuité de manière unique en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$.

Définition 2.10 Soit $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. On appelle trace de u sur $\partial\Omega$ la fonction $\gamma_0 u \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On a $\|\gamma_0 u\|_2 \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^{N-1})}$.

Remarque 2.5 Par construction, si $u \in D(\overline{\Omega})$, sa trace coïncide avec sa valeur usuelle au bord. C'est vrai aussi si $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

2.3.2 Ω borné régulier

Domaines réguliers

Définition 2.11 Régularité du domaine Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ sa frontière.

L'ouvert Ω est dit de classe C^k pour $k > 0$ ssi pour tout $\sigma_0 \in \partial\Omega$ on peut trouver un voisinage ouvert ω_0, une boule $B(0, r)$, unr bijection $\Phi : B(0, r) \to \omega_0$ et une application continue $\varphi : B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ tels que

- $\Phi(0) = \sigma_0$, Φ, Φ^{-1}, φ sont C^k
- $\overline{\Omega} \cap \omega_0 = \Phi(B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}^+))$ et $\partial\Omega \cap \omega_0 = \Phi(B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$.

- Il existe R_0 matrice de rotation et $b_0 \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\overline{\Omega} \cap \omega_0 \subset R_0\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^N, y_N \geqslant \varphi(y')\} + b_0$$

et

$$\partial\Omega \cap \omega_0 \subset R_0\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^N, y_N = \varphi(y')\} + b_0$$

Définition 2.12 Mesures de surfaces Dans le cas où $\Omega = \{(y', y_N), y_N \geqslant \varphi(y')\}$ avec $\varphi \in C^1$

$\partial\Omega = \{(y', y_N), y_N = \varphi(y')\} = \{(y', \varphi(y'))\}$. Alors pour toute fonction $u \in C_c^0(\partial\Omega, \mathbb{R})$, on définit

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(F(x))\sqrt{\det(F'(x)^* F'(x))}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x, \varphi(x))\underbrace{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x)|^2}\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}\sigma}\end{aligned}$$

La propriété importante démontrée dans le poly est que $\mathrm{d}\sigma$ est intrinsèque à $\partial\Omega$ et indépendante du choix de paramétrisation de $\partial\Omega$.

Théorème 2.2 *Soit Ω borné de classe C^1. Alors*

(i) *$D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$*

(ii) *$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)\}$ où $\widetilde{u} = u1_\Omega$.*

(iii) *L'application $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ de $D(\overline{\Omega})$ muni de la norme H^1 dans $L^2(\partial\Omega)$ est continue (et linéaire) : elle se prolonge en une application linéaire continue γ_0 de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\partial\Omega)$ appelée trace.*

Éléments de preuve. On adapte la preuve $\mathbb{R}_+^N$ en traitant juste le cas $\Omega = \{(x', x_N), x_N \geqslant \varphi(x')\}$, φ et $\nabla\varphi$ bornées.

On fait pareil après rotation.

On introduit une partition de l'unité et un recouvrement fini de la frontière (qui est compacte). Si $u \in H^1(\Omega)$, $u = \sum_{k=0}^{K} u\psi_k$ avec $u\psi_k$ déjà traités par ce qu'il y a avant. ■

Intégration par parties

Théorème 2.3 *Soient $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors pour tout $i \in [\![1, N]\!]$,*

$$\int_\Omega \partial_i uv\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\partial_i v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u\gamma_0 v n_i\,\mathrm{d}\sigma$$

où $n(\sigma)$ est le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$ en σ.

Exemple 2.3 Si localement, $\Omega \cap \omega_0 = R_0\{y_N > \varphi(y')\} + b_0$, alors $n = R_0 \frac{(\nabla\varphi, -1)}{\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}$.

Démonstration. On va appliquer le résultat énoncé dans le poly : si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, $\int_\Omega \partial_i(uv)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uvn_i\,\mathrm{d}\sigma$.

Si $u, v \in H^1(\Omega)$, il existe $u_n, v_n \in D(\overline{\Omega})$ qui les approchent en norme H^1. On a $D(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$ donc on a l'égalité pour les u_n, v_n. On veut passer à la limite dans chacune des intégrales, ce qui est possible car la convergence H^1 assure la convergence L^2 de u_n et ∂u_n et grâce à la continuité de γ_0 et de $\sigma \mapsto n(\sigma)$. ■

Corollaire 2.2 *On se place dans le cas où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, Ω_1 et Ω_2 ayant une partie de frontière commune.*

On pose Ω l'intérieur de $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ supposé de classe C^1. À une fonction u définie sur Ω, on associe $u|_{\Omega_1}$ et $u|_{\Omega_2}$.

Alors $u \in H^1(\Omega)$ ssi $u_i \in H^1(\Omega_i)$ et $\gamma_0 u_1|_\Gamma = \gamma_0 u_2|_\Gamma$.

Remarque 2.6 *$C^{0,1}$, c'est comme C^1 mais avec lipschitzien à la place de C^1.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ $u_n \in D(\overline{\Omega})$ qui converge H^1 vers u. $u|_{\Omega_i} = \lim u_n|_{\Omega_i}$ sur $H^1(\Omega_i)$.
Soit $u_{i,n} = u_n|_{\Omega_i}$, on a $u_{1,n}|_\Gamma = u_{2,n}|_\Gamma$ car u_n est continue sur Γ. En passant à la limite, on obtient $\gamma \circ u_1|_\Gamma = \gamma \circ u_2|_\Gamma$.

$\Leftarrow$ Soit $u = u_1 1_{\Omega_1} + u_2 1_{\Omega_2}$ avec $u_i \in H^1(\Omega_i)$. Montrons que $\partial_i u \in L^2(\Omega)$.
Pour cela, posons $v = \partial_i u_1 1_{\Omega_1} + \partial_i u_2 1_{\Omega_2}$. Soit $\varphi \in D(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\langle v, \varphi\rangle &= -\langle u, \partial_i\varphi\rangle = -\int_{\Omega_1} u_1 \partial_i\varphi - \int_{\Omega_2} u_2\partial_i\varphi \\ &= \int_{\Omega_1} \partial_i u_1 \varphi + \int_{\Omega_2} \partial_i u_2\varphi - \int_{\partial\Omega_1} \gamma_0 u_1 \gamma_0\varphi n_i^1\,\mathrm{d}\sigma_1 - \int_{\partial\Omega_2} \gamma_0 u_2\gamma_0\varphi n_i^2\,\mathrm{d}\sigma_2 \\ &= \int_{\Omega_1} \partial_i u_1\varphi + \int_{\Omega_2} \partial_i u_2 \varphi = \langle \partial_i u, \varphi\rangle\end{aligned}$$

car $n_i^1 = -n_i^2$ et $\gamma_0 u_1|_\Gamma = \gamma_0 u_2|_\Gamma$. ■

Identification de $H_0^1(\Omega)$

Proposition 2.7 $H_0^1(\Omega) = \operatorname{Ker}\gamma_0$.

Démonstration. Soit $H = \operatorname{Ker}\gamma_0$.

$\subset$ Pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, $\gamma_0\varphi = 0$ et γ_0 est continue sur H^1 donc γ_0 annule tout élément de H_0^1.

$\supset$ Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_0 u = 0$. Soit Ω' un ouvert contenant Ω. On pose $v = u 1_\Omega$ définie sur Ω'. Le corollaire précédent dit que $v \in H^1(\widetilde{\Omega})$ ssi $\gamma_0 u = 0$.
Comme $u \in \operatorname{Ker} \gamma_0$, $v \in H^1(\Omega')$ donc le prolongement $\widetilde{u}$ de u à l'espace entier appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ ie $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ ■

2.4 Compacité, inégalité de Poincaré

2.4.1 Théorème de prolongement

Théorème 2.4 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de classe C^1. Il existe un opérateur P linéaire continu de $H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, $Pu|_\Omega = u$.*

Idée de la preuve. On se place dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{(x', x_N), x_N > 0\}$. Soit $u \in H^1(\Omega)$.

Si $x_N < 0$, on pose $Pu(x', x_N) = u(x', -x_N)$ et si $x_N > 0$, $Pu(x', x_N) = u(x', x_N)$. On a facilement que $Pu|_\Omega \in H^1(\Omega)$ et $Pu|_{\overline{\Omega}^c} \in H^1(\overline{\Omega}^c)$.

De plus, les traces coïncident car l'hyperplan $\{x_N = 0\}$ est invariant par symétrie.

Dans le cas général, on recouvre la frontière de Ω par un nombre fini de boules, on introduit une partition de l'unité associée à ce recouvrement et dans chaque boule on est dans la situation précédente modulo un difféomorphisme. ■

2.4.2 Compacité

Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire $A : X \to Y$ est dite compacte si ppour toute suite $u_n \in X$ bornée il existe une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ telle que $Au_{\varphi(n)}$ converge dans Y.

Théorème 2.5 *Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Alors l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Autrement dit, de toute suite bornée dans H^1, on peut extraire une sous-suite convergeant dans $L^2(\Omega)$.

Remarque 2.7 L'hypothèse de bornitude est fondamentale.

Démonstration. Soit u_n bornée par C_0 dans $H^1(\Omega)$. Soit $v_n = Pu_n\chi$ avec $\chi \in D(\mathbb{R}^N)$ telle que $\chi = 1$ sur $\overline{\Omega}$.

$v_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Comme P est linéaire continu, $\|Pu_n\|_{H^1} \leqslant C_1 \|u_n\|_{H^1} \leqslant C_0 C_1$.

Il existe donc $C_2 > 0$ tel que $\|Pu_n\chi\|_{H^1} \leqslant C_2$. Si $v_n|_\Omega$ converge dans L^2 alors u_n converge dans L^2. On se concentre alors sur v_n.

On pose $v_{n,\varepsilon} = v_n * \theta_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} v_{n,\varepsilon}(x) - v_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y)(v_n(x-\varepsilon y) - v_n(x))\,\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon \int_B \int_0^1 \theta(y)\nabla v_n(x-\varepsilon ty)y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

où B est une boule $B(0,R)$ telle que $\mathrm{supp}(\theta) \subset B$.

$$(v_{n,\varepsilon}(x) - v_n(x))^2 \leqslant \varepsilon^2 \int_B \int_0^1 |y|^2\theta^2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \int_B \int_0^1 |\nabla v_n(x-\varepsilon ty)|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

On intègre

$$\begin{aligned} \|v_{n,\varepsilon} - v_n\|_2^2 &\leqslant \varepsilon^2 \int_B |y|^2\theta^2(y)\,\mathrm{d}y \int_B \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_n(x-\varepsilon ty)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant c_1\varepsilon^2 \|v_n\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

On va appliquer Ascoli aux $v_{n,\varepsilon} \in D(\mathbb{R}^n)$. On a besoin d'une borne uniforme dans L^∞ et de l'uniforme continuité.

Avec $r = \infty$ et $q = 2$, on a

$$\|f * g\|_\infty \leqslant c\,\|f\|_2\,\|g\|_2$$

Donc $\|v_{n,\varepsilon}\|_\infty \leqslant c\,\|\theta_\varepsilon\|_2\,\|v_n\|_{H^1} \leqslant c_\varepsilon$.

$$v_{n,\varepsilon}(x) - v_{n,\varepsilon}(y) = \int_0^1 \nabla v_{n,\varepsilon}(y + t(x-y))(x-y)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|v_{n,\varepsilon}(x) - v_{n,\varepsilon}(y)| \leqslant |x-y|\,\|\nabla v_{n,\varepsilon}\|_\infty$$

Or $\nabla v_{n,\varepsilon} = \theta_\varepsilon * (\nabla v_n)$ donc par l'inégalité précédente,

$$\|\nabla v_{n,\varepsilon}\|_\infty \leqslant c\,\|\theta_\varepsilon\|_2\,\|v_n\|_{H^1}$$

On peut donc appliquer Ascoli donc on a une sous suite qui cvu sur K_0 donc converge en norme L^2. On fait ensuite une extraction diagonale en prenant des $\varepsilon_p = \frac{1}{p}$. On construit donc une suite extraite de v_n qui est de Cauchy dans L^2. Donc ça marche. ∎

2.4.3 Inégalité de Poincaré

Proposition 2.8 Soit Ω borné de classe C^1. Il existe une constante $c_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_2 \leqslant c_\Omega \|\nabla u\|_2$$

Démonstration. Il existe δ tel que $\Omega \subset]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[\times\mathbb{R}^{n-1}[$. On montre l'inégalité de poincaré pour $\varphi \in D(\Omega)$. Par densité, ça marchera pour H_0^1. On a

$$\varphi(x_1, x') = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x')\,\mathrm{d}t$$

Donc par Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(x_1, x')|^2 \leqslant \delta \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x')^2\,\mathrm{d}t$$

On intègre sur Ω ie sur $]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}[\times\mathbb{R}^{n-1}[$:

$$\|\varphi\|_2^2 \leqslant \delta^2 \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}^2\,\mathrm{d}x \leqslant \delta^2 \|\nabla\varphi\|_2^2$$ ■

Autre démonstration. Par l'absurde, on suppose que pour tout n, il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_2 > n\|\nabla u_n\|_2$.

Posons $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_2}$. On a $\|\nabla v_n\| < \frac{1}{n}$. On a donc $\|v_n\|_{H^1}^2 \leqslant 2$.

Comme Ω est borné et C^1, par Rellich, on a, à une extraction près, $v_n \to v$ en norme L^2. Ainsi, $\|v\|_2 = 1$ et $\nabla v_n \to 0$ dans L^2 donc dans D'.

De plus, $v_n \to v$ dans L^2 donc dans D' donc $\nabla v_n \to \nabla v$ dans D' donc $\nabla v = 0$ et v est constante sur chaque composante connexe.

On sait que $v_n \in H_0^1$, $v_n \to v$ et $\nabla v_n \to \nabla v$ donc $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$. H_0^1 est un fermé de H^1 donc $v \in H_0^1$ et v est constante sur chaque composante connexe de Ω. Ainsi, $v = 0$ (nulle sur $\partial\Omega$).

D'où la contradiction avec $\|v\|_2 = 1$. ■

Remarque 2.8 L'inégalité est fausse sur $H^1(\Omega)$, par exemple en prenant $u = 1$ sur Ω borné, $\nabla u = 0$ mais $\|u\|_2 \leqslant C_\Omega \|\nabla u\|_2$.

COROLLAIRE 2.3 *Si Ω est borné de classe C^1, $u \mapsto \|\nabla u\|_2$ est une norme (sur $H_0^1(\Omega)$) qui est équivalente à la norme H^1.*

Démonstration. Si $\|\nabla u\|_2 = 0$, $\nabla u = 0$ donc u est constante (et de trace nulle) donc nulle.

Si $u \in H_0^1(\Omega)$, par Poincaré,

$$\|\nabla u\|_2^2 \leqslant \|u\|_{H^1}^2 \leqslant (C_\Omega + 1)^2 \|\nabla u\|_2^2$$ ■

Chapitre 3

Problèmes elliptiques linéaires

3.1 Un problème de minimisation

On cherche une fonction $u \in H_0^1$ qui minimise la quantité

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fu$$

où Ω est un ouvert fixe borné de classe C^1 et $f \in L^2(\Omega)$.

Proposition 3.1 Il existe un unique u tel que $J(u)$ soit minimal. De plus, on a $-\Delta u = f$ au sens $D'(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ au sens des traces.

Lemme 3.0.1
J est C^1 sur H^1 et sa différentielle en u est définie par

$$\mathrm{d}J_u(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega fv$$

Démonstration. On a

$$J(u+v) - J(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega fv + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2$$

La continuité s'en déduit par Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|J(u+v) - J(u)| &\leqslant \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|f\|_2 \|v\|_2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 \\ &\leqslant \|v\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}(\|\nabla u\|_2 + \|f\|_2)\end{aligned}$$

La différentiabilité est claire puisque $\int_\Omega |\nabla v|^2 = o(\|v\|_{H^1})$.

La différentielle est continue par Cauchy-Schwarz :

$$|L_u(v) - L_{u'}(v)| = \left|\int_\Omega \nabla(u-u')\nabla v\right| \leqslant \|u-u'\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

Donc $\|L_u - L_{u'}\| \leqslant \|u-u'\|_{H^1}$. ∎

Démonstration de la proposition.

- J est minorée par l'inégalité de Poincaré :
$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}C_\Omega \|u\|_2^2 - \int_\Omega fu \geqslant \frac{C_\Omega}{2}\|u\|_2^2 - \|f\|_2 \|u\|_2$$
Le polynôme $P(\lambda) = \frac{C_\Omega}{2}\lambda^2 - \|f\|_2 \lambda$ admet un extremum en $\frac{\|f\|_2}{C_\Omega}$. On a finalement
$$J(u) \geqslant -\frac{\|f\|_2^2}{C_\Omega}$$
J admet donc un infimum j. Montrons que c'est un minimum. Soit $u_n \in H_0^1$ telle que $j \leqslant J(u_n) \leqslant j + \frac{1}{n}$.
- On montre que u_n est de Cauchy.
$$J(v) + J(w) - 2J\left(\frac{v+w}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2 - 2\left|\nabla\left(\frac{v+w}{2}\right)\right|^2\right)$$
Or $2|\nabla(\frac{v+w}{2})|^2 = \frac{1}{2}(|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2 + 2\nabla v \nabla w)$ donc
$$J(v)+J(w)-2J\left(\frac{v+w}{2}\right) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla(v-w)|^2 \geqslant \frac{1}{4(1+C_\Omega)^2}\|v-w\|_{H^1}^2$$
par Poincaré. On applique ça pour $v = u_n$ et $w = u_p$:
$$\frac{1}{4(1+C_\Omega)^2}\|u_n - u_p\|_{H^1}^2 \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$
Donc u_n est de Cauchy donc converge dans H^1 vers u. Comme H_0^1 est fermé, $u \in H_0^1$. Par continuité de J, $J(u) = j$.
- Il reste à montrer l'unicité de u. Soit v qui marche. On a
$$\frac{1}{4(1+C_\Omega^2)}\|u-v\|_{H^1}^2 \leqslant J(u) + J(v) - 2J\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant j + j - 2j = 0$$
Donc $u = v$.
- On a $\mathrm{d}J_u = 0$ puisque $J(u+tv) \geqslant J(u)$ donc si $t > 0$, $\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \geqslant 0$ donc $\mathrm{d}J_u(v) \geqslant 0$ et si $t < 0$, $\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \leqslant 0$ donc $\mathrm{d}J_u(v) \leqslant 0$.
On a donc pour tout $v \in H_0^1$,
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$$
On passe aux distributions : pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, on a
$$\sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle - \langle f, \varphi\rangle = 0$$
et $\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle = -\langle \Delta u, \varphi\rangle$ donc $-\Delta u = f$. ■

3.2 Solutions faibles pour le problème de Dirichlet

3.2.1 Équation de Laplace

On s'intéresse au problème de Dirichlet pour le laplacien $f = -\Delta u$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Définition 3.1 Une fonction u est dite solution faible ssi $u \in H_0^1$ et $f = -\Delta u$ au sens D'.

En passant aux distributions et en utilisant les propriétés des crochets, on obtient que si u est une solution faible alors pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi$$

Par densité, on peut même prendre $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi, être solution faible est équivalent à vérifier la fomulation variationnelle (on a montré une implication, l'autre se fait en remontant les calculs)

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$$

Définition 3.2 Une formulation variationnelle est la donnée :

- d'un espace de Hilbert V,
- d'une forme bilinéaire continue a,
- d'une forme linéaire continue L

et consiste à rechercher la solution de $u \in V$ et pour tout $v \in V$, $a(u, v) = L(v)$.

Théorème 3.1 Lax-Milgram *Si a est bilinéaire continue coercive sur un Hilbert alors le problème précédent admet une unique solution.*

De plus, si a est symétrique, alors u est l'unique minimiseur de $v \mapsto J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$.

Démonstration. Par Riesz, on a pour tout $y \in V$, $x \mapsto a(x, y) \in V'$ donc il existe un unique Ay tel que $a(x, y) = (Ax, y)$ pour tout $x \in V$.

Par unicité dans Riesz, A est linéaire. Donc pour tout $x, y \in H$, $a(x, y) = (x, Ay)$. En écrivant $l \in H'$ comme $(\cdot, f)$, résoudre $a(x, y) = l(x)$ revient à résoudre $(x, Ay) = (x, f)$ ie $Ay = f$.

A est continue car

$$\|A(v)\|^2 = a(v, A(v)) \leqslant c\,\|v\|\,\|A(v)\|$$

donv $\|A(v)\| \leqslant v\,\|v\|$.

Il faut montrer que A est bijective. Soit $T(v) = v - \lambda(A(v) - u_0)$ où u_0 provient de l'application de Riesz à L : $L(z) = (u_0, z)$.

$$\begin{aligned}\|T(v) - T(w)\|^2 &= \|v - w\|^2 + \lambda^2 \|A(v) - A(w)\|^2 - 2\lambda(v - w, A(v - w)) \\ &\leqslant (1 + c^2\lambda^2) \|v - w\|^2 - 2\lambda a(v - w, v - w) \\ &\leqslant (1 + \lambda^2 c^2 - 2\lambda\alpha) \|v - w\|^2\end{aligned}$$

On a gagné dès que $\lambda^2 c^2 - 2\lambda\alpha < 0$ donc on prend $\lambda \leqslant \frac{2\alpha}{c^2}$.

T est contractante donc elle a un point fixe et c'est gagné. ■

Remarque 3.1 La théorème de Lax-Milgram fournit en plus de l'existence et l'unicité de la solution, une estimation a priori de cette solution, ie une borne sur la norme de u. En effet

$$\alpha \|u\|^2 \leqslant a(u, u) = L(u) \leqslant |||L||| \, \|u\|$$

Donc $\|u\| \leqslant \frac{|||L|||}{\alpha}$.

<u>Théorème 3.2</u> *Le dual de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $D'(\Omega)$. On le note $H^{-1}(\Omega)$. De plus, on a*

$$H^{-1} = \left\{u \in D', u = f_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, f_i \in L^2\right\}$$

Démonstration. On note H l'espace de droite.

$\supset$ Soit $u = f_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. On définit la forme linéaire sur H_0^1 :

$$\forall v, \langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int f_0 v - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x$$

C'est une forme continue car on la majore par

$$\|v\|_{H^1} \left(\|f_0\|_2 + \sum_{i=1}^{N} \|f_i\|_2\right)$$

Cette forme prolonge u sur H_0^1.

$\subset$ On utilise Riesz sur $(L^2)^{N+1}$. On pose

$$G = \{(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}), v \in H_0^1\}$$

L'application $T : G \to \mathbb{R} : g := (v, g_1, \dots, g_N) \mapsto \langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$.

g est continue car

$$|Tg| \leqslant \|u\|_{H^{-1}} \|g\|_{(L^2)^{N+1}}$$

On utilise Hahn-Banach pour prolonger T en $\widetilde{T}$ sur $(L^2)^{N+1}$. On applique alors Riesz pour trouver $f_0, \dots, f_N$ tel que $\widetilde{T}g = \sum_{i=0}^{N} \int_\Omega f_i g_i$.

En particulier,

$$\langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = T\left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = \int_\Omega f_0 v + \sum_{i=1}^{N} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

et u s'identifie à la distribution $f_0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. ■

<u>THÉORÈME 3.3</u> *Soit Ω un ouvert C^1 borné. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.*

Il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$ au sens D'. De plus, il existe une constante c ne dépendant que de Ω telle que

$$\|u\|_{H^1} \leqslant c \|f\|_{H^{-1}}$$

Démonstration. On met sous forme variationnelle : Si $-\Delta u = f$, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$

$$a(u, \varphi) = \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

Par densité, on a le résultat pour $\varphi \in H_0^1$.

Réciproquement, si pour tout $v \in H_0^1$, $a(u, v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$, comme $D(\Omega) \subset H_0^1$, on a $-\Delta u = f$ au sens D'.

On applique Lax-Milgram.

$$|a(u, v)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2 \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2^2 \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2^2} \leqslant \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

$L(v) = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$ est continue par définition de H^{-1}.

a est coercive car par Poincaré :

$$a(u, u) \geqslant \frac{c_\Omega^2}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_2^2$$

Donc il existe un unique u solution de la formulation variationnelle et on a en prime :

$$\|u\|_{H^1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}}$$ ■

3.2.2 Problèmes elliptiques d'ordre 2

On s'intéresse maintenant à $(*)$:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a_0(x)u=f \\ u\in H_0^1 \end{cases}$$

sous les hypothèses

- Ω borné C^1
- $a_{i,j}$, b_i et a_0 dans L^∞
- $f\in H^{-1}(\Omega)$
- Uniforme ellipticité :

$$\exists c_0>0, \forall x\in\Omega, \forall \xi\in\mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant c_0|\xi|^2$$

<u>THÉORÈME 3.4</u> *Les propositions suivantes sont équivalentes*

(i) $u\in H_0^1$ *vérifie la formulation* $(*)$

(ii) $u\in H_0^1$ *et pour tout* v, $a(u,v)=L(v)$ *avec*

$$a(u,v)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+\int_\Omega a_0uv$$

et $L(v)=\langle f,v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$.

Démonstration. On adapte la preuve du même résultat pour l'équation de Laplace :

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_2\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_2+\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2\|v\|_2+\|u\|_2\|v\|_2\right)\\ &\leqslant CM\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}\end{aligned}$$

avec $M=\max\{\|a_{i,j}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|a_0\|_\infty\}$.

Si u est solution de $(*)$ dans D', soit $\varphi\in D$. On passe toutes les dérivées sur φ et on trouve $a(u,\varphi)=L(\varphi)$. Par densité, on a le résultat dans H_0^1. L'autre sens est encore une fois clair puisque $D\subset H_0^1$. ∎

Remarque 3.2 On vérifie que a est coercive.

$$a(u,u)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u+\int_\Omega a_0u^2$$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j} \geqslant c_0 \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}^2$$

par uniforme ellipticité. Les autres termes sont dits d'ordre inférieurs.

- *On prend $b_i \in L^\infty$ et pour tout j, $\frac{\partial b_i}{\partial x_j} \in L^\infty$. On dit que $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*
  Alors on peut démontrer que pour tout $u \in H_0^1$,
  $$\sum_{i=1}^N \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\div b) u^2 \,\mathrm{d}x$$
  et on supposera $\div b \leqslant 0$ pp sur Ω.
  Sous ces hypotèses, on a $a(u,u) \geqslant c_0 \|\nabla u\|_2^2$ donc la coercivité par Poincaré. On a donc l'existence et l'unicité de la solution
- *Dans un autre cas, le problème peut être mal posé, par exemple avec $\Omega =]0,1[$, $-u'' - \pi^2 u = 0$ et $u(0) = u(1) = 0$.*
  Ici $a_1 = 1$, $a_0 = -\pi^2$ et $b = 0$. L'ensemble des solutions est alors $\{\lambda \sin(\pi x), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

<u>Théorème 3.5</u> *Sous l'ensemble d'hypothèses Ω borné C^1, $a_{i,j}$, b_i et a_0 dans L^∞, $f \in H^{-1}$ et uniforme ellipticité,*

- *Si de plus $a_0 \geqslant 0$ pp, et pour tout i, $b_i \in W^{1,\infty}$ avec $\div b \leqslant 0$ alors $(*)$ a une unique solution*
- *Sinon il existe $\lambda_0 \geqslant 0$ tel que le problème $Lu + \lambda_0 u = f$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ soit mal posé.*

où

$$Lu = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u$$

Démonstration. Dans le cas favorable, les hypothèses entraînent que

$$a(u,u) \geqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant x_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \geqslant \alpha \|u\|_{H^1}$$

par Poincaré. Lax-Milgram assure alors l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Dans le cas défavorable, on remplace le problème par $(L + \lambda\,\mathrm{Id})u = f$ et $u = 0$, ce qui s'écrit sous forme variationnelle : $u \in H_0^1$ avec pour tout v, $a(u,v) + \lambda \int uv = L(v)$.

$$a(u,u) + \lambda \int u^2 \geqslant c_0 \int |\nabla u|^2 + \lambda \int u^2 + \text{ à traiter}$$

$|\int a_0 u^2| \leqslant \|a_0\|_\infty \int u^2$.

$$\left|\sum_{i=1}^N \int b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=1}^N \int |b_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |u| \,\mathrm{d}x \leqslant \max_i \|b_i\|_\infty \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2 \|u\|_2$$

Pour tout a, b, $ab = (\sqrt{\varepsilon}a)\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \varepsilon\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$. On a alors

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\int b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\max\|b_i\|_\infty\int|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\max\|b_i\|_\infty\int u^2$$

Soit ε tel que $\frac{\varepsilon\max\|b_i\|_\infty}{2} = \frac{c_0}{2}$. On a

$$\begin{aligned}a(u,u) + \lambda\int u^2 &\geqslant c_0\int|\nabla u|^2 + \lambda\int u^2 - \left|\sum_{i=1}^{N}\int b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u\right| - \left|\int a_0u^2\right|\\ &\geqslant \frac{c_0}{2}\int|\nabla u|^2 + (\lambda-\lambda_0)\int u^2\end{aligned}$$

pour $\lambda_0 = \frac{(\max\|b_i\|_\infty)^2}{2c_0} + \|a_0\|_\infty$.

Si $\lambda \geqslant \lambda_0$ alors $a(u,u) + \lambda\int u^2 \geqslant \frac{c_0}{2}\int|\nabla u|^2 \geqslant \alpha\|u\|_{H^1}^2$.

La coercivité est donc assurée et Lax-Milgram conclut. ∎

3.2.3 Régularité H^2

Soit u solution faible de $-\nabla u = f$ (ou $Lu = f$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Si $f \in H^{-1}$, on ne peut espérer $u \in H^2$ sans hypothèses supplémentaires.

Si $f \in L^2$, la régularité optimale attendue sur u est H^2.

En dimension 1, il est évident que $u \in H^2$. L est élliptique donc

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b\frac{\partial u}{\partial x} + a_0u$$

avec pour tout x, $a(x) \geqslant c_0 > 0$.

$a \in C^1(\overline{\Omega})$ donc $Lu = -a\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + (b-a')\frac{\partial u}{\partial x} + a_0u = f$ donc $\frac{\partial^2u}{\partial x^2} = \frac{f}{a} - \frac{b-a'}{a}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{a_0}{a}u$ donc $u \in H^2$.

Si $N > 1$, c'est moins évident, mais le résultat reste vrai :

<u>Théorème 3.6</u> *Soit u solution faible et Ω de classe C^2. Si $f \in L^2$ alors $u \in H^2$ et il existe $c > 0$ tel que*

$$\|u\|_{H^1} \leqslant c\|f\|_2$$

Démonstration partielle. Le plus compliqué est de montrer que si $f \in L^2$ alors $u \in H^2$. On construit alors l'application $T : u \mapsto -\Delta u$. de $H^2 \cap H_0^1 \to L^2$.

L'existence et l'unicité de la solution faible ainsi que la première partie du théorème assure que c'est une bijection. Or T est continu car

$$\|Tu\|_2 = \|\Delta u\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right\|_2 \leqslant \|u\|_{H^2}$$

Le théorème de l'application ouverte de Banach dit que T^{-1} est continue donc il existe c tel que $\|u\|_{H^2} \leqslant c\,\|f\|_2$. Le reste se fait en trois étapes :

(i) Régularité intérieure : pour tout $\chi \in D(\Omega)$, $u\chi \in H^2$ ie $u|_K \in H^2$ pour K compact de Ω

(ii) Régularité près du bord quand le bord est plat

(iii) Cas général.

(i) Soit $\chi \in D(\Omega)$. $f = -\Delta u$ donc $v := u\chi$ satisfait au sens D' :

$$-\Delta v = f\chi - 2\Delta u \Delta\chi - u\Delta\chi$$

Donc $-\Delta v \in L^2$ et $\operatorname{supp} v$ est inclus dans un compact K de Ω. On pose $\widetilde{v} = v1_\Omega$. $\widetilde{v} \in H^1$ et $-\Delta\widetilde{v} \in L^2$.
On renote u la fonction $\widetilde{v}$. Si $-\Delta u = f \in L^2$ et $u \in H^1$, alors $u \in H^2$.

Lemme 3.6.1

- Soit $u \in H^1$. Il existe $c > 0$ tel que pour tout h, $\|D_h u\|_2 \leqslant c\,\|\nabla u\|_2$.
- Si $u \in L^2$, on suppose qu'il existe $c_1 > 0$ tellle que pour tout i, h, $\|D_h u\|_2 \leqslant c_1$ alors $u \in H^1$ et $\|\nabla u\|_2 \leqslant c_1$.

Démonstration. On montre l'inégalité pour $u \in D$.

$$\begin{aligned}\int (D_h u)^2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+the_i)\right)^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leqslant \|\nabla u\|_2^2\end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on raisonne par dualité. Soit $\varphi \in D$.

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle &= -\int u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \\ &= -\lim_{h\to 0}\int u\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}\,\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{h\to 0}\int \frac{u(x-he_i)-u(x)}{h}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int D_{-h}u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Alors $|\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\rangle| \leqslant c_1\,\|\varphi\|_2$. Donc la distribution $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se prolonge par continuité en une forme linéaire continue sur L^2 identifiable à une fonction L^2. ∎

On pose $v = D_{-h}D_h u \in H^1$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{N} \int \left(D_h \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2 \|D_{-h}D_h u\|_2 \leqslant \|f\|_2 \left\|\frac{\partial D_h u}{\partial x_i}\right\|_2$$

par le lemme.
Comme $\left\|D_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2 \leqslant \|f\|_2$, on applique le lemme et on a pour tout i, j, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2$ donc $u \in H^2$.

(ii) $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $\partial\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$. On refait la même preuve pour $1 \leqslant i < N$. Il manque juste la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$, qu'on récupère avec l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = \Delta u - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - f$$

Donc $u \in H^2$.

(iii) Admis (il suffit de combiner les points précédents en regardant des difféomorphismes). ■

Théorème 3.7 *Soit Ω borné de classe C^2 et $f \in L^2$, $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i \in L^\infty$, $a_0 \in L^\infty$.*

Soit u une solution faible de $Lu = f$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors $u \in H^2$ et il existe $c_\Omega > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^2} \leqslant c_\Omega \|f\|_2$$

3.3 Autres conditions aux limites

Dans cette partie $Lu = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u$ avec $a_0 \geqslant 0$ et l'hypothèse d'uniforme ellipticité.

On sait que $Lu = f$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ admet une unique solutions où Ω est borné de classe C^1 et $f \in H^{-1}(\Omega)$.

3.3.1 Condition de Dirichlet non homogène

On remplace la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ par $u = g$ sur $\partial\Omega$ ie $\gamma_0 u = g$.

Ici, $a_{i,j} \in L^\infty$, $a_0 \in L^\infty$. Au minimum, il faut avoir pris $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in \gamma_0(H^1(\Omega))$.

En fait, $\gamma_0(H^1(\Omega))$ est un sous-ensemble strict de L^2 noté $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Théorème 3.8 *Sous les hypothèses ci-dessus, le problème admet une unique solution.*

Démonstration. Soit $G \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0 G = g$. Une telle fonction existe car $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (pas unique car on peut lui ajouter une fonction de H^1 sans changer sa trace).

u est alors solution ssi $v := u - G$ est solution de $Lv = f - LG$ et $v = 0$ sur $\partial\Omega$.

Ce problème admet une unique solution car $LG \in H^{-1}(\Omega)$ donc on a une unique solution au problème de départ. ■

Lemme 3.8.1
Si $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $b \in H^1(\Omega)$ et Ω borné, alors $ab \in H^1$ et pour tout i

$$\frac{\partial ab}{\partial x_i} = a\frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial x_i}b$$

Si on suppose de plus qu'il existe $G \in H^1$ telle que $g = \gamma_0 G$ alors $u - G \in H^2$ donc $u \in H^2$.

3.3.2 Le problème de Neumann pour le laplacien

On cherche à imposer des conditions aux limites sur les dérivées de u de sorte que le problème $-\Delta u = f$ admette une unique solution.

Remarque 3.3 Remplacer $u = 0$ par $\nabla u = 0$ n'est pas une bonne idée car on remplace une équation par N équations.

La condition de Neumann est la nullité de la dérivée normale.

Un problème avec condition de Neumann est $-\Delta u = f$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Si on sait seulement que $u \in H^1$ alors pour tout i, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2$ et on ne sait pas définir la trace de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Si en revanche $u \in H^2$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1$ donc $\frac{\partial u}{\partial n}$ est bien défini (dans $L^2(\partial\Omega)$).

On prendra systématiquement $f \in L^2$. On ne peut espérer avoir l'unicité de la solution car on peut ajouter une constante sans rien changer. On considère donc le problème

$$-\Delta u + u = f \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Soit $u \in H^2$ et $v \in H^1$.

$$-\int \Delta uv = -\sum_{i=1}^{N}\int \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}v = \sum_{i=1}^{N}\int \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v \,\mathrm{d}\sigma$$

Si u est solution de notre problème alors pour tout $v \in H^1(\Omega)$

$$\underbrace{\int \nabla u\nabla v + \int uv}_{a(u,v)} = \underbrace{\int fv}_{L(v)}$$

Ce qui donne la formulation variationnelle $u \in H^2$ et pour tout $v \in H^1$, $a(u,v) = L(v)$.

Le problème variationnel avec $u \in H^1$ admet une unique solution par Lax-Milgram mais on ne peut pas remonter si on ne sait pas que $u \in H^2$.

<u>Théorème 3.9</u> *Soit Ω borné C^1 et $u \in H^1$ tel que $-\Delta u \in L^2$. Alors $u \in H^2$.*

$a(u,v) = L(v)$ implique $\int -\nabla uv - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}\sigma + \int uv = \int fv$. Donc

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v \,\mathrm{d}x = 0$$

On admet que $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Donc $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (en tant que fonction $L^2(\partial\Omega)$.

3.4 Approximation variationnelle et introduction aux éléments finis

3.4.1 Approximation interne d'un problème variationnel

Soit V, a, L une formulation variationnelle telle que le théorème de Lax-Milgram s'applique. Soit V_h un sous-espace de V de dimension finie. L'approximation interne de la formulation variationnelle consiste à rechercher

$$u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = L(v_h)$$

Lemme 3.9.1
(FV_h) admet une unique solution u_h et sa résolution est équivalente à la résolution d'un système linéaire $A_h U_h = B_h$ où A_h est inversible.

Démonstration. L'existence et l'unicité de u_h découlent de Lax-Milgram appliqué sur V_h. Soit ϕ_j une base de V_h. On cherche $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i$ solution de FV_h. Par linéarité, $a(u_h, \phi_i) = L(\phi_i)$.

On décompose u_h et on trouve $AU_h = B_h$ avec $A = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j}$. ■

Lemme 3.9.2 Céa
Sous les hypothèses ci-dessus, on a

$$\|u - u_h\| \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

où u est solution de FV, u_h solution de FV_h, $M = \|a\|$ et α la constante de coercivité de a.

Démonstration. Pour tout $v_h \in V_h$, $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ et $V_h \subset V$ donc $a(u - u_h, v_h) = 0$. Soit $w_h \in V_h$ et $v_h = u_h - w_h$.

$$\begin{aligned}\alpha \|u - u_h\|^2 &\leqslant a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - w_h + w_h - u_h) = a(u - u_h, u - w_h) \\ &\leqslant M \|u - u_h\| \|u - w_h\|\end{aligned}$$

On passe à l'inf et c'est gagné. ■

Structurellement, dès qu'on a une formulation variationnelle, on dispose d'une méthode d'approximation interne qui est bien posée et qui se résoud par inversion de système linéaire et associée à une estimation d'erreur via le lemme de Céa.

3.4.2 La méthode des éléments finis

On suppose la formulation variationnelle associée) une EDP elliptique avec des conditions aux limites posées sur un domaine borné Ω.

V_h doit être une sev de H^1. On introduit un maillage de Ω, le paramètre h s'interprétant comme la taille maximale d'une maille. La base de V_h est alors constituée de fonctions simples (polynômiales par morceaux) à supports localisés sur quelques mailles seulement.

Exemple 3.1 On considère le problème $-u'' + a_0 u = f$ sur $]0, 1[$ avec $u(0) = u(1) = 0$ où $a_0 \in L^\infty$ positive pp et $f \in L^2$.

On sait que ce problème admet une unique solution $u \in H_0^1 \cap H^2$.

Prenons un maillage uniforme de $[0, 1]$ en N parts et $h = \frac{1}{N}$. On prend W_h l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que chacune des restrictions à $[\frac{j}{N+1}, \frac{j+1}{N+1}]$ soient affines. $W_h \subset H^1$.

Soit $V_h = W_h \cap H_0^1$. C'est un sous-espace de dimension N de H_0^1. Une base de W_h est constituée des fonctions nulles sur tous les $\frac{j}{N+1}$ sauf en un seul.

Si $a_0 = 0$, FV_h se ramène à réoudre $AU_h = B$ avec $U_h = (u(\frac{j}{N+1}))_j$,

$$A_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_0^1 \phi_j' \phi_i' = \begin{cases} 0 & \text{si } |i - j| \geqslant 2 \\ -\frac{1}{h} & \text{si } |i - j| = 1 \\ \frac{2}{h} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $B_j = \displaystyle\int_0^1 f(x)\phi_j(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, hA est une matrice bande avec des 2 sur la diagonale et des -1 sur la sur-diagonale et la sous-diagonale.

Dans le cas $a_0 \neq 0$, ce sont d'autres intégrales à calculer.

Définition 3.3 Soit $v \in H^1(0,1)$. On pose $\pi_h v(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j)\phi_j(x)$, l'interpolée de v aux points du maillage.

Proposition 3.2 Soit $v \in H^1(0,1)$. Alors $\lim_{h\to 0} \|v - \pi_h(v)\|_{H^1} = 0$.

Si de plus, $u \in H^2(0,1)$, il existe $c > 0$ indépendante de h telle que $\|v - \pi_h v\|_{H^1} \leqslant ch \|v''\|_2$.

Théorème 3.10 *Soit $f \in L^2$ et $u \in H_0^1$ solution (faible) de l'équation $-u'' + a_0 u = f$, $u(0) = u(1) = 0$.*

Alors si u_h est solution de FV_h, on a

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leqslant ch \|f\|_2$$

