Espaces vectoriels normés

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Introduction

On va parler d'espaces vectoriels normés et d'applications linéaires continues entre ces espaces. Les plus intéressant sont de dimension infinie donc on va principalement parler d'iceux. L'étude de ces objets peut être vue comme de l'algèbre linéaire en dimension infinie.

Un exemple d'application : l'équation de la corde vibrante

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

On sépare les variables et on arrive à l'équation $u(x,t) = f(x)g(t)$ et $\frac{f''(x)}{f(x)} = \alpha \frac{g''(t)}{g(t)}$.

Donc $\frac{f''(x)}{f(x)} = C_1$ et $\alpha \frac{g''(t)}{g(t)} = C_2$.

Les conditions au bord donnent des contraintes sur C_1 et C_2.

Généralisation

Plus généralement, des équations de physique donnent lieu à des problèmes dits de Sturm-Liouville du type :

$$\begin{cases} f''(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x) \\ R_1 f = \alpha_1 f(0) + \beta_1 f'(0) = 0 \\ R_2 f = \alpha_2 f(1) + \beta_2 f'(1) = 0 \end{cases}$$

avec q une fonction continue, α_1, α_2, β_1 et β_2 des réels donnés et λ un paramètre à déterminer.

Soit f_1, f_2 un système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire $f'' + qf = 0$.

Si $\begin{vmatrix} R_1 f_1 & R_2 f_1 \\ R_1 f_2 & R_2 f_2 \end{vmatrix} \neq 0$, alors il existe une fonction G (dite de Green) telle que pour tout h continue, la solution de $f'' + qf = h$ avec $R_1 f = R_2 f = 0$ est $\displaystyle\int_0^1 G(\cdot, t) h(t) \,\mathrm{d}t$.

Avec $h = \lambda f$, on a une nouvelle équation :

$$f = \lambda \int_0^1 G(\cdot, t) f(t) \,\mathrm{d}t$$

Avec K l'application linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 G(\cdot, t) f(t) \,\mathrm{d}t$, on remarque que λ est valeur propre de K et f est un vecteur propre associé.

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Rappels sur les espaces métriques

Définition 1.1 Soit (X, d) un espace métrique.

- Pour $x \in X$ et $r > 0$, on pose $B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}$ et $\overline{B}(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leqslant r\}$.
- $A \subset X$ est ouverte ssi c'est une réunion de boules ouvertes et fermée ssi A^c est ouverte.
- Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X converge vers $x \in X$ et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ ssi
$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$$
- Une suite $(x_n)_n$ et dite de Cauchy ssi :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant N, d(u_n, u_p) < \varepsilon$$
- (X, d) est dit complet ssi toute suite de Cauchy converge.
- Soit $A \subset X$ muni de la distance induite d_A. L'adhérence de A, notée $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. C'est aussi $\{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n, (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \text{ convergente}\} = \{x \in X, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing\}$.

Remarque 1.1 On n'a pas toujours $\overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

Proposition 1.1 Si X est complet, $A \subset X$ est complet pour la distance induite ssi A est fermé.

Exemples :

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets pour la distance naturelle $(x, y) \mapsto |x - y|$.
- Si X est complet et T quelconque, $l^\infty(T, X)$ est complet pour la distance uniforme.
- $C^0([a, b], \mathbb{K})$ est complet pour la distance uniforme.

- $C^\infty([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas complet pour la distance uniforme (pas fermé par Stone-Weierstrass)

Définition 1.2 Soient (X,d_1) et (Y,d_2) deux espaces métriques et $f : X \to Y$.
- f est continue en $x_0 \in X$ ssi

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in X, d_1(x,x_0) < \eta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

- f est continue sur X ssi elle est continue en tout $x \in X$ ssi l'image réciproque d'un ouvert de Y est un ouvert de X.
- f est uniformément continue ssi

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x, y \in X, d_1(x,y) < \eta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Proposition 1.2 Soient (X,d_1) et (Y,d_2) deux espaces métriques, $D \subset X$ une partie dense et $f : D \to Y$ uniformément continue.

Si (Y,d_2) est complet, alors f se prolonge de façon unique en une application uniformément continue $\widetilde{f} : X \to Y$.

Théorème 1.1 *Tout espace métrique s'injecte isométriquement et densément dans un unique complet à bijection isométrique près.*

1.2 Espaces vectoriels normés : généralités

Définition 1.3 Une norme sur E est une fonction $E \to \mathbb{R}$ positive vérifiant :
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

On dit que E est un espace vectoriel normé.

Proposition 1.3 $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance.

Définition 1.4 Un espace vectoriel normé est appelé Banach ssi il est complet.

Définition 1.5 Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes ssi il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que $c_1\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant c_2\|\cdot\|_1$.

Proposition 1.4 Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes sur E.
- $(E,\|\cdot\|_1)$ est de Banach ssi $(E,\|\cdot\|_2)$ l'est.
- Si $A \subset E$, A est compact pour $\|\cdot\|_1$ ssi il l'est pour $\|\cdot\|_2$.

Démonstration.

- Si x est de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$, elle est de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$ par équivalence des normes (il suffit de prendre $c_1\varepsilon$ au lieu de ε). Elle converge donc puisque $(E, \|\cdot\|_2)$ est supposé complet.
  Donc, en réutilisnt l'équivalence des normes dans la définition de limite, x converge dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Par symétrie, on a l'autre implication.
- Si $(A, \|\cdot\|_1)$ est compact, soit $x \in A^{\mathbb{N}}$.
  Par compacité de $(A, \|\cdot\|_1)$, il existe une sous-suite $x \circ \varphi$ qui converge dans $(A, \|\cdot\|_1)$ vers $\overline{x}$.
  On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|x_{\varphi(n)} - \overline{x}\right\|_1 = 0$ donc par équivalence des normes, $x \circ \varphi$ converge vers $\overline{x}$ pour $\|\cdot\|_2$.
  Donc $(A, \|\cdot\|_2)$ est compact. La réciproque est vraie par symétrie. ∎

Exemples :
- On redéfinit les normes usuelles (1, 2 et ∞) sur $\mathbb{K}^n$ et on remontre l'inégalité triangulaire pour 2, qui est facile par Cauchy-Schwarz.
  On remarque que ces trois normes sont équivalentes deux à deux.
- Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
  Il suffit de ramarquer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet, mais pas $(E, \|\cdot\|_1)$.
  Sinon, on peut montrer directement la non existence de constante c qui marche :
  $$f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 2n - 2n^2 t \end{cases}$$
  On a $\|f_n\|_1 = 1$ mais $\|f_n\|_\infty = 2n$.
- Sur $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_\infty$ et $|||f||| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
  En effet, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet alors que $(E, |||\cdot|||)$ l'est : si $(f_n)_n$ est de Cauchy, alors $(f_n)_n$ et $(f_n')_n$ sont de Cauchy dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Elles y convergent donc vers f et g. Il reste à montrer que f est C^1 et $g = f'$.
  Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$.
  Or, par convergence uniforme, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = g$.
  Donc $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $x_0 \in [0,1]$ et $h \in \mathbb{R}$.
  $$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - g(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} g(t)\,\mathrm{d}t - g(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (g(t) - g(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} |g(t) - g(x_0)|\end{aligned}$$

Par continuité de g en x_0, ce dernier terme tend vers 0 quand $h \to 0$.
Donc f est dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $g(x_0)$.
Par conséquent, $|||f_n - f||| = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty \to 0$.
On peut aussi montrer la non existence de constante c telle que $\|f'\|_\infty \leqslant c\|f\|_\infty$ pour tout f.
En effet, pour $f_n = x \mapsto x^n$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ mais $\|f'\|_\infty = n$.

1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 1.5

1. Toutes les normes sont équivalentes sur E.
2. E est complet.
3. Les boules fermées sont compactes pour toutes les normes.

Démonstration. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

1. Il suffit de montrer que toutes les normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \\ &\leqslant \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{c}\end{aligned}$$

Il reste à montrer l'existence de $c' > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leqslant c\|x\|$.
Soit S la sphère unité pour la norme infinie. Elle est compacte pour $\|\cdot\|_\infty$.

$$f : \begin{cases} S & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{cases}$$

est continue (en utilisant l'inégalité qu'on vient de montrer et l'inégalité triangulaire) sur un compact donc admet un minimum ε.
On a donc pour tout $x \in E$, $\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \geqslant \varepsilon$ donc $\|x\| \geqslant \varepsilon\|x\|_\infty$.

2. $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est homéomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ donc on a immédiatement la complétude.
3. On sait que les boules $B_\infty(x,1)$ sont compactes, ce qui assure le résultat.

■

COROLLAIRE 1.1 *Soit F un espace vectoriel normé quelconque et E un sous-espace de F de dimension finie. E est fermé.*

Démonstration. E est complet pour la norme induite donc il est fermé. ■

Définition 1.6 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. La norme de T est :

$$|\!|\!| t |\!|\!| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

1.4 Complété d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée.

THÉORÈME 1.2 *Soit (E', d') le complété de l'espace (E, d).*

E' admet une structure d'espace vectoriel normé telle que d' soit associée à la norme sur E'.

Démonstration. Notons $f : E \to E'$ l'application isométrique d'image dense.

Soit $x, y \in E'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans E qui convergent vers x et y.

- Définition de $x + y$.

$$\begin{aligned} d'(f(x_n + y_n), f(x_m, y_m)) &= \|x_n + y_n - x_m - y_m\| \\ &\leqslant \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \\ &= d'(f(x_n), f(x_m)) + d'(f(y_n), f(y_m)) \end{aligned}$$

  Comme $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ sont de Cauchy, $(f(x_n + y_n))_n$ l'est donc, par complétude de E', $(f(x_n + y_n))_n$ converge et on définit $x + y$ comme cette limite.
- Indépendance :
  Soient u qui converge vers x, v qui converge vers y.
  On définit z et w par $z_{2n} = x_n$, $z_{2n+1} = u_n$, $w_{2n} = y_n$ et $w_{2n+1} = v_n$.
  On a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(z_n) = x$ et $\lim\limits_{n \to \infty} f(w_n) = y$.
  Comme précédemment, $(f(z_n + w_n))_n$ converge vers $a \in E'$. Comme $(f(x_n + y_n))_n$ et $(f(u_n + v_n))_n$ en sont des sous-suites, leur limite commune est a.

- On définit de manière similaire λx comme $\lim_{n\to+\infty} f(\lambda x_n)$.
- Définition de la norme : on pose $|||x||| = d'(x,0)$.
  Soit $(x_n)_n$ tel que $(f(x_n))_n$ tende vers x. On a :
$$\begin{aligned} |||x||| &= d'(x,0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(0)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} d(x_n, 0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| \end{aligned}$$
- C'est une norme via le point précédent.
- d' est la distance associée à $|||\cdot|||$.
  Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ vérifient $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ convergent vers x et y, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n - y_n) = x - y$.
  Donc :
$$\begin{aligned} |||x-y||| &= \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = d'(x,y) \end{aligned}$$ ■

Exemple : L^p est le complété de $(C^0, \|\cdot\|_p)$.

1.5 Applications linéaires continues

Proposition 1.6 Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels normés, $T : E_1 \to E_2$.

T est continue sur E_1 ssi elle est continue en 0 ssi elle est lipschitzienne en 0.

Démonstration. Voir topo ■

Définition 1.7 Soit $T : E_1 \to E_2$ linéaire continue. On pose :
$$|||T||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$$

Remarque 1.2

- *On dit parfois bornée à la place de continue*
- *On peut prendre le sup sur la boule ou la sphère unité. De plus,* $\|T\| = \inf\{C > 0, \forall x \in E, \|Tx\| \leqslant C\|x\|\}$.
- *On note* $\mathscr{L}_c(E_1, E_2)$ *l'ensemble des applications linéaires continues de* $E_1 \to E_2$.

Proposition 1.7 $\mathcal{L}_c$ est stable par composition et la norme subordonnée est d'algèbre. C'est un Banach ssi l'espace d'arrivée est un Banach.

1.6 Théorème de Riesz

Proposition 1.8 Toute application linéaire est continue quand l'espace de départ est de dimension finie.

Démonstration. Toutes les normes sur E étant équivalentes, on peut le montrer pour le norme infinie.

T est alors lipschitzienne de constante de Lipschitz $\sum_{i=1}^{n} \|T(e_i)\|$ en notant $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. ∎

Lemme 1.2.1
Soit E un espace vectoriel normé et G un sous espace fermé et propre de F.

Soit $\delta \in]0,1[$. Il existe $x_0 \in F \setminus G$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $d(x_0, G) \geqslant \delta$.

Démonstration. G est propre donc il existe $y \in F \setminus G$. $d = d(y, G) > 0$ car G est fermé.

Il existe $z \in G$ tel que $\|y - z\| \leqslant \frac{d}{\delta}$.

On pose $x_0 = \frac{y-z}{\|y-z\|}$.

Soit $x \in G$.

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\| &= \left\| x - \frac{y-z}{\|y-z\|} \right\| \\
&= \left\| x + \frac{z}{\|y-z\|} - \frac{y}{\|y-z\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|y-z\|} \| \|y-z\| x + z - y\| \\
&\geqslant \frac{\delta}{d} \times d = \delta
\end{aligned}$$

∎

<u>Théorème 1.3</u> Riesz *Si F admet une boule compacte, alors F est de dimension finie.*

Démonstration. On peut se ramener à la boule unité par homéomorphisme.

Supposons que F soit de dimension infinie.

Soit $x_0 \in F$ de norme 1. $\mathbb{K}x_0 \neq F$ et $\mathbb{K}x_0$ est fermé donc il existe x_1 tel que $\|x_1 - x_0\| \geqslant \frac{1}{2}$.

On recommence avec $\operatorname{Vect}\{x_0, x_1\}$ et on obtient x_2 de norme 1 tel que $\|x_2 - x_1\| \geqslant \frac{1}{2}$.

Pour tout m, n, $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ donc x n'a pas de valeur d'adhérence alors qu'elle est dans un compact.

D'où le résultat. ∎

1.7 Quotient et séparation

Définition 1.8 On note p la surjection canonique de $E \to E/F$.

On définit une application $\|\xi\| = \inf\{\|x\|, x \in E, p(x) = \xi\}$.

Proposition 1.9 C'est une norme. Pour icelle, p est continue, ouverte et de norme inférieure à 1.

De plus, si E est un Banach, E/F aussi.

Définition 1.9 Une fonction $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une semi-norme sur E ssi N vérifie l'inégalité triangulaire et $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Théorème 1.4 *Soit E un espace vectoriel et N une semi-norme sur E.*

$F = \{x, N(x) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E et l'application $\|\cdot\| : E/F \to \mathbb{R}^+$ définie par $p(x) \to \|x\|$ est une norme sur E/F. E/F est appelé séparé de (E, N).

Démonstration. $N(\lambda x + y) \leqslant |\lambda| N(x) + N(y) = 0$ donc F est un espace vectoriel.

$\|\cdot\|$ est bien définie : si $p(x) = p(y)$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) = 0$ donc $N(x) = N(y)$.

Et on a tout fait pour que ce soit une norme. ■

1.8 Espaces L^p

Voir LEFO

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Définition 2.1 Un produit scalaire est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ sesquilinéaire positive : linéaire à gauche, $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$ et $\varphi(x,x) > 0$ si $x \neq 0$. On note de plus $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

THÉORÈME 2.1 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ)

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Démonstration. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors l'inégalité est triviale.

On peut donc supposer $\|x\| > 0$ et $\|y\| > 0$.

Soit $z = \|y\| x - \|x\| y$.

$0 \leqslant \langle z, z\rangle = 2\|x\|^2 \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \Re(\langle x, y\rangle)$.

Donc $\Re(\langle x, y\rangle) \leqslant \|x\| \|y\|$.

Soit λ de module 1 tel que $|\langle x, y\rangle| = \lambda\langle x, y\rangle$.

On a : $|\langle x, y\rangle| = \Re(\langle \lambda x, y\rangle) \leqslant \|\lambda x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$. ∎

COROLLAIRE 2.1 $\|\cdot\|$ *est une norme. Pour icelle,* $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ *est continue.*

Définition 2.2 Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien.

Si en plus il est complet pour la norme associée, alors c'est un Hilbert.

Proposition 2.1 Soit E un espace préhilbertien. Le complété de E en tant qu'espace vectoriel normé est un Hilbert.

Démonstration. OPS que $E \subset E'$, que la norme sur E est l'induction sur E de celle de E' et que E est dense dans E'.

Soit $x, y \in E'$ et $(x_n)_n, (y_n)_n$ qui convergent vers x, y.

On a :

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| &\leqslant |\langle x_n - x_m, y_n\rangle| + |\langle x_m, y_n - y_m\rangle| \\ &\leqslant \|x_n - x_m\| \, \|y_n\| + \|x_m\| \, \|y_n - y_m\|\end{aligned}$$

La suite $(\langle x_n, y_n\rangle)_n$ est de Cauchy et on définit le produit scalaire sur E' comme sa limite.

On vérifie que cette définition ne dépend pas de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, que sa restriction à E est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et que c'est un produit scalaire. ■

<u>Théorème 2.2</u> *Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$.*

Si $\langle x, y\rangle = 0$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

De plus, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Démonstration. On a $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$.

On somme et on retranche et ça marche. ■

<u>Définition 2.3</u> Deux éléments x et y d'un espace préhilbertien sont orthogonaux ssi $\langle x, y\rangle = 0$.

Deux parties A et B sont dites orthogonales ssi pour tout $(x, y) \in A \times B$, $\langle x, y\rangle = 0$.

L'orthogonal d'une partie A est $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0\}$.

Proposition 2.2 (Identité de polarisation) Soit E un espacen préhilbertien.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}$$

Démonstration. On a $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4\Re(\langle x, y\rangle)$.

C'est le résultat dans $\mathbb{R}$.

Si on remplace y par iy, on a $\|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2 = 4\Im(\langle x, y\rangle)$.

D'où le résultat dans $\mathbb{C}$ ■

Lemme 2.2.1

Soit E un espace préhilbertien et $x \in E$.

L'application $\varphi_x = y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire continue de norme $\|x\|$.

Démonstration. La linéarité est claire. La continuité aussi (Cauchy-Schwarz). ■

Proposition 2.3 Pour $F \subset E$, $F^\perp$ est fermé.

Démonstration. $F^\perp = \bigcap_{x \in F} \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ assure le résultat. ■

Remarque 2.1 Pour tout $F \subset E$, $F \subset (F^\perp)^\perp$.
On a égalité si $F \in \mathscr{G}(E)$ et F est fermé.
C'est suffisant si E est complet.

2.1 Théorème de projection

On bosse (ou pas) dans un espace de Hilbert H.

<u>Théorème 2.3</u> *Soit C une partie non vide convexe de H et $x \in H$.*
Il existe un unique $y_0 \in C$ tel que $\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\|, y \in C\}$.
De plus, pour tout $y \in C$, $\Re(\langle x - y_0, y - y_0\rangle) \leqslant 0$.

Démonstration.

$\exists$: On pose $d = d(x, C)$.
Soit $(y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
On pose $u_n = x - y_n$. Par identité de la médiane,

$$\|u_n + u_m\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 = 2(\|u_n\|^2 + \|u_m\|^2)$$

Donc,

$$4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2)$$

Et

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\,\|x - y_n\|^2 + 2\,\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

Comme $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$, $\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geqslant d$.
Donc, comme $\|x - y_n\| \to d$, $(y_n)_n$ est de Cauchy donc par complétude de H, $y_0 = \lim y_n$ existe et appartient à C car icelui est fermé. On a de plus $\|x - y_0\| = d$, d'où le résultat.

! : Soit $y_1 \in \mathbb{C}$ qui marche.
La suite $(y_0, y_1, y_0, y_1, \cdots)$ est une suite minimisante pour d. Par ce qui précède, cette suite converge.
Donc $y_0 = y_1$.

- On considère $f : t \mapsto \|x - (y_0 + t(y - y_0))\|^2$.
  Par convexité, $y_0 + t(y - y_0) \in C$.
  On a $f(0) = \|x - y_0\|^2$ et $f(t) \geqslant f(0)$ et de plus :

$$f(t) = \|x - y_0\|^2 - 2t\Re(\langle x - y_0, y - y_0\rangle) + t^2 \|y - y_0\|^2$$

  Donc $f'(0) = -2\Re(\langle x - y_0, y - y_0\rangle)$.
  Comme $f'(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} \geqslant 0$, l'inégalité s'en déduit. ■

COROLLAIRE 2.2 *Soit H un Hilbert et K un sev fermé de H.*
Pour $x \in H$, soit $P(x)$ la projection de x sur K.
- *P est linéaire continue et $\|P\| \leqslant 1$.*
- *$H = K \oplus K^\perp$.*
- *Pour tout $x \in H$, $x_1 \in K$ et $x_2 \in K^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$, on a $x_1 = P(x)$.*

Démonstration. Soit $x \in H$ et $y \in K$. On pose $y_0 = P(x)$. $y_0 + ty \in K$ pour tout t et par le théorème précédent, $\Re(\langle x - y_0, ty\rangle) \leqslant 0$ pour tout t.

Donc pour tout $y \in K$, $\Re(\langle x - y_0, y\rangle) = 0$. On prend $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\langle x - y_0, y\rangle| = \Re(\langle x - y_0, \lambda y\rangle)$.

On a donc $\langle x - y_0, y\rangle = 0$ pour tout $y \in K$ donc $x - y_0 \in K^\perp$.

Soit $x \in H$. Alors on a $x = P(x) + x - P(x)$.

Comme $H \cap H^\perp = \{0\}$, $H = K \oplus K^\perp$.

Ce qui assure les deux derniers points et la linéarité de P.

Pour tout $x \in H$, on a par Pythagore : $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2 \geqslant \|P(x)\|^2$ donc $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$.

■

Remarque 2.2 $H = K \oplus K^\perp$ n'est pas toujours vraie si H est seulement préhilbertien.

Définition 2.4 Soit H un Hilbert et K un sev fermé de H. L'application P est appellée projection orthogonale sur K.

Définition 2.5 Soit E un evn et $A \subset E$. On dit que A est totale ssi $\overline{\mathrm{Vect}\,\{A\}} = E$.

COROLLAIRE 2.3 *Soit H un Hilbert et $A \subset H$.*
$\overline{\mathrm{Vect}\,\{A\}} = A^{\perp\perp}$.
A est totale ssi $A^\perp = \{0\}$.

Démonstration. Soit $A \subset H$. $\overline{\mathrm{Vect}\,\{A\}} = K$ est un sev fermé de H.

On sait que $A^{\perp\perp}$ est un sev fermé de H qui contient A donc $K \subset A^{\perp\perp}$.

On a de plus deux parties orthogonales de H : $H = K \oplus K^\perp = A^\perp \oplus A^{\perp\perp}$.

On a $A \subset K$ donc $K^{\perp} \subset A^{\perp}$.
Soit $x \in A^{\perp\perp}$, $x = k_1 + k_2$ avec $k_1 \in K$ et $k_2 \in K^{\perp}$
$k_1 \in A^{\perp\perp}$ et $k_2 \in A^{\perp}$ donc $k_2 = 0$ et $x = k_1$. Donc $x \in K$.
Donc $K = A^{\perp\perp}$. ■

2.2 Dual et théorème de Riesz

Définition 2.6 On parle ici du dual topologique $E' = \mathscr{L}_c(E, \mathbb{K})$.

Remarque 2.3 Pour un $\mathbb{K}$-evn E, E' est aussi un $\mathbb{K}$-evn avec la norme $\|\!|\cdot|\!\|$. Il est de plus complet.

Proposition 2.4 Soit $x \in E$ avec E préhilbertien.
On pose $\varphi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle$.
$\varphi_x \in E'$ et $\|\!|\varphi_x|\!\| = \|x\|$ et $x \mapsto \varphi_x$ est une isométrie semilinéaire (linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Démonstration. Clair par Cauchy-Schwarz.
Le reste se voit. ■

Théorème 2.4 de Riesz *Soit H un Hilbert sur $\mathbb{K}$.*
$x \mapsto \varphi_x$ est une bijection isométrique semi-linéaire.

Démonstration. Il suffit de montrer la surjectivité.
Soit $l \in H'$ et $K = \mathrm{Ker}(l)$. Par continuité de l, K est fermé dans H.
Si $l = 0$, alors $l = \varphi_0$. Donc OPS $l \neq 0$ ie $K = H$.
On a alors $K^{\perp} \neq \{0\}$ et il existe $x \in K^{\perp} \setminus \{0\}$.
On a $l(y) = \varphi_x(y)$ sur K et $\varphi_x(x) = \|x\|^2$. On pose $\lambda = \frac{l(x)}{\|x\|^2}$.
On a alors $l(y) = \varphi_{\overline{\lambda}x}(y)$ sur K et $l(x) = \lambda \|x\|^2 = \varphi_{\overline{\lambda}x}(x)$.
Comme $K^{\perp} = \mathbb{K}x$ car $\dim(K^{\perp}) = 1$ et $H = K \oplus K^{\perp}$, on a $l = \varphi_{\overline{\lambda}x}$. ■

Remarque 2.4 Le théorème de Riesz ne reste plus valable si H est seulement préhilbertien. (Voir TD)

Corollaire 2.4 *Soit H et K deux Hilberts, et $T \in \mathscr{L}(H, K)$ il existe un unique adjoint T^* de T.*
De plus $\|\!|T|\!\| = \|\!|T^*|\!\|$.

Démonstration. On pose, pour $y \in K$ fixé, :

$$\psi : \begin{cases} H & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle T(x), y \rangle_K \end{cases}$$

ψ est linéaire continue donc, par Riesz, il existe un unique $T^*(y) \in H$ tel que $\psi(x) = \langle x, T^*(y)\rangle$.

On a donc une application T^* linéaire : si $x \in H$ et $y, z \in K$,

$$\langle x, T^*(ay+z)\rangle = \langle T(x), ay+z\rangle = \overline{a}\langle T(x), y\rangle + \langle T(x), z\rangle = \langle x, aT^*(y)+T^*(z)\rangle$$

Et continue car, par Riesz, pour $y \in K$, $\|\psi_y\| = \|T^*(y)\|$. Donc $\|T^*(y)\| \leqslant \|T\| \|y\|$.

Ceci montre que T^* est continue et que $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Si on fait ça avec T^* au lieu de T, on a l'égalité. ■

Remarque 2.5 Dans le cas $H = K = \mathbb{K}^n$, T s'identifie à une matrice et $T^*_{i,j} = \overline{T_{j,i}}$.

2.3 Bases hilbertiennes

Définition 2.7 (Base hilbertienne) Une famille $(e_n)_n$ est dite orthonormée ssi elle est orthonormée et totale : $\overline{\text{Vect}\{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}} = E$.

Remarque 2.6 Une famille orthonormée est libre.

Théorème 2.5 d'orthonormalisation de Gram-Schmidt *Soit $(x_n)_n$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormée $(y_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}\{y_0, \cdots, y_n\} = \text{Vect}\{x_0, \cdots, x_n\}$.*

Démonstration. On pose $E_{-1} = \{0\}$ et $E_n = \text{Vect}\{e_0, \cdots, e_n\}$.

Soit P_n la projection orthogonale de E_n sur E_{n-1}.

On pose $x'_n = x_n - P_n(x_n)$. On a alors $x'_n \in E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$.

On définit $y_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|}$. Ils forment clairement une famille orthonormée.

Par récurrence, on a le respect des drapeaux. ■

Remarque 2.7 La preuve précédente fournit un algorithme pour construire une famille orthonormée.

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 \\ x'_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \langle x_{n+1}, y_0\rangle y_0 \\ y_n &= \frac{x'_n}{\|x'_n\|} \end{aligned}$$

Définition 2.8 Un espace métrique est dit séparable ssi il contient une partie dénombrable dense.

<u>Théorème 2.6</u> (Existence de bases hilbertiennes : cas séparable) *Soit E un espace préhilbertien séparable. Il possède au moins une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Il existe D dense dans E. On prend une famille d'éléments $(x_n)_n$ libre de D tel que $\mathrm{Vect}\{(x_n)_n\} = \mathrm{Vect}\{D\}$.

On Gram-Schmidte cette famille et ça marche. ∎

Remarque 2.8 Ça marche aussi quand E n'est pas séparable via le lemme de Zorn.

Exemples : $(\mathrm{e}^{int})_n$ est une base hilbertienne de L^2. En effet :

<u>Théorème 2.7</u> (Féjer) *La moyenne de Césaro $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$ de la suite des sommes partielles de Fourier $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{ikt}$ converge uniformément vers f.*

Remarque 2.9 Ceci implique sue les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonction continues périodiques pour la norme infinie.

Comme $\|f\|_2 \leqslant \left\|f|_{[0,2\pi]}\right\|_\infty$, on a aussi la densité pour la norme 2. Donc $(\mathrm{e}^{int})_n$ est une base hilbertienne de L^2.

2.4 Inégalités de Bessel et Parseval

Soit E un espace préhilbertien.

Proposition 2.5 (Inégalité de Bessel) Soit $(e_n)_n$ une famille orthonormée dans E.

Alors pour tout x, la série des $|\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Démonstration. Pour tout n, on pose :

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \in E$$

Par orthonormalité, on a :

$$\begin{aligned}\|y_n\|^2 &= \left\langle \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{l=0}^{n} \langle x, e_l\rangle e_l \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=0}^{n} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle x, e_l\rangle} \langle e_k, e_l\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2\end{aligned}$$

On remarque que $\langle x - y_n, e_l\rangle = 0$ pour $l \leqslant n$ donc $\langle x - y_n, y_n\rangle = 0$.
Par Pythagore, on a $\|y_n\|^2 + \|x - y_n\|^2 = \|x\|^2$.
D'où $\|y_n\|^2 \leqslant \|x\|^2$ pour tout n.
D'où la convergence de la série et l'inégalité. ■

Lemme 2.7.1
Soit H un Hilbert et $(x_n)_n$ orthogonale dans H.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge dans H

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$.

Démonstration. Pour tout $m < n$, on a :

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k,l=m}^{n} \langle x_k, x_l\rangle = \sum_{k=m}^{n} \|x_k\|^2$$

Donc $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_n$ est de Cauchy dans H ssi $\left(\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2\right)_n$ l'est dans $\mathbb{R}$.
Comme H et $\mathbb{R}$ sont complets, on obtient l'équivalence.
Ce qui précède montre aussi l'égalité :

$$\forall n, \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2$$

En passant à la limite, on a le résultat. ■

Théorème 2.8 (Égalité de Parseval) *Soit E un espace préhilbertien séparable et $(e_n)_n$ une base de E.*

Soit $x \in E$.

(i) La série $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ *converge et on a*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(ii) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *converge dans* E *et on a :*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Démonstration. Soit H le complété de E. OPS $E \subset H$.

Par Bessel, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ converge dans $\mathbb{R}$.

Par le lemme, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge donc dans H.

De plus, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

On pose $y = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \in H$.

Il reste à montrer que $y = x$.

Pour tout k, on a

$$\begin{aligned}
\langle y, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle \\
&= \langle x, e_k \rangle
\end{aligned}$$

Et donc $\langle x - y, e_k \rangle = 0$ pour tout k.

Ceci implique que $\langle x - y, z \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathrm{Vect}\{(e_n)_n\}$.

Comme on a affaire à une base hilbertienne, on a $x - y = 0$ donc $x = y$. ∎

Corollaire 2.5 *Soit* H *un Hilbert,* K *un sev fermé de* H *et* P *la projection orthogonale sur* K*.*

Soit $(e_n)_n$ *une base hilbertienne de* K*. Alors pour tout* $x \in H$*, la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *converge dans* H *et on a :*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Démonstration. Pour tout n, on a :

$$\begin{aligned}\langle P(x), e_n\rangle &= \langle x, P^*(e_n)\rangle \\ &= \langle x, P(e_n)\rangle \\ &= \langle x, e_n\rangle\end{aligned}$$

L'assertion découle de l'égalité de Parseval appliquée à K et $P(x)$. ■

Définition 2.9 (Espaces de Hilbert isomorphes) Deux Hilberts H et K sont dits isomorphes ssi il existe une bijection linéaire $f : H \to K$ qui conserve le produit scalaire.

Théorème 2.9 de classification des Hilberts *Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors,*

- *Si H est de dimension finie n alors H est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire usuel.*
- *Si H est de dimension infinie, H est isomorphe à l^2.*

Démonstration. Soit $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H.

On pose $K = \mathbb{K}^n$. ou $K = l^2$ selon les cas. Par Bessel, l'application :

$$f : \begin{cases} H & \to & K \\ x & \mapsto & (\langle x, e_k\rangle)_k \end{cases}$$

est bien définie, linéaire, isométrique et surjective.

Ce qui conclut. ■

Exemple (Séries de Fourier) :

Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions L^2 2π-périodiques.

Le n-ème cœfficient de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T})$ est :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \langle f, e_n\rangle$$

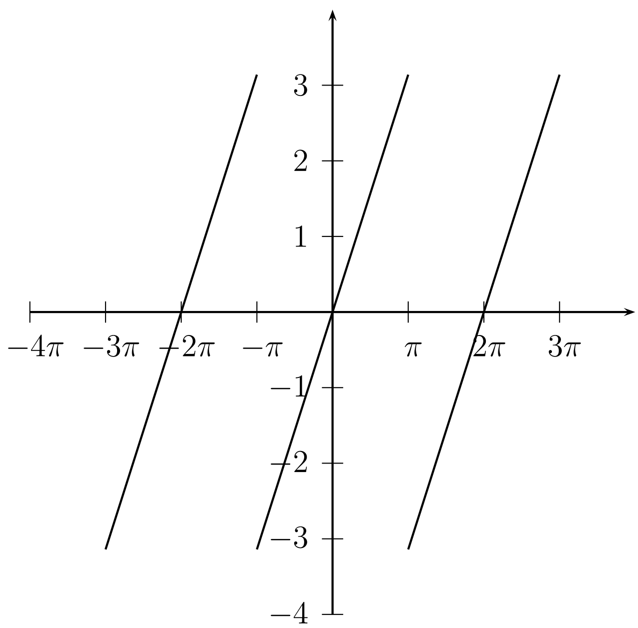
avec $(e_n)_n = (t \mapsto \mathrm{e}^{int})_n$ base hilbertienne.

Par Parseval,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

Application :

On prend $f = \mathrm{Id}\,|_{]-\pi,\pi[}$ prolongée en π par 0 et étendue par périodicité.



On a $c_0(f) = 0$ et :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n+1}}{in}$$

Donc $|c_n(f)|^2 = \frac{1}{n^2}$.
De plus,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$.
Par symétrie, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.5 Opérateurs compacts

Soit E un espace vectoriel normé.

Définition 2.10 (Opérateur compact) Soit $T : E \to E$ une application linéaire.

On dit que T est compacte ssi $\overline{T(\overline{B}(0,1))}$ est compact.

On note $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble d'icelles.

Remarque 2.10

– *Si $T : E \to E$ est compact, alors T est continu.*
– *Si E est de dimension infinie, Riesz assure que* Id *n'est pas compacte.*

Proposition 2.6 Pour $T : E \to E$ linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est compact

(ii) Pour toute suite x bornée dans E, il existe une extractrice φ telle que $(T(x_{\varphi(n)}))_n$ converge.

(iii) Pour toute suite x de $\overline{B}(0,1)$, il existe une extractrice φ telle que $(T(x_{\varphi(n)}))_n$ converge.

Démonstration.

(i)⇒(ii) Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ bornée.
Alors il existe $R > 0$ tel que $x_n \in \overline{B}(0,R)$
L'application $x \mapsto Rx$ est un isomorphisme de E et $T(\overline{B}(0,R)) = f(T(\overline{B}(0,1)))$.
Par conséquent, $\overline{T(B)}$ est compact ssi $\overline{T(\overline{B}(0,R))}$ est compact.

(ii)⇒(iii) trivial.

(iii)⇒(i) Il faut montrer que $\overline{T(\overline{B}(0,1))}$ est compact.
Soit y une suite de $\overline{T(\overline{B}(0,1))}$
Il existe $x_n \in B$ tel que $\|y_n - T(x_n)\| \leqslant \frac{1}{n}$.
Par (iii), il existe une extractrice φ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_{\varphi(n)}) = y$ existe dans E.
Alors, comme $\left\|y_{\varphi(n)} - T(x_{\varphi(n)})\right\| \leqslant \frac{1}{\varphi(n)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = y$.
D'où le résultat. ■

Corollaire 2.6 *L'ensemble $\mathcal{K}(E)$ est un sous-espace de $\mathscr{L}_c(E)$.*
C'en est aussi un idéal bilatère.

Démonstration. Soit $T, S \in \mathcal{K}(E)$.
Soit $(x_n)_n$ bornée. Il existe φ telle que $T(x_{\varphi(n)})$ converge.
Il existe ψ tel que $S(x_{\varphi(\psi(n))})$ converge.
Donc $T(x_{\varphi(\psi(n))}) + S(x_{\varphi(\psi(n))})$ converge et $T + S \in \mathcal{K}(E)$.
La même méthode assure que c'est un espace vectoriel.
De plus, pour tout $T \in \mathcal{K}(E)$ et $S \in \mathscr{L}_c(E)$, $TS \in \mathcal{K}(E)$ et $ST \in \mathcal{K}(E)$. ■

Remarque 2.11

(i) Soit $T : E \to E$ une application linéaire de rang fini.
Alors T est compact. En effet, comme T est continue, $T(B)$ est bornée et inclus dans un sev de dimension finie donc fermé.
Donc $\overline{T(B)}$ est fermé borné en dimension finie donc compact.

(ii) *Soit $T : E \to E$ un homéomorphisme linéaire.*
SI E est de dimension infinie, T n'est pas compact sinon $\mathrm{Id} = TT^{-1}$ le serait, ce qui contredirait le théorème de Riesz.

Proposition 2.7 Soit E un Banach. Alors $\mathcal{K}(E)$ est fermé dans $\mathscr{L}_c(E)$ pour la norme induite.

Démonstration. Soit T_n une suite de $\mathcal{K}(E)$ et $T \in \mathscr{L}_c(E)$ telle que $\|T - T_n\|$ tend vers 0.

On veut montrer $T \in \mathcal{K}(E)$.

Il suffit de montrer $\overline{T(B)}$ compact donc $T(B)$ précompact (car comme E est complet, $\overline{T(B)}$ l'est aussi).

Soit $\varepsilon > 0$. Soit n tel que $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Comme $T_n \in \mathcal{K}(E)$, il existe $F \subset B$ fini tel que $T_n(B) \subset \bigcup_{x\in F} B(T_n(x), \frac{\varepsilon}{3})$.

On a $T(B) \subset \bigcup_{x\in F} B(T(x), \varepsilon)$. en effet, si $y = T(z) \in T(B)$ alors il existe $x \in F$ tel que $\|T_n(z) - Z_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Alors

$$\|T(z) - T(x)\| \leqslant \|T(z) - T_n(z)\| + \|T_n(z) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Proposition 2.8 Soit H un Hilbert séparable et $T \in \mathcal{K}(H)$.

(i) Il existe une suite d'opérateurs $T_n \in \mathcal{L}_c(H)$ de rang fini tel que $\|T_n - T\|$ converge vers 0.

(ii) $T^* \in \mathcal{K}(H)$

Démonstration. Il est loisible de supposer que $\dim(H) = +\infty$.

Soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H. On note P_n la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,\{e_1, \cdots, e_n\}$.

$P_n T$ est de rang fini. Montrons que $\|P_n T - T\| \to 0$.

Soit Q_n la projection orthogonale sur $E_n^{\perp}$.

On a $Q_n = \mathrm{Id} - P_n$. Comme $T - P_n T = Q_n T$, il suffit de montrer que $\|Q_n T\| \to 0$.

Soit $y \in H$. Par Parseval,

$$\|Q_n y\|^2 = \sum_{i>n} |\langle y, e_i\rangle|^2$$

qui est le reste d'une série convergente qui converge vers $\|y\|^2$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Q_n y\| = 0$.

La suite $(\|Q_nT\|)_n$ est décroissante donc il suffit de montrer que

$$\inf_n \|Q_nT\| = 0$$

Par l'absurde, notons $c > 0$ cet inf.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B$ tel que $|\,\|Q_nT(x_n)\| - \|Q_nT\|\,| < \frac{c}{2}$.
On a alors $\|Q_nT(x_n)\| \geqslant \frac{c}{2}$.
Comme T est compact, il est loisible de supposer que $(T(x_n))_n$ converge vers $y \in H$.
Soit N tel que $\|y - T(x_n)\| < \frac{c}{4}$ pour $n \geqslant N$.
Alors pour tout $n \geqslant N$,

$$\|Q_n(y)\| \geqslant \|Q_nT(x_n)\| - \|Q_nT(x_n) - Q_n(y)\| \geqslant \frac{c}{2} - \|Q_n\|\frac{c}{4} \geqslant \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{2}$$

Ceci contredit $\|Q_n(y)\| \to 0$. D'où (i).
Pour le deuxième point, on a :

$$\|T^* - T^*P_n\| = \|(T - P_n^*T)^*\| = \|T - P_n^*T\| = \|T - P_nT\| \to 0$$

Comme T^*P_n est de rang fini, la proposition précédente implique que $T^* \in \mathcal{K}(H)$. ∎

2.6 Opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt

Soit (X, B, μ) un espace mesuré σ-fini.
On fixe par la suite $k \in L^2(X^2, \mu \otimes \mu)$.
Pour $f \in L^2$, on définit $K(f) = x \mapsto \int_X k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$.

Proposition 2.9

(i) Pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto k(x,y)f(y)$ est intégrable.

(ii) $K(f) \in L^2$.

(iii) K est linéaire continue de norme $\|K\| \leqslant \|k\|_2$.

(iv) K^* est l'opérateur défini avec $\widetilde{k} = (x,y) \mapsto \overline{k(y,x)}$

Démonstration.

(i) Fubini

(ii) Cauchy-Schwarz

(iii) Cauchy-Schwarz

(iv) clair ∎

Proposition 2.10 Soit $k \in L^2$ alors K est compact.

Démonstration. On va montrer qu'il existe une suite d'opérateurs $K_n \in \mathscr{L}_c(L^2)$ de rang fini tel que $\|K_n - K\| \to 0$.

Soit f_n une base hilbertienne de L^2.

Alors $(f_n \otimes f_m)_{n,m}$ est une base hilbertienne de $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

Donc via Parseval :

$$k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \langle k | f_n \otimes f_m \rangle f_n \otimes f_m$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$k_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \langle k | f_i \otimes f_j \rangle f_i \otimes f_j$$

On a bien $\|k - k_n\|_2 \to 0$ et si $K_n \in \mathscr{L}_c(L^2)$ est l'opérateur de noyau k_n, on a :

$$K_n(f) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \langle k, f_i \otimes f_j \rangle f_i(x) \int_X f_m(y) f(y) \,\mathrm{d}\mu(y)$$

Pour tout $f \in L^2$, on a :

$$\mathrm{Im}(K_n) \subset \mathrm{Vect}\,\{f_0, \cdots, f_n\}$$

donc K_n est de rang fini.

Par la proposition précédente, $\|K_n - K\| \to 0$. ∎

2.7 Théorème spectral pour les opérateurs compacts

Soit H un espace de Hilbert séparable.

Définition 2.11 $T \in \mathscr{L}_c(H)$ est dit auto-adjoint ssi $T^* = T$.

Théorème 2.10 (spectral) *Soit $T \in \mathscr{L}_c(H)$ compact auto-adjoint.*

Alors :

(i) H possède une base hilbertienne de vecteurs propres

(ii) Les valeurs propres sont réelles

(iii) Si $\dim(H) = \infty$, alors l'ensemble des valeurs propres est une suite qui tend vers 0

(iv) Les espaces propres correspondant à un valeur propre non nulle sont de dimension finie.

(v) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres telles que $|\lambda| \geqslant \varepsilon$.*

Démonstration.

Lemme 2.10.1
Soit $T \in \mathscr{L}_c(H)$ auto-adjoint.

(i) $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.

(ii) Si K est un sev de H stable alors $K^\perp$ aussi.

(iii) Toute valeur propre de T est réelle

(iv) Pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda_1 \mathrm{Id}) \perp \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 \mathrm{Id})$.

Démonstration.

(i) $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$

(ii) Pour $x \in K^\perp$ et $y \in K$,

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = 0$$

Donc $T(x) \in K^\perp$.

(iii) Soit λ une valeur propre de T et x un vecteur propre. Alors :

$$\lambda \|x\|^2 = \langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

Donc $\lambda = \overline{\lambda}$.

(iv) Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda_1 \mathrm{Id})$ et $y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 \mathrm{Id})$. Alors :

$$\lambda_1\langle x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \lambda_2\langle x, y\rangle$$

Donc, comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\langle x, y\rangle = 0$. ∎

Lemme 2.10.2
Soit $T \in \mathscr{L}_c(H)$ compact auto-adjoint. Alors

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$ est de dimension finie

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de module supérieur à ε.

Démonstration.

(i) Soit $K = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$. K est un sev fermé et $T|_K$ est compact.
Comme $\lambda \neq 0$, $\lambda \mathrm{Id}$ est inversible donc $\dim(K) < \infty$ (boule unité compacte).

(ii) Par l'absurde, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite de valeurs propres distinctes $(\lambda_n)_n$ de T avec $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$ pour tout n.

Soit $x_n \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_n \operatorname{Id})$ de norme 1. La famille $(x_n)_n$ est orthonormée.

Comme T est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ tel que la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} T(x_{\varphi(n)})$ existe.

Pour $n \neq m$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|T(x_{\varphi(n)}) - T(x_{\varphi(m)})\right\|^2 &= \left\|\lambda_{\varphi(n)} x_{\varphi(n)} - \lambda_{\varphi(m)} x_{\varphi(m)}\right\|^2 \\ &= \lambda_{\varphi(n)}^2 + \lambda_{\varphi(m)}^2 \\ &\geqslant 2\varepsilon^2\end{aligned}$$

■

Lemme 2.10.3
Soit $T \in \mathscr{L}_c(H)$ compact auto-adjoint.

Alors $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T.

Démonstration. Il est loisible de supposer $T \neq 0$.

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de norme 1 tels que $\|T(x_n)\| \to \|T\|$. On a :

$$\begin{aligned}\left\|T^2(x_n) - \|T\|^2 x_n\right\|^2 &= \left\|T^2(x_n)\right\|^2 - 2\|T\|^2 \langle T^2(x_n), x_n\rangle + \|T\|^4 \|x_n\|^2 \\ &\leqslant \|T\|^4 - 2\|T\|^2 \langle T^2(x_n), x_n\rangle + \|T\|^4 \\ &= 2(\|T\|^4 - 2\|T\|^2 \|T(x_n)\|^2) \to 0\end{aligned}$$

Comme T est compact, T^2 aussi. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\lim\limits_{n \to +\infty} T^2(x_n)$ existe.

Comme $\|T\| \neq 0$, ce qui précède montre que

$$x = \lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1}{\|T\|^2} \lim_{n \to +\infty} T^2(x_n)$$

existe et on a :

$$T^2(x) = \|T\|^2 x$$

Soit $y = T(x) - \|T\| x$. Si $y = 0$, $\|T\|$ est valeur propre. Sinon,

$$T(y) + \|T\| y = (T^2 - \|T\|^2 \operatorname{Id})(x) = 0$$

et $-\|T\|$ est valeur propre. ■

On pose $K = \overline{\operatorname{Vect}\left\{\bigcup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id})\right\}}$.

K est stable par T. Si $K \neq H$ alors $K^\perp \neq 0$ donc $K^\perp$ est stable par T.

$T|_{K^\perp}$ est compact donc possède une valeur propres. L'espace propre correspondant est alors contenu dans K, ce qui est absurde car ce sous-espace est contenu dans $K^\perp$.

Donc $K = H$.

En choisissant une base orthonormée de chacun des espaces propres de T, on obtient une famille orthonormée E de H (car les sep sont orthogonaux)

E est totale car $K = H$. ■

Chapitre 3

Quelques théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle

3.1 Le théorème de Hahn-Banach

<u>Théorème 3.1</u> Version réelle *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et $\varphi : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.*

Alors il existe $\psi \in E'$ telle que $\psi|_F = \varphi$ et $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Démonstration.

1. F est de codimension 1 dans E.
   On écrit $E = F \oplus \mathbb{R}x_0$.
   Toute extension linéaire $\psi : E \to \mathbb{R}$ de φ est définie par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ au moyen de la formule :
   $$\psi(y + tx_0) = \varphi(y) + \lambda t$$
   On a $\|\varphi\| = \|\psi\|$ ssi $\|\psi\| \leqslant \|\varphi\|$ (en effet, l'autre inégalité provient du fait que ψ est une extension de φ).
   On a aussi, pour $t \neq 0$, $|\psi(y + tx_0)| = |\varphi(y) + t\lambda| = |t||\varphi(\frac{y}{t}) + \lambda|$.
   Donc $|\psi(y + tx_0)| \leqslant \|\varphi\| \, \|y + tx_0\|$ ssi $|\psi(y + x_0)| \leqslant \|\varphi\| \, \|y + x_0\|$.
   L'inégalité précédente possède une solution ψ ssi il existe λ tel que
   $$\forall y \in F, |\varphi(y) + \lambda| \leqslant \|\varphi\| \, \|y + x_0\|$$
   Un tel λ existe ssi
   $$\sup\{- \|\varphi\| \, \|y + x_0\| - \varphi(y), y \in F\} \leqslant \inf\{\|\varphi\| \, \|z + x_0\| - \varphi(z), z \in F\}$$

Montrons le : soit $y, z \in F$.

$$\varphi(y-z) \leqslant \|\varphi\| \, \|y-z\| \leqslant \|\varphi\| \left(\|y+x_0\| + \|z+x_0\|\right)$$

Comme $\varphi(y-z) = \varphi(y) - \varphi(z)$, on a le résultat recherché.

2. Si F est un sev quelconque, on pose $\mathcal{F}$ l'ensemble des (G, ψ) avec G un sev contenant F et $\psi \in G'$ prolongement de φ.
   Cet ensemble est ordonné par $(G_1, \psi_1) \leqslant (G_2, \psi_2)$ ssi $G_1 \subset G_2$ et $\psi_2|_{G_1} = \psi_1$.
   $\mathcal{F} \neq 0$, c'est un ensemble inductif :
   Si $\{(G_i, \psi_i), i \in I\}$ est totalement ordonnées, alors $G = \bigcup\limits_{i \in i} G_i$ est un sev de E.
   On définit $\psi : G \to \mathbb{R}$ par $\psi|_{G_i} = \psi_i$ pour tout $i \in I$.
   Ceci est bien défini car la famille est totalement ordonnée.
   Donc $\psi_i|_{G_j} = \psi_j$ si $(G_j, \psi_j) \leqslant (G_i, \psi_i)$.
   $\psi|_F = \varphi$ et $\|\varphi\| = \|\psi\|$ donc $(G, \psi) \in \mathcal{F}$.
   Par ailleurs, $(G_i, \psi_i) \leqslant (G, \psi)$ donc $\mathcal{F}$ est inductif.
   Par le lemme de Zorn, cette partie admet un élément maximal (G_0, ψ_0).
   Montrons que $G_0 = E$. Supposons le contraire. Il existe $x_0 \in E \setminus G_0$.
   On a $G = G_0 \oplus \mathbb{R}x_0$.
   Alors G_0 est de codimension 1 dans G et le premier point assure qu'il existe $\psi \in G$" tel que $\|\psi\| = \|\psi_0\|$ et $\psi|_{G_0} = \psi_0$.
   Alors $(G, \psi) \in \mathcal{F}$ et $(G_0, \psi_0) \leqslant (G, \psi)$.
   Comme (G_0, ψ_0) est maximal, on a $G = G_0$, contradiction. Donc $G_0 = E$ et $\psi \in E'$ est une forme linéaire avec les propriétés voulus. ∎

<u>Théorème 3.2</u> (version complexe) *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, F un sev et $\varphi \in F'$. Alors il existe $\psi \in E'$ avec $\|\psi\| = \|\varphi\|, \psi|_F = \varphi$*

Démonstration. Découle de la version réelle (cf proposition suivante) ∎

Proposition 3.1 Soit E un evn sur $\mathbb{C}$. Soit $E_{\mathbb{R}}$ l'espace E vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'application

$$\phi : \begin{cases} E' & \to & E'_{\mathbb{R}} \\ \varphi & \mapsto & \Re(\varphi) \end{cases}$$

est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire et isométrique.

3.2 Application du théorème de Baire : théorème de l'application ouverte

THÉORÈME 3.3 BAIRE *Soit (X, d) un métrique complet.*

Soit F_n une suite de fermés de X d'intérieur vide.

Alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ est d'intérieur vide.

THÉORÈME 3.4 DE L'APPLICATION OUVERTE *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}_c(E, F)$ surjective.*

Alors T est ouverte.

COROLLAIRE 3.1 DES ISOMORPHISMES DE BANACH *Soient E et F des Banachs et $T : E \to F$ linéaire, bijective et continue.*

Alors $T^{-1} : F \to E$ est continue.

Démonstration. T^{-1} est continue ssi T est ouverte. ■

Remarque 3.1 Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que E muni de chacune des normes soit complet.

S'il existe $c > 0$ tel que $\|\cdot\|_2 \leqslant c \|\cdot\|_1$ alors ces normes sont équivalentes.

Démonstration du théorème.

Lemme 3.4.1
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $T \in \mathscr{L}_c(E, F)$ surjective.

T est ouverte ssi

$$\exists c > 0, \forall y \in F, \exists x \in E, T(x) = y \text{ et } \|x\| \leqslant c \|y\|$$

Démonstration. Soit $\widehat{E} = E/\operatorname{Ker}(T)$. Comme T est continue, $\operatorname{Ker}(T)$ est fermé et $\widehat{E}$ est muni de la norme quotient.

T induit une application $\widehat{T}$ et bijective. De plus $\widehat{T}$ est ouverte ssi $\widehat{T}^{-1}$ est continue ssi elle est lipschitzienne, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in E, \|p(x)\| < c \left\|\widehat{T}(p(x))\right\| = c \|T(x)\|$$

Comme T est ouverte ssi $\widehat{T}$ l'est, et que $\|p(x)\| = \inf_{p(z)=p(x)} \|z\|$, on prend z qui atteint l'inf et on a :

$$\|z\| \leqslant c \|y\|$$

D'où la propriété recherchée. ■

Soit $B=\overline{B}(0,1)$. On a $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} nB$.

Comme T est surjective, $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{nT(B)}$.

Par Baire, il existe n tel que $\overline{nT(B)}$ soit d'intérieur non vide (car F complet).

Comme $y\mapsto ny$ est un homéomorphisme, $\widehat{T}(B)$ est d'intérieur non vide, on prend y_0 dedans.

Comme $\overline{T(B)}$ est convexe, son intérieur A aussi. De plus, icelle est invariante par l'homéomorphisme $y\mapsto -y$ donc

$$0=\frac{y_0-y_0}{2}\in A$$

Il existe $r>0$ tel que $\overline{B}(0,r)\subset A$. Donc pour tout $y\in\overline{B}(0,r)$ et $\varepsilon>0$, il existe $x\in B$ tel que $\|T(x)-y\|\leqslant\varepsilon$.

Soit $Y\in F$. Par récurrence sur n, on construit deux suites x et y telles que $x_0=0$, $y_0=y$ et

$$y_n=T(x_{n+1})y_{n+1} \text{ et } \|x_{n+1}\|\leqslant\frac{\|y_n\|}{r}, \|y_{n+1}\|\leqslant\frac{\|y_n\|}{r}$$

Si x et y sont construits jusqu'au rang n, et si $y_n=0$ alors on pose $x_{n+1}=0=y_{n+1}$.

Sinon, $\frac{y_n}{\|y_n\|}r\in\overline{B}(0,r)$ donc il existe $z\in B$ tel que $\left\|T(z)-\frac{y_n}{\|y_n\|}r\right\|\leqslant\frac{r}{2}$.

On pose alors $x_{n+1}=\frac{\|y_n\|}{r}z$ et $y_{n+1}=y_n-T(x_{n+1})$.

On a $\|x_{n+1}\|\leqslant\frac{\|y_n\|}{r}$ et $\|y_{n+1}\|=\|y_n-T(x_{n+1})\|\leqslant\frac{\|y_n\|}{2}$.

On a alors $\|y_n\|\leqslant\frac{\|y\|}{2^n}$ donc $\|x_{n+1}\|\leqslant\frac{\|y\|}{2^n r}$.

Comme E est complet, $x=\sum_{k=0}^{\infty}x_k$ est normalement convergente.

On a

$$\|x\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|y\|}{2^k r}\leqslant\frac{\|y\|}{r}$$

et

$$T(x)=\sum_{k=1}^{\infty}T(x_k)=\lim(y-y_n)=y$$

car $\|y_n\|\leqslant\frac{\|y\|}{2^n}\to 0$. ∎

