Topologie générale

Pierron Théo

ENS Ker Lann

Table des matières

Chapitre 1

Espaces topologiques, espaces métriques

1.1 Espaces topologiques : généralités

1.1.1 Espace topologique

Définition 1.1 Soit $E \neq \varnothing$. Un espace topologique est un couple (E, τ) où E est un ensemble et $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ tel que :

- $\forall (\omega_i)_i \in \tau^I$, $\bigcup\limits_{i \in I} \omega_i \in \tau$.
- τ est stable par intersection finie.
- $(\varnothing, E) \in \tau^2$.

Les éléments de τ sont appelés ouverts. On appelle fermés les ω_i^c. τ est la topologie sur E.

Définition 1.2 (Ordre sur les topologies) Soit E muni de τ_1 et τ_2.

On dit que τ_1 est plus grossière que τ_2 ou que τ_2 est plus fine que τ_1 ssi $\tau_1 \subset \tau_2$.

1.1.2 Notion de voisinage d'un point

Définition 1.3 Soit (E, τ) un espace topologique et $x \in E$.

On appelle voisinage de x tout $V \subset E$ contenant $\omega \in \tau$ avec $x \in \omega$.

On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 1.1

- $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$.
- $\forall (V_i)_i \in \mathcal{V}_x^{[\![1,p]\!]}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{p} V_i \in \mathcal{V}_x$.

<u>THÉORÈME 1.1</u> *Soit (E, τ) un espace topologique et $\omega \subset E$.*

ω est ouvert ssi ω est un voisinage de tous ses points.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Clair

$\Leftarrow$ Soit $x \in \omega$. ω est un voisinage de x donc il existe $\Omega_x \subset \omega$ ouvert contenant x.

On a $\omega \subset \bigcup_{x\in\omega} \Omega_x \subset \omega$. Donc ω est ouvert. ∎

1.1.3 Bases d'ouverts et de voisinages

<u>Définition 1.4</u> $B \subset \tau$ est une base d'ouverts ssi tout ouvert est réunion d'ouverts de B.

$B_x \subset \mathcal{V}_x$ est une base de voisinages de x (ou système fondamental de voisinages de x) ssi $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists B \in B_x, x \in B \subset V$.

Proposition 1.2 Soit $\varnothing \neq B \subset \tau$ avec $\varnothing \in B$.

B est une base d'ouverts ssi $\forall x \in E, B_x = \{b \in B, x \in b\}$ est une base de voisinages de x.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit B base d'ouverts, $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}_x$.

Il existe $\omega \in \tau$ avec $x \in \omega \subset V$. On a $\omega = \bigcup_{i\in I} B_i$ avec $B_i \in B$ donc il existe i_0 tel que $x \in B_{i_0} \subset \omega \subset V$ et $B_{i_0} \in B_x$.

Donc B_x est une base de voisinages de x

$\Leftarrow$ On suppose que pour tout $x \in E$, B_x est une base de voisinages de x.

Soit $\omega \in \tau$ et $x \in \omega$. $\omega \in \mathcal{V}_x$ donc il existe $B \in B_x$ tel que $x \in B \subset \omega$.

Notons b_x la réunion des B tels que $x \in B \subset \omega$. On a $\omega = \bigcup_{x\in\omega} b_x$. Donc B est une base d'ouverts. ∎

Proposition 1.3 Soit E un espace muni de deux topologies (τ_1, τ_2) et B_i une base d'ouverts de τ_i.

$\tau_1 \subset \tau_2 \quad \text{ssi} \quad \forall x \in E, \forall B_1 \in B_{1,x}, \exists B_2 \in B_{2,x}, x \in B_2 \subset B_1$

Démonstration.

$\Rightarrow$ $B_1 \in B_{1,x} \subset \tau_1 \subset \tau_2$ donc B_1 est un τ_2-voisinage de x donc, par définition de $B_{2,x}$, il existe $B_2 \in B_{2,x}$ tel que $x \in B_2 \subset B_1$.

$\Leftarrow$ Soit $\omega \in \tau_1$ et $x \in \omega$. ω est ouvert donc τ_1-voisinage de x donc il existe $B_1 \in B_{1,x}$ tel que $x \in B_1 \subset \omega$.

Or, par hypothèse, il existe $B_2 \in B_{2,x}$ tel que $x \in B_2 \subset B_1 \subset \omega$. Donc ω est un τ_2-voisinage de x. ∎

<u>Définition 1.5</u> (E, τ) est séparé (de Hausdorff) ssi

$$\forall x \neq x' \in E, \exists(\omega_x, \omega_{x'}) \in \tau^2 \text{ tel que } x \in \omega_x, x' \in \omega_{x'} \text{ et } \omega_x \cap \omega_{x'} = \varnothing$$

Proposition 1.4 Dans un espace topologique séparé, tous les points sont fermés.

Démonstration. Montrons que $\{x\}^c$ est ouvert ie qu'il est voisinage de tous ses points.

Soit $x \neq x'$. Il existe $(\omega_x, \omega_{x'}) \in \tau^2$ tel que $x \in \omega_x$, $x' \in \omega_{x'}$ et $\omega_x \cap \omega_{x'} = \varnothing$.

En particulier, $x' \in \omega_{x'} \subset \{x\}^c$, ce qui conclut. ∎

1.2 Espaces métriques

1.2.1 Distances et espaces métriques

<u>Définition 1.6</u> On appelle distance sur E toute application de $E^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $d(x, y) = 0 \quad \text{ssi} \quad x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$.

<u>Définition 1.7</u> On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre $x \in E$ et de rayon $n \in \mathbb{R}^+$ et on note $\overset{\circ}{B}_d(x, r)$ (resp. $\overline{B}_d(x, r)$) l'ensemble $\{y \in E, d(x, y) < r\}$ (resp. $\{y \in E, d(x, y) \leqslant r\}$).

<u>Définition 1.8</u> Soit (E, d) un espace métrique.

On appelle topologie associée à d la topologie τ_d définie sur E par : $\tau_d = \{\omega \in \mathcal{P}(E), \forall x \in \omega, \exists r > 0, \overset{\circ}{B}_d(x, r) \subset \omega\}$.

Démonstration. C'est bien une topologie :

- $\varnothing, E \in \tau_d$
- Soit $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{p} \omega_i$. Pour tout i, il existe $r_i > 0$ tel que $\overset{\circ}{B}_d(x, r_i) \subset \omega_i$.

  On pose $r = \min(r_i) > 0$. On a $\overset{\circ}{B}_d(x, r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{p} \omega_i$.
- Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} \omega_i$. Il existe i_0 tel que $x \in \omega_{i_0}$ et $r > 0$ tel que $\overset{\circ}{B}_d(x, r) \subset \omega_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i \in I} \omega_i$. ∎

Proposition 1.5 Soit (E, d) un espace métrique. Les boules ouvertes sont des ouverts de E. Elles forment une base d'ouverts de τ_d. Les boules fermées sont des fermés de E.

Démonstration.

- On veut montrer que $\overset{\circ}{B}_d(x_0, r) \in \tau_d$. Soit $x \in \overset{\circ}{B}_d(x_0, r)$.
  Soit $y \in \overset{\circ}{B}_d(x, r - d(x, x_0))$.
  $$d(x_0, y) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y) \leqslant d(x_0, x) + r - d(x_0, x) \leqslant r$$
  D'où le résultat.
- On veut montrer que $\overline{B}_d(x_0, r)$ est fermée ie $\overline{B}_d(x_0, r)^c \in \tau_d$.
  Soit $x \in \overline{B}_d(x_0, r)^c$. On a $\overset{\circ}{B}_d(x, d(x - x_0) - r) \subset \overline{B}_d(x_0, r)^c$ donc $\overline{B}_d(x_0, r)^c \in \tau_d$.
- Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des boules ouvertes. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts revient à montrer que $B_x = \{B \in \mathcal{B}, x \in B\}$ est une base de voisinages de x pour tout x.
  Soit $V \in \mathcal{V}_x$ pour τ_d. Il existe $\omega \in \tau_d$ tel que $x \in \omega \subset V$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $\overset{\circ}{B}_d(x, r) \subset \omega \subset V$. De plus $\overset{\circ}{B}_d(x, r) \in B_x$, ce qui assure le résultat. ■

Corollaire 1.1 *Tout ouvert de τ_d est réunion de boules ouvertes.*

Corollaire 1.2

- $\{\overset{\circ}{B}_d(x, r), r > 0\}$ *est une base de voisinages de x.*
- $\{\overset{\circ}{B}_d(x, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base de voisinages* DÉNOMBRABLE *de x.*

Définition 1.9 On dit que (E, τ) est métrisable ssi il existe une distance d sur E tel que $\tau = \tau_d$.

CN de métrisabilité :

- Tout point doit avoir une base dénombrable de τ-voisinages.
- Il doit être séparé.

Remarque 1.1

- *La topologie grossière est non métrisable car non séparée.*
- *Toute topologie discrète est métrisable avec $d(x, x') = 1 - \delta_{x,x'}$. ($\tau_d$ est une topologie discrète car $\overset{\circ}{B}_d(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ est ouvert)*

1.2.2 Comparaisons de structures métriques

Théorème 1.2 *Soit E un espace métrique muni de deux distances d_1 et d_2. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $d_1 \leqslant c d_2$.*

Alors $\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2}$.

Démonstration. $\forall (x, r), \overset{\circ}{B}_{d_2}(x, \frac{r}{c}) \subset \overset{\circ}{B}_{d_1}(x, r)$ ■

Remarque 1.2 *Dans le cas où* $d_1 \leqslant cd_2 \leqslant c'd_1$*, on dit que les distances sont fortement équivalentes, ce qui implique que* $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ *(ie les distances sont topologiquement équivalentes). La réciproque est fausse. (Exemple :* $d_1(x, y) = |x - y|$*,* $d_2(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$*. On a* $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$*,* $d_2 \leqslant d_1$ *mais* $d_1 \not\leqslant cd_2$*.)*

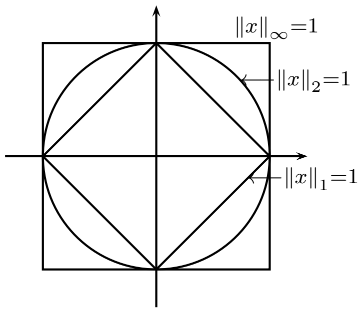
1.2.3 Cas des espaces vectoriels normés

Définition 1.10 Soit E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application de $E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
- $\|x\| = 0 \quad \text{ssi} \quad x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\|x + x'\| \leqslant \|x\| + \|x'\|$

Remarque 1.3 $d(x, x') = \|x - x'\|$ *est alors une distance.*

Proposition 1.6 Si E est un espace vectoriel normé muni de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, $\tau_1 \subset \tau_2 \quad \text{ssi} \quad \exists c > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leqslant c \|\cdot\|_2$.

Démonstration.
$\Leftarrow$ Clair
$\Rightarrow$ $\overset{\circ}{B}_1(0, 1)$ contient $\overset{\circ}{B}_2(0, r)$ pour un certain $r > 0$.
Si $x \neq 0$, $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \times \frac{r}{2} \right\|_1 \leqslant 1$ donc $\|x\|_1 \leqslant \frac{2}{r} \|x\|_2$. ■



1.3 Autres exemples de topologies

1.3.1 Topologie induite

Définition 1.11 Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$. On appelle topologie induite sur A par τ la topologie τ_A définie par $\tau_A = \{\omega \cap A, \omega \in \tau\}$.

Remarque 1.4 (A, τ_A) *est parfois appelé sous-espace topologique de* (E, τ)*. Mais les ouverts de* τ_A *ne sont pas des ouverts de* τ *en général.*

Exemple : $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$. C'est un fermé de $\tau_{\mathbb{Q}}$ car intersection d'un fermé de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{Q}$. C'est aussi un ouvert de $\tau_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 1.7 Si $\tau = \tau_d$, $\tau_A = \tau_{d|_A}$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, A est le cercle de centre O et de rayon 1.

$\mathring{B}_{d|A}(0,1) = \varnothing$ et $\overline{B}_{d|A}(0,1) = A$.

1.3.2 Topologie engendrée par une famille de parties

Définition 1.12 On appelle topologie engendrée par $A \subset \mathcal{P}(E)$ la plus petite topologie contenant A : $\tau_A = \bigcap\limits_{\tau \supset A} \tau$.

Proposition 1.8 Les intersections finies des éléments de A forment une base d'ouverts de τ_A.

1.3.3 Topologie produit

Définition 1.13 On appelle topologie produit sur $E_1 \times E_2$ la topologie engendrée par les $\{\omega_1 \times \omega_2, \omega_1 \in \tau_1, \omega_2 \in \tau_2\}$. Ces éléments forment une base d'ouverts.

Proposition 1.9 Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. La topologie produit de τ_{d_1} et de τ_{d_2} est métrisable. Elle est associée aux distances suivantes :

- $d_p(x,y) = \sqrt[p]{(d_1(x_1,y_1)^p + d_2(x_2,y_2)^p)}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- $d_\infty(x,y) = \max(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2))$.

Démonstration. $\mathring{B}_\infty((x_1,x_2),r) = \mathring{B}_1(x_1,r) \times \mathring{B}_2(x_2,r)$ donc $\tau_\infty \subset \tau_\Pi$.

Soit $x \in \omega_1 \times \omega_2$. Il existe r_i tel que $\mathring{B}_i(x_i,r_i) \subset \omega_i$. On pose $r = \min(r_1,r_2)$ et $\mathring{B}(x,r) \subset \omega_\times \omega_2$.

Donc $\tau_\Pi = \tau_\infty$. ■

Définition 1.14 On appelle topologie produit sur $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ la topologie engendrée par les $\left\{\prod\limits_{i=1}^{p} \omega_i, \forall i \in [\![1,p]\!], \omega_i \in \tau_i\right\}$. Ces éléments forment une base d'ouverts. (L'opération est associative)

Définition 1.15 On appelle topologie produit sur $\prod_{i\in I} E_i$ (avec $E_i \neq \varnothing$) la topologie engendrée par les :

$$\left\{\prod_{i\in I}\Omega_i, \exists J \text{ finie } \subset I \text{ vérifiant } \forall i \in I \setminus J, \Omega_i = E_i \text{ et } \forall i \in J, \Omega_i \in \tau_i\right\}$$

Cet ensemble est stable par intersection donc il constitue une base d'ouverts.

Proposition 1.10 On suppose I non dénombrable et $\mathrm{Card}(E_i) \geqslant 2$. τ_Π est non métrisable.

Démonstration. Supposons qu'il existe d tel que $\tau = \tau_d$ et $x_0 \in E = \prod_{i\in I} E_i$.

$\overset{\circ}{B}_d(x_0, \frac{1}{n}) \supset \prod_{i\in I}\Omega_i^{(n)} \ni x_0$ avec $J_n \subset I$ finie telle que $\forall i \in I \setminus J_n$, $\Omega_i^{(n)} = E_i$.

$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{B}_d(x_0, \frac{1}{n}) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty}\prod_{i\in I}\Omega_i^{(n)} = \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Omega_i^{(n)}\right)$.

Pour $i_0 \in I \setminus \bigcup_{n\geqslant 1} J_n$, $\bigcap_{n\geqslant 1}\Omega_{i_0}^{(n)} = E_{i_0}$ qui est de cardinal supérieur à 2.

Donc $\mathrm{Card}(\{x_0\}) = 2$. Contradiction. ∎

Proposition 1.11 Soit $(E_n, d_n)_n$ une famille d'espaces métriques. La topologie produit sur $\prod_{n\geqslant 0} E_n$ est métrisable.

Par exemple, $\tau_\Pi = \tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ avec :

$$d_1 : \begin{cases} \prod_{n\geqslant 0} E_n & \to \quad \mathbb{R}^+ \\ ((x_n)_n, (y_n)_n) & \mapsto \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\min\{1, d_n(x_n, y_n)\} \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} \prod_{n\geqslant 0} E_n & \to \quad \mathbb{R}^+ \\ ((x_n)_n, (y_n)_n) & \mapsto \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \end{cases}$$

Remarque 1.5 $\dfrac{d}{1+d}$ *et* $\min\{1, d\}$ *sont topologiquement équivalentes.*

1.3.4 Topologie quotient

Rappels : Si E est un espace et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence, on note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes des éléments de E. On définit aussi :

$$\chi : \begin{cases} E & \to \quad E/\mathcal{R} \\ x & \mapsto \quad \overline{x} \end{cases}$$

Définition 1.16 Si (E, τ) est un espace topologique, on appelle topologie quotient sur $E/\mathcal{R}$ la topologie $\tau_{\mathcal{R}}$ définie par :

$$\tau_{\mathcal{R}} = \{O \in E/\mathcal{R}, \chi^{-1}(O) \in \tau\}$$

Démonstration. C'est bien une topologie :

$$\varnothing, E/\mathcal{R} \in \tau_{\mathcal{R}}^2$$

$$\chi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right) = \bigcup_{i\in I} \chi^{-1}(O_i)$$

$$\chi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \chi^{-1}(O_i)$$

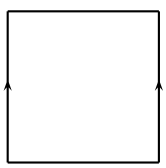
∎

Remarque 1.6

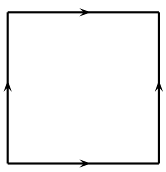
- *$\tau_{\mathcal{R}}$ n'est pas forcément séparée même si τ l'est.*
- *Une condition nécessaire de séparation est que les points de $\tau_{\mathcal{R}}$ soient fermés ie $\overline{x}$ est fermée pour tout x.*
- *Il n'y a pas de métrique naturelle associée à $\tau_{\mathcal{R}}$.*

Exemples :

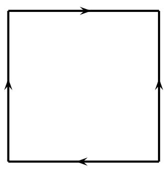
- $E = [0, 1]$, $\mathcal{R}$ est définie par $\overline{0} = \overline{1}$ et si $x \notin \{0, 1\}$, $\overline{x} = \{x\}$. $E/\mathcal{R}$ est un cercle.
- E est un carré de côté 1. $\mathcal{R}$ est telle que chaque élément x des côtés verticaux soit associé avec le point de l'autre côté vertical situé à la même hauteur que x, et que les autres soient seuls dans leur classe. $E/\mathcal{R}$ est un cylindre.



- E est un carré de côté 1. $\mathcal{R}$ est telle que chaque élément x soit associé avec le point du côté opposé situé à la même hauteur que x. $E/\mathcal{R}$ est un tore.



- E est un carré de côté 1. $\mathcal{R}$ est telle que chaque élément x des côtés verticaux soit associé avec le point de l'autre côté vertical situé à la même hauteur que x, et que les autres soient associés à leur symétrique par rapport au centre du carré. $E/\mathcal{R}$ est une bouteille de KLEIN.



1.4 Intérieur, adhérence, frontière, limites

1.4.1 Définitions

Définition 1.17 Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$.

- $a \in E$ est dit adhérent à A ssi $\forall V \in \mathcal{V}_a$, $V \cap A \neq \varnothing$.
  - Soit il existe $V \in \mathcal{V}_a$ tel que $V \cap A = \{a\}$: a est dit isolé.
  - Soit pour tout $V \in \mathcal{V}_a$, $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \varnothing$: a est un point d'accumulation.
- On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A. $\overline{A}$ est appelé adhérence (ou fermeture) de A.
- $a \in E$ est dit intérieur à A ssi $\exists \omega \in \tau$ avec $a \in \omega \subset A$ ssi $A \in \mathcal{V}_a$.
- On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A. $\overset{\circ}{A}$ est appelée intérieur de A.

Proposition 1.12 $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Démonstration. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$. Il existe $\omega \in \tau$ tel que $a \in \omega \subset A$.

Pour tout $x \in \omega$, $x \in \overset{\circ}{A}$ (par définition) donc $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de tous ses points.

On a de plus $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{x \in \overset{\circ}{A}} \omega$ où $x \in \omega \subset A$. ∎

Proposition 1.13 $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration. On montre que $\overset{\circ}{A}{}^{c} = \overline{A^c}$. Le résultat en découle par la proposition précédente.

$$\begin{aligned} a \in \overset{\circ}{A}^c & \quad \text{ssi} \quad \nexists \omega \in \tau, a \in \omega \subset A \\ & \quad \text{ssi} \quad \forall \omega \in \tau, a \in \omega \Rightarrow \omega \cap A^c \neq \varnothing \\ & \quad \text{ssi} \quad a \in \overline{A^c} \end{aligned}$$

■

<u>Définition 1.18</u> On définit la frontière ∂A de A par $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Proposition 1.14 ∂A est un fermé car $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>Définition 1.19</u> Soit (E, τ) un espace topologique et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

On dit que a est une valeur d'adhérence de x ssi tout voisinage de a contient une infinité de termes de x.

Proposition 1.15 a est une valeur d'adhérence de x ssi

$$x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_N, x_{N+1}, \dots\}} = \overline{X_N}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} a \text{ est valeur d'adhérence de } x & \quad \text{ssi} \quad \forall V \in \mathcal{V}_a, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, x_n \in V \\ & \quad \text{ssi} \quad \forall V \in \mathcal{V}_a, \forall N \in \mathbb{N}, V \cap X_N \neq \varnothing \\ & \quad \text{ssi} \quad \forall N \in \mathbb{N}, a \in \overline{X_N} \\ & \quad \text{ssi} \quad a \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N} \end{aligned}$$

■

Proposition 1.16 L'ensemble des valeurs d'adhérences de x, noté $\operatorname{adh}(x)$ est fermé.

<u>Définition 1.20</u> Soit (E, τ) un espace topologique et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

On dit que x converge vers a quand $n \to +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ ou $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\tau} a$ ssi $\forall V \in \mathcal{V}_a, \exists N \geqslant 0, \forall n \geqslant N, x_n \in V$.

Proposition 1.17 Si (E, τ) est séparé, une suite a au plus une limite.

Démonstration. Soit $a \neq a'$ deux limites pour x. (E, τ) est séparé donc il existe (ω, ω') tels que $(a, a') \in \omega \times \omega'$ et $\omega \cap \omega' = \varnothing$.

Il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in \omega$ et il existe $N' \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $x_n \in \omega'$.

Pour $n \geqslant \max(N, N')$, on a une contradiction. ■

Remarque 1.7 Si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, *alors* $a \in \operatorname{adh}(x)$ *et* $\operatorname{Card}(\operatorname{adh}(x)) = 1$.

1.4.2 Cas des espaces métriques

Remarque 1.8 Soit (E,d) un espace métrique.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{ssi} \quad \lim_{n\to+\infty} d(x_n,a)=0$$

Proposition 1.18 Soit (E,d) un espace métrique.
- A est fermé ssi $A=\overline{A}$ ssi $\forall x_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $a\in E$, $a\in A$.
- $a\in \mathrm{adh}(x)$ ssi $\exists \varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)}\to a$.

Démonstration.
- $\Rightarrow$ Clair car si $x_n\to a$, $a\in\overline{A}=A$.
  $\Leftarrow$ Montrons que $\overline{A}\subset A$. Soit $a\in\overline{A}$.
  Pour tout $V\in\mathcal{V}_a$, on a $V\cap A\neq\varnothing$.
  En particulier, $\overset{\circ}{B}_d(a,\frac{1}{n})\cap A\neq\varnothing$ donc contient un élément noté x_n.
  $d(x_n,a)\leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $x_n\to a$ et $a\in A$ par hypothèse.
  Donc $\overline{A}=A$.
- $\Leftarrow$ Clair car si $x_{\varphi(n)}\to a$, $a\in\overline{A}$.
  $\Rightarrow$ Soit $a\in\mathrm{adh}(x)$.
  Pour tout k, on note N_k le premier n tel que $x_n\in\overset{\circ}{B}_d(a,\frac{1}{k+1})$.
  $d(x_{N_k},a)\leqslant\dfrac{1}{k}$ donc $x_{N_k}\to a$. ■

1.5 Continuité et homéomorphismes

1.5.1 Définitions

<u>Définition 1.21</u> Soient (E,τ) et (E',τ') deux espaces topologiques.
- $f:(E,\tau)\to(E',\tau')$ est dite continue ssi $\forall\omega'\in\tau', f^{-1}(\omega')\in\tau$.
- (formulation équivalente) $f:(E,\tau)\to(E',\tau')$ est dite continue ssi elle l'est en tout $x\in E$ ssi $\forall x\in E,\forall V'\in\mathcal{V}_{f(x)}, f^{-1}(V')\in\mathcal{V}_x$.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Soit $x\in E$ et $V'\in\mathcal{V}_{f(x)}$. Il existe $\omega'\in\tau'$ tel que $f(x)\in\omega'\subset V'$.
On a donc $x\in f^{-1}(\omega')\in\tau$ donc $f^{-1}(\omega')\in\mathcal{V}_x$.
$\Leftarrow$ Soit $\omega'\in\tau'$ et $x\in f^{-1}(\omega')$.
On a $f(x)\in\omega'$ qui est alors un voisinage de $f(x)$ donc $f^{-1}(\omega')\in\mathcal{V}_x$.
C'est donc un voisinage de tous ses points. Il appartient donc à τ. ■

<u>Définition 1.22</u> On dit que f est ouverte (resp. fermée) ssi l'image de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé)

Définition 1.23 $f:(E,\tau)\to(E',\tau')$ est un homéomorphisme ssi f est bijective, continue telle que f^{-1} soit continue (ie continue bijective ouverte).

Remarque 1.9 *Soit E muni des topologies τ et τ'.*
- $\tau\subset\tau'$ ssi $\mathrm{Id}:(E,\tau')\to(E,\tau)$ *est continue.*
- $\tau=\tau'$ ssi $\mathrm{Id}:(E,\tau')\to(E,\tau)$ *est un homéomorphisme.*

1.5.2 Cas des espaces métriques

Proposition 1.19 $f:(E,d)\to(E',\tau')$ est continue en $x\in E$ ssi $\forall(x_n)_n\in E^{\mathbb{N}}$, $x_n\overset{\tau_d}{\to}x\Rightarrow f(x_n)\overset{\tau'}{\to}f(x)$.

Démonstration.
- $\Rightarrow$ (reste vrai pour $f:(E,\tau)\to(E',\tau')$) Soit (x_n) tendant vers x via τ_d et $V'\in\mathcal{V}_{f(x)}$
  On a $f^{-1}(V')\in\mathcal{V}_x$ donc il existe $N\geqslant 0$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $x_n\in f^{-1}(V')$ donc $f(x_n)\in V'$ donc $f(x_n)\to f(x)$.
- $\Leftarrow$ (contraposée) Si f n'est pas continue en x, il existe $V'\in\mathcal{V}_{f(x)}$ tel que $f^{-1}(V')\notin\mathcal{V}_x$.
  Donc, pour tout n, il existe un $x_n\in\overset{\circ}{B}_d(x,\frac{1}{n})$ tel que $x_n\notin f^{-1}(V')$.
  On a donc $x_n\to x$ mais $f(x_n)\not\to f(x)$ car aucun $f(x_n)$ n'appartient à V'. ■

Remarque 1.10 *Pour comparer τ et τ_d sur E, on étudie la continuité séquentielle de* Id *: $(E,\tau_d)\to(E,\tau)$. Celle-ci assure que $(x_n\overset{\tau_d}{\to}x)\Rightarrow(f(x_n)\overset{\tau}{\to}f(x))$ ce qui assure $\tau\subset\tau_d$.*

En particulier, d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes sur E ssi

$$d(x_n,x)\to 0\Rightarrow d(f(x_n),f(x))\to 0$$

Définition 1.24 $f:(E,d)\to(E',d')$ est dite :
- uniformément continue ssi $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall(x,x')\in E^2,d(x,x')\leqslant\eta\Rightarrow d'(f(x),f(x'))\leqslant\varepsilon$.
- lipschitzienne ssi $\exists k>0,\forall(x,x')\in E^2,d'(f(x),f(x'))\leqslant kd(x,x')$.
- hölderienne ssi

$$\exists k>0,\exists\alpha\in]0,1],\forall(x,x')\in E^2,d'(f(x),f(x'))\leqslant kd(x,x')^\alpha$$

Remarque 1.11 *Plus généralement, s'il existe $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ vérifiant que $\lim\limits_{x\to 0}\omega(x)=0$ et $\forall(x,x')\in E^2$, $d'(f(x),f(x'))\leqslant\omega(d(x,x'))$, f est uniformément continue. La borne inférieure des ω vérifiant cette propriété est appelé module de continuité uniforme de f.*

1.5.3 Continuité et topologie induite

Proposition 1.20 Soit $f : (E, \tau) \to (E', \tau')$ continue et $A \subset E$.
$f|_A : (A, \tau|_A) \to (E', \tau')$ et $\widetilde{f} : (E, \tau) \to (f(E), \tau'|_{f(E)})$ sont continues.

Démonstration. Soit $\omega' \in \tau'$.
On a $(f|_A)^{-1}(\omega') = f^{-1}(\omega') \cap A \in \tau|_A$ car $f^{-1}(\omega') \in \tau$.
Soit $\omega' \in \tau'|_{f(E)}$, ω' s'écrit $\omega \cap f(E)$ et on a $\widetilde{f}^{-1}(\omega \cap f(E)) = f^{-1}(\omega) \in \tau$. ∎

Exemple : Montrer que $[0, 1]$ et le cercle C de centre 0 et de rayon 1 ne sont pas homéomorphes.
Supposons qu'ils le soient via f. Notons :

$$\widetilde{f} : \begin{cases} [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} & \to \quad C \setminus \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \\ x & \mapsto \quad f(x) \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ reste un homéomorphisme à cause de la propriété précédente. Or, $[0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ n'est pas connexe alors que $C \setminus \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ l'est. Le chapitre 2 conclut alors à une contradiction.

1.5.4 Continuité et topologie produit

Proposition 1.21 Soit $(E_i, \tau_i)_i$ une famille de topologies et $E = \prod_{i \in I} E_i$.

$$X_n \overset{\tau_\Pi}{\to} X \quad \text{ssi} \quad \forall i \in I, X_n^i \overset{\tau_i}{\to} X^i$$

Démonstration.
$\Rightarrow$ Soit $i_0 \in I$ et $\omega_{i_0} \in \tau_{i_0}$. On pose $\Omega_{i_0} = \omega_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} E_i$.
$\Omega_{i_0} \in \tau_\Pi$ et contient X donc contient une infinité des $(X_n^i)_n$.
$\Leftarrow$ Soit $\Omega \in \tau_\Pi$ contenant X de la forme $\prod_{i \in J} \omega_i \times \prod_{i \notin J} E_i$ avec $\Omega_i \in \tau_i$ et J finie.
Pour tout $i \in J$, il existe N_i tel que pour tout $n \geqslant N_i$, $X_n^i \in \Omega_i$. Pour $n \geqslant \max(N_i)_i$, $X_n \in \Omega$. ∎

Proposition 1.22 La topologie de la convergence simple de $(f_n) \in (F^E)^{\mathbb{N}}$ est une topologie produit : celle de l'ensemble des suites d'éléments de F indicées par E.

COROLLAIRE 1.3 *Cette topologie n'est pas métrisable quand E n'est pas dénombrable et F a plus de deux éléments.*

Proposition 1.23 La fonction :

$$\pi_{i_0} : \begin{cases} (E, \tau_\Pi) & \to & (E_{i_0}, \tau_{i_0}) \\ (X_i)_{i\in I} & \mapsto & X_{i_0} \end{cases}$$

est continue.

Démonstration. Si $\omega_{i_0} \in \tau_{i_0}$, $\pi_{i_0}^{-1}(\omega_{i_0}) = \omega_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} E_i \in \tau_\Pi$. ■

Remarque 1.12 *τ_Π est la moins fine topologie qui fasse de tous les π_i des fonctions continues.*

Proposition 1.24 $f : (X, \tau) \to \left(\prod_{i\in I} E_i, \tau_\Pi\right)$ est continue ssi pour tout $i \in I$, $\pi_i \circ f$ l'est.

Démonstration.

$\Rightarrow$ π_i est continue donc $\pi_i \circ f$ l'est.

$\Leftarrow$ $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$ avec $\Omega_i = E_i$ sauf sur une partie finie J de I où $\Omega_i \in \tau_i$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\Omega) &= \{x \in X, f(x) \in \Omega\} \\ &= \{x \in X, \forall i \in J, \pi_i(f(x)) \in \Omega_i\} \\ &= \bigcap_{i\in J} (\pi_i \circ f)^{-1}(\Omega_i) \in \tau \end{aligned}$$

■

Remarque 1.13 *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en (x_0, y_0), alors $f_1 : (x, y) \mapsto f(x, y_0)$ et $f_2 : (x, y) \mapsto f(x_0, y)$ le sont. La réciproque est fausse (considérer par exemple $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$).*

<u>THÉORÈME 1.3</u> *Soient f et g deux fonctions de $(E, \tau) \to (E', \tau')$ avec (E', τ') séparé.*

Si f et g sont continues, alors $\{x \in E, f(x) = g(x)\}$ est fermé et $G_f = \{(x, y) \in E \times E', y = f(x)\}$ aussi.

Démonstration.

- Résultat préliminaire : $\Delta = \{(x, y) \in E'^2, y = x\}$ est un fermé de (E'^2, τ_Π) dès que E' est séparé.
  Montrons que Δ^c est ouvert. Si $(x, y) \in \Delta^c$, il existe $\omega_x, \omega_y \in \tau_\Pi$ avec $\omega_x \cap \omega_y = \varnothing$.
  Ceci assure $\omega_x \times \omega_y \subset \Delta^c$ donc Δ^c est ouvert.

- $$T : \begin{cases} E & \to & E' \times E' \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$$
  est continue car f et g le sont donc $\{x \in E, f(x) = g(x)\} = T^{-1}(\Delta)$ est fermé.
- $$S : \begin{cases} E & \to & E' \times E' \\ (x,y) & \mapsto & (f(x), y) \end{cases}$$
  est continue car $\pi_1 \circ f$ et π_2 le sont donc $G_f = S^{-1}(\Delta)$ est fermé. ■

1.5.5 Continuité et topologie quotient

Proposition 1.25 Par définition de $\tau_{\mathcal{R}}$, $\chi : x \mapsto \overline{x}$ est continue.

Définition 1.25 Soit $f : E \to E'$. On définit $\mathcal{R}_f$ par $x\mathcal{R}_f y \quad \text{ssi} \quad f(x) = f(y)$. f se factorise sur $E/\mathcal{R}_f$ en $\widetilde{f}$ définie par $f = \widetilde{f} \circ \chi$. $\widetilde{f}$ est alors injective (et surjective ssi f l'est).

Proposition 1.26 f est continue ssi $\widetilde{f}$ l'est.

Démonstration.
$\Leftarrow$ $f = \widetilde{f} \circ \chi$ donc f est continue.
$\Rightarrow$ Soit $\omega' \in \tau'$. $\widetilde{f}^{-1}(\omega') \in \tau_{\mathcal{R}} \quad \text{ssi} \quad \chi^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(\omega')) \in \tau \quad \text{ssi} \quad f^{-1}(\omega') \in \tau \quad \text{ssi} \quad f$ est continue.
■

Exemple :
$$f : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{U} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2i\pi t} \end{cases}$$
est continue et surjective. De plus, $f|_{[0,1[}$ est injective et $f(0) = f(1)$.
$\mathcal{R}_f$ est donc telle que $\overline{0} = \overline{1}$ et $\forall x \in]0,1[$, $\overline{x} = \{x\}$.
$\widetilde{f}$ est alors bijective continue et ouverte donc c'est un homéomorphisme.

1.5.6 Continuité et espaces vectoriels normés

Proposition 1.27 Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (E', \|\cdot\|_{E'})$ linéaire.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. f est continue en 0
3. f est bornée sur les bornés

4. f est lipschitzienne en 0
5. f est lipschitzienne

Démonstration.

$1 \Rightarrow 2$ Clair

$2 \Rightarrow 3$ $f^{-1}(\mathring{B}_{E'}(0,1))$ est un voisinage de 0 dans E donc contient une boule $\mathring{B}_E(0,r)$.

Donc $f(\mathring{B}_E(0,r)) \subset \mathring{B}_{E'}(0,1)$. Donc, pour tout R, $f(\mathring{B}_E(0,R)) = \frac{R}{r} f(\mathring{B}_E(0,r)) \subset \mathring{B}_{E'}(0,\frac{R}{r})$.

$3 \Rightarrow 4$ il existe R tel que $f(\overline{B}_E(0,1)) \subset \mathring{B}_{E'}(0,R)$.

Pour tout $x \neq 0$, $f(\frac{x}{\|x\|_E}) \in \mathring{B}_{E'}(0,R)$ donc $\left\| f(\frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_{E'} \leqslant R$.

Donc $\frac{\|f(x)\|_{E'}}{\|x\|_E} \leqslant R$ et f est R lipschitzienne en 0.

$4 \Rightarrow 5$ Clair par linéarité.

$5 \Rightarrow 1$ f est lipschitzienne donc continue. ■

Définition 1.26 On définit

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,E')} = \min\{k, \forall x \in E, \|f(x)\|_{E'} \leqslant k \|x\|_E\}$$

Proposition 1.28

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}(E,E')} &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_{E'}}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_{E'} \\ &= \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_{E'} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Connexité

2.1 Définitions

Définition 2.1 On dit qu'un espace topologique (E, τ) est non connexe ssi $E = \omega_1 \cup \omega_2$ avec $\omega_1, \omega_2 \in \tau^2$ disjoints.

Ceci est équivalent à $E = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés disjoints (prendre $F_1 = \omega_2^c$ et $F_2 = \omega_1^c$) et à E contient une partie ouverte fermée non triviale (prendre ω_1).

Définition 2.2 Soit (E, τ) un espace topologique. (E, τ) est dit connexe ssi $(\exists \omega_1, \omega_2 \in \tau$ disjoints, $E = \omega_1 \cup \omega_2) \Rightarrow \omega_1 = E$ ou $\omega_2 = E$.

Ceci est équivalent à $(\exists F_1, F_2 \in \tau^c$ disjoints, $E = F_1 \cup F_2) \Rightarrow F_1 = E$ ou $F_2 = E$ et à $A \subset E$ est ouverte fermée non vide $\Rightarrow A = E$.

Définition 2.3 Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$.

A est une partie connexe de E ssi $(A, \tau|_A)$ est connexe ssi $(\exists \omega_1, \omega_2 \in \tau^2$ disjoints, $A \subset \omega_1 \cup \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow A \subset \omega_1$ ou $A \subset \omega_2$.

Remarque 2.1

- *On a une définition similaire avec les fermés et les ouverts fermés.*
- *La connexité est une notion topologique donc elle se conserve par homéomorphisme*

Exemple :

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas convexe : $\mathbb{Q} = \underbrace{(]-\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q})}_{\omega_1} \cup \underbrace{(]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q})}_{\omega_2}$.

$\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$ et $\omega_1 \neq E \neq \omega_2$.

2.2 Propriétés

2.2.1 Connexes de $\mathbb{R}$

<u>THÉORÈME 2.1</u> *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ en sont les intervalles.*

Démonstration.

- $\Rightarrow$ On montre que si $A \subset \mathbb{R}$ vérifie $\exists a < b \in A^2$ et $c \in]a, b[\backslash A$, alors A est non connexe.
  En effet, $A = (]-\infty, c[\cap A) \cup (]c, +\infty[\cap A)$ qui sont non vides et disjoints.
  En prenant la contraposée, si A est connexe, pour tout $(a, b) \in A$, $[a, b] \subset A$. Donc A est convexe donc c'est un intervalle.
- $\Leftarrow$ Montrons que $I =]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ est connexe. Soit E un ouvert fermé de I et $c \in E$.
  Posons $A = \{x \in I, [c, x] \subset E\}$. $A \neq \varnothing$ $(c \in A)$.
  A est majoré par b donc A admet une borne supérieure γ.
  Supposons $\gamma < b$. Il existe $(\gamma_n) \in A^{\mathbb{N}}$ croissant vers $\gamma \in I$.
  E est fermé dans I donc $\gamma \in E$. Comme E est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma + \varepsilon \in E$.
  $\gamma + \varepsilon \in A$ donc il y a contradiction. Donc $\gamma = b$.
  On a donc $[c, b[\subset E$. De même, $]a, c] \subset E$ donc $I = E$.

■

2.2.2 Connexes et fonctions continues

Proposition 2.1 L'image continue d'un connexe est connexe.

Démonstration. Soit $f : (E, \tau) \to (E', \tau')$ continue, et $A \subset E$ connexe.

Si $f(A) \subset \omega_1 \cup \omega_2$ avec $\omega_1 \cap \omega_2 \cap f(A) = \varnothing$, on a $A \subset f^{-1}(\omega_1) \cup f^{-1}(\omega_2)$ et $f^{-1}(\omega_1) \cap f^{-1}(\omega_2) \cap A = \varnothing$ donc (A connexe) $A \subset f^{-1}(\omega_1)$ ou $A \subset f^{-1}(\omega_2)$.

Donc $f(A) \subset \omega_1$ ou $f(A) \subset \omega_2$. ■

COROLLAIRE 2.1 (TVI) *Si $f : (E, \tau) \to \mathbb{R}$ est continue et $A \subset E$ est connexe, $f(A)$ est un intervalle.*

Démonstration. Conséquence des deux propriétés précédentes. ■

COROLLAIRE 2.2 *(E, τ) est connexe ssi toute $f : (E, \tau) \to \{0, 1\}$ continue est constante.*

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Si $f : (E, \tau) \to \mathbb{R}$ est continue, $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ est une partition de E. Or E est connexe donc $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$ ou $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.

$\Leftarrow$ Si $E = \omega_1 \cup \omega_2$ avec $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$. On pose :

$$f : \begin{cases} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & 0 \quad \text{si } x \in \omega_1 \\ x & \mapsto & 1 \quad \text{si } x \in \omega_2 \end{cases}$$

f est continue car $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouverts. Donc f est constante et $\omega_1 = E$ ou $\omega_2 = E$. ■

Donc E est connexe.

Corollaire 2.3
- *$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.*
- *$]0,1[$, $[0,1]$ et $[0,1[$ ne sont pas homéomorphes.*
- *A, B, C, D, E (vus comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$) ne sont pas homémorphes.*

Démonstration. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ était un homéomorphisme, $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ en serait un. Or $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ l'est.

Donc $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes. ■

Théorème 2.2 *Soit $A \subset E$ et B un connexe tel que $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \cap A^c \neq \varnothing$. On a $B \cap \partial A \neq \varnothing$.*

Démonstration. $B \cap \mathring{A}$, $B \cap \mathring{A^c}$ et $B \cap \partial A$ forment une partition de B.

Si $B \cap \partial A = \varnothing$, on a une partition de B en deux ouverts non vides disjoints. En effet, $B \cap A \neq \varnothing$ et $B \cap \partial A = \varnothing$ donc $B \cap \mathring{A} \neq \varnothing$. De même $B \cap \mathring{A^c} \neq \varnothing$.

On a donc une contradiction car B est connexe. ■

Proposition 2.2 Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$ connexe.

Si $B \subset E$ vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, B est connexe.

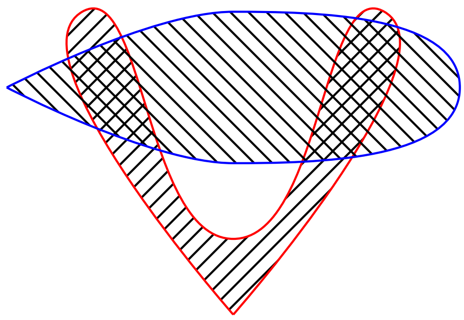
Remarque 2.2 $\overline{A}$ est donc connnexe.

Démonstration. Si $B \subset F_1 \cup F_2$ avec $F_1 \cap F_2 \cap B \neq \varnothing$, alors $A \subset F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 \cap A = \varnothing$.

Donc $A \subset F_1$ ou $A \subset F_2$.

Donc $\overline{A} \subset F_1$ ou $\overline{A} \subset F_2$ donc $B \subset F_1$ ou $B \subset F_2$ donc B est connexe. ■

Remarque 2.3
- *A est connexe $\not\Rightarrow$ $\mathring{A}$ connexe (prendre un cône fermé de $\mathbb{R}^2$)*
- *A et B sont connexes $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ est connexe :*



Proposition 2.3 Soit (E,τ) un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ des connexes tels que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Si $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset \omega_1 \cup \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \neq \varnothing$, alors, pour tout $i \in I$, $A_i \subset \omega_1 \cup \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap A \neq \varnothing$.

Donc, pour tout $i \in I$, $A_i \subset \omega_1$ ou $A_i \subset \omega_2$. Or il existe $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

On peut donc supposer $x \in \omega_1$. On a alors $A_i \subset \omega_1$ pour tout $i \in I$ donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset \omega_1$. ■

Remarque 2.4 La propriété est aussi vraie si les A_i ne sont pas disjoints deux à deux.

Corollaire 2.4 *Dans un espace vectoriel normé, tout convexe est connexe.*

Démonstration. Soit C un convexe et $a \in C$. Pour tout $x \in C$, $[a,x] \subset C$ donc $C = \bigcup\limits_{x\in C} [a,x]$.

Pour tout $x \in C$, $[a,x]$ est connexe car homéomorphe à $[0,1]$ via $h : t \mapsto (1-t)a + tx$.

De plus, $a \in \bigcap\limits_{x\in C} [a,x]$ donc C est connexe. ■

Remarque 2.5 Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique, ce qui signifie que c'est un espace vectoriel tel que $+$ et $\cdot$ sont continues.

Définition 2.4 Soit (E,τ) un espace topologique.

$A \subset E$ est dite connexe par arcs ssi $\forall x,y \in A^2, \exists \gamma : [0,1] \to A$ continue avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Corollaire 2.5 *Toute partie connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit A un connexe par arcs et $a \in A$.

Pour tout $x \in A$, il existe $\gamma_x : [0,1] \to A$ continue tel que $\gamma_x(0) = a$ et $\gamma_x(1) = x$.

$\gamma_x([0,1])$ est connexe et on a $A = \bigcup\limits_{x \in A} \gamma_x([0,1])$.

Or $a \in \bigcap\limits_{x \in A} \gamma_x([0,1])$ donc A est connexe. ∎

Remarque 2.6 La réciproque est fausse : $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in]0,1]\}$ *est connexe car* $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$ *est continue.*

Donc $\overline{B}$ *est connexe mais pas connexe par arcs :* $(0,0)$ *n'est pas continûment reliable à* $(\frac{2}{\pi}, 1)$.

Proposition 2.4 Dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs.

Démonstration. Soit ω un ouvert connexe et $a \in \omega$.

$A = \{x \in \omega, x \text{ est continûment reliable à } a\}$. $a \in A$ donc $A \neq \varnothing$.

Soit $x \in A$. ω est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \omega$.

Pour $y \in B(x,r)$, $\gamma_x \cup [x,y]$ joint a à y donc $B(x,r) \subset A$. Donc A est ouvert.

Soit $b \in \overline{A} \cap \omega$. Il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers b.

Il existe $r > 0$ tel que $B(b,r) \subset \omega$ et n_0 tel que $x_{n_0} \in B(b,r)$.

$\gamma_{x_{n_0}} \cup [x_{n_0}, b]$ relie a à b donc $b \in A$ donc A est fermé.

A est un ouvert fermé non vide de ω connexe donc $A = \omega$. ∎

2.2.3 Notion de composante connexe

<u>**Définition 2.5**</u> Soit (E, τ) un espace topologique. On définit la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ ssi $\exists C$ connexe contenant x et y.

<u>Théorème 2.3</u> *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La symétrie et la réflexivité sont claires.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, il existe C_1, C_2 deux connexes tels que $x, y \in C_1$ et $y, z \in C_2$. $y \in C_1 \cap C_2$ donc $C_1 \cup C_2$ est convexe et contient x et z. ∎

<u>**Définition 2.6**</u> On appelle compostante connexe les classes de $\mathcal{R}$ (d'où une partition de tout espace topologique en ses composantes connexes).

Proposition 2.5 Toute composante connexe est fermée.

Démonstration. Si $E = \bigcup\limits_{i \in I} C_i$, $\overline{C_i}$ est connexe et contient C_i. Par transitivité, $\overline{C_i} = C_i$. ∎

Remarque 2.7 *Si I est fini, les C_i sont ouverts. Sinon, on ne peut rien dire (dans $\mathbb{Q}$ les composantes connexes sont les points qui ne sont pas ouverts).*

Lemme 2.3.1
$E_1 \times E_2$ connexe ssi E_1 et E_2 le sont.

Démonstration. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \{0,1\}$ continue.

$f|_{\{x_1\}\times E_2}$ est constante car $\{x_1\} \times E_2$ homéomorphe à E_2 donc connexe.

De même, $f|_{E_1\times\{x_2\}}$ est constante (et c'est la même constante car (x_1, x_2) appartient aux deux ensembles).

Donc f est constante. ∎

Proposition 2.6 $\left(\prod_{i\in I} E_i, \tau_\pi\right)$ sont connexes ssi les (E_i, τ_i) le sont.

Démonstration.

$\Leftarrow$ La continuité des projections assurent le résultat.

$\Rightarrow$ Soit $a \in E$. On pose $\omega_a = \{(x_i)_{i\in I}, \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \forall i \in I \setminus J, x_i = a_i\}$.

On va montrer que ω_a est connexe et dense.

À J fixée, $\omega_{J,a} = \{x, \forall i \in I \setminus J, x_i = a_i\}$ est homéomorphe à $\prod_{i\in J} E_i$ donc est connexe.

$\omega_a = \bigcup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \omega_{J,a}$ et $a \in \bigcap_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \omega_{J,a}$ qui sont connexes donc ω_a est connexe.

Pour J finie, on pose $\omega = \prod_J \omega_i \times \prod_{I\setminus J} E_i$.

On pose $b \in E$ tel que $b_i = a_i$ sur $I \setminus J$ et $b_i \in \omega_i$ sinon. $b \in \Omega \cap \omega_a$ donc ω_a est dense.

ω_a est donc connexe donc $E = \overline{\omega_a}$ l'est.

∎

Chapitre 3

Compacité

3.1 Définitions

<u>Définition 3.1</u> On dit qu'un espace topologique (E, τ) est compact ssi

- (E, τ) est séparé.
- (Borel-Lebesgue) De tout recouvrement d'ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Remarque 3.1 Borel-Lebesgue s'écrit aussi avec des fermés :

$$\forall (f_i)_{i \in I} \notin \tau^I, \bigcap_{i \in I} f_i = \varnothing \Rightarrow \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \bigcap_{i \in J} f_i = \varnothing$$

Proposition 3.1 Soit (E, τ) un compact et F une suite décroissante de fermés non vides. Alors $\bigcap_{n \geqslant 0} F_n \neq \varnothing$.

Démonstration. Si l'intersection est vide, d'après Borel-Lebesgue, il existe $J \subset I$ finie telle que $\bigcap_{n \in J} F_n = \varnothing$.

Avec $n_0 = \max J$, $\bigcap_{n \in J} F_n = F_{n_0} = \varnothing$ d'où la contradiction. ∎

Remarque 3.2

- $\mathbb{R}$ *n'est pas compact car* $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ *et pour tout* k, $k \notin \bigcup_{n \neq k}]n-1, n+1[$.
- *On a aussi une preuve avec des fermés :* $\bigcap_{n \geqslant 0} [n, +\infty[= \varnothing$ *avec les* $[n, +\infty[$ *fermés non vides décroissants.*

Définition 3.2 Soit (E, τ) un espace topologique et $K \subset E$. K est dite partie compacte de E ssi (K, τ_K) est compact ssi :

- (K, τ_K) est séparé
- $K = \bigcup\limits_{i \in I} (\omega_i \cap K) \Rightarrow \exists J \subset I$ finie, $K = \bigcup\limits_{i \in J} (\omega_i \cap K)$.

ssi

- (K, τ_K) est séparé
- $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} \omega_i \Rightarrow \exists J \subset I$ finie, $K \subset \bigcup\limits_{i \in J} \omega_i$.

Proposition 3.2 Si (E, τ) est séparé, K compact $\Rightarrow K$ fermé.

Si (E, τ) est compact, K fermé $\Rightarrow K$ compact.

Démonstration.

- Soit $x \in K^c$. Pour tout $y \in K$, il existe ω_1^y, ω_2^y tels que $y \in \omega_1^y$, $x \in \omega_2^y$ et $\omega_1^y \cap \omega_2^y = \varnothing$.

  $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} \omega_1^y$ donc il existe $(y_1, \dots, y_p)$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \omega_1^{y_i}$.

  $K \cap \left(\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_2^{y_i} \right) \cap K \neq \varnothing$ donc $x_0 \in \overset{\circ}{K^c}$ donc K^c ouvert et K fermé.

- Si $\bigcap\limits_{i \in I} (\underbrace{F_i \cap K}_{\notin \tau}) = \varnothing$, il existe J finie telle que $\bigcap\limits_{i \in J} (F_i \cap K) \neq \varnothing$.

  De plus, si (E, τ) est séparé, (K, τ_K) le reste. ∎

Exemple : $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas un compact de $\mathbb{Q}$ car il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

3.2 Propriétés

Proposition 3.3 Soit (E, τ) un compact, x une suite d'éléments de E. Alors x a une valeur d'adhérence et si celle-ci est unique x y converge.

Démonstration.

- $\mathrm{adh}(x) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n}$ donc $\mathrm{adh}(x)$ est une intersection de fermés non vides. Donc $\mathrm{adh}(x) \neq \varnothing$.
- Supposons $\mathrm{adh}(x) = \{a\}$. Soit ω un ouvert contenant a.

$$\bigcap_{n \geqslant 0} (\overline{X_n} \cap \omega^c) = \left(\bigcap_{n \geqslant 0} \overline{X_n} \right) \cap \omega^c = \varnothing$$

Donc il existe J finie telle que $\bigcap_{n\in J}(\overline{X_n}\cap\omega^c)=\varnothing$ donc il existe $n\in J$, $\overline{X_n}\cap\omega^c=\varnothing$.

Donc $\overline{X_n}\subset\omega$ donc $X_n\subset\omega$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n=a$. ∎

Proposition 3.4 L'image continue d'un compact est un compact si l'espace d'arrivée est séparé.

Démonstration. Si $f(K)\subset\bigcup_{i\in I}\omega_i'$, $K\subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\omega_i'\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(\omega_i')$.

Il existe alors J finie telle que $K\subset\bigcup_{i\in J}f^{-1}(\omega_i')$.

Donc $f(K)\subset\bigcup_{i\in J}\omega_i'$. ∎

Lemme 3.0.2
Dans un espace métrique, tout compact est borné.

Démonstration. Soit $x_0\in K$.

$K\subset\bigcup_{r>0}B_d(x_0,r)$ donc il existe $R>0$ tel que $K\subset B_d(x_0,r)$. ∎

Corollaire 3.1 *Si $f:(E,\tau)\to\mathbb{R}$ est continue et $K\subset E$ est compact, $f|_K$ est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. $f(K)$ est borné car compact. Donc il est fermé et contient ses bornes. ∎

Définition 3.3 K est dit précompact ssi

$$\forall\rho>0,\exists n\in\mathbb{N},\exists(x_1,\ldots,x_n),K\subset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}B(x_i,l)$$

Proposition 3.5 Soit (E,d) un espace métrique.

$$\begin{aligned}K \text{ compact} \quad &\text{ssi} \quad \forall x\in K^{\mathbb{N}},\mathrm{adh}(x)\neq\varnothing \text{ et } \mathrm{adh}(x)\subset K\\ &\text{ssi} \quad \forall x\in K^{\mathbb{N}},\exists\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ strictement croissante }, x\circ\varphi \text{ converge dans } K\end{aligned}$$

Démonstration.
$1\Rightarrow 2$ vu dans les espaces topologiques.
$2\Rightarrow 3$ définition de $\mathrm{adh}(x)$ dans un espace métrique.
$3\Rightarrow 1$

Lemme 3.0.3
Si K vérifie 3 avec $K \subset \bigcup_{i\in I}\omega_i$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe i_x tel que $B(x,\rho_0) \subset \omega_{i_x}$.

Démonstration. Supposons que $\forall \rho_0 > 0, \exists x \forall i, B(x,\rho_0) \not\subset \omega_i$.
Pour $\rho_0 = \frac{1}{n}$, on définit une suite $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$.
Il existe donc φ, l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l \in K = \bigcup_{i\in I}\omega_i$.
Il existe i_0 tel que $l \in \omega_{i_0}$ donc, comme ω_{i_0} est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$, $B(l,\varepsilon) \subset \omega_{i_0}$.
Pour k assez grand $B(x_{\varphi(k)}, \frac{1}{\varphi(k)}) \subset B(l,\varepsilon) \subset \omega_{i_0}$.
En effet, pour tout $z \in B(x_{\varphi(k)}, \frac{1}{\varphi(k)})$, $d(z,l) \leqslant d(z,x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)},l)$ qui tend vers 0.
Donc on a une contradiction. ∎

Lemme 3.0.4 (2)
Si K est séquentiellement compact, il est précompact.

Démonstration. On suppose que

$$\exists \rho > 0, \forall p \geqslant 0, \forall x_1, \dots x_p, K \not\subset \bigcup_{1\leqslant i\leqslant p} B(x_i, l)$$

On construit $x \in K^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in K \setminus \left(\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant i-1} B(x_j,\rho)\right) \neq \varnothing \text{ par hypothèse} \end{cases}$$

Il existe l, φ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{\varphi(n)}, l) = 0$.
Or cette suite est minorée par ρ à partir d'un certain rang. Donc contradiction. ∎

Soit $K \subset \bigcup_{i\in I}\omega_i$ avec ω_i ouverts.
D'après le lemme 3.0.3, $\exists \rho_0 > 0, \forall x \in K, \exists i_x, B(x,\rho_0) \subset \omega_{i_x}$.
D'après le lemme 3.0.4, $\exists p, x_1, \dots, x_p, K \subset \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant p} B(x_j,\rho_0) \subset \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant p} \omega_{i_{x_j}}$.
$\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant p} \omega_{i_{x_j}}$ est un recouvrement fini de K donc K vérifie Borel-Lebesgue. ∎

<u>THÉORÈME 3.1</u> DE TYCHONOFF *Tout produit de compacts est compact.*

Démonstration.

- Cas fini.
  Soient K_1, K_2 deux compacts. On a déjà vu que $K_1 \times K_2$ était séparé. Si $K_1 \times K_2 \subset \bigcup\limits_{i\in I} \omega_i$, on a :

$$\bigcup_{i\in I} \omega_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} (\omega_1^j \times \omega_2^j) = \bigcup_{k\in K} \omega_1^k \times \omega_2^k$$

  Pour x_1 fixé dans K_1, $\{x_1\} \times K_2$ est compact car homéomorphe à K_2 donc il existe $K_{x_1} \subset K$ fini tel que $\{x_1\} \times K_2 \subset \bigcup\limits_{k\in K_{x_1}} \omega_1^k \times \omega_2^k$.

  $x_1 \in \bigcap\limits_{k\in K_{x_1}} \omega_1^k$ donc $K_1 \subset \bigcup\limits_{x_1\in K_1} \bigcap\limits_{k\in K_{x_1}} \omega_1^k$.

  Or, comme K_1 compact, $K_1 \subset \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant q} \bigcap\limits_{k\in K_{x_j}} \omega_1^k$.

  Donc $K_1 \times K_2 \subset \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant q} \bigcap\limits_{k\in K_{x_j}} \omega_1^k \times \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant q} \bigcap\limits_{k\in K_{x_j}} \omega_2^k \subset \bigcup\limits_{l\in\{fini\}} (\omega_1^l \times \omega_2^l)$.
  Donc $K_1 \times K_2$ est compact.
- Cas d'un produit dénombrable d'espaces métriques compacts.
  On va montrer que $K = \prod\limits_{i=1}^{n} K_i$ est séquentiellement compact.
  Soit $(X^p)_p$ une suite d'éléments de K. On note $X^p = (x_n^p)_n$.
  $(x_1^p)_p$ est une suite de K_1 donc il existe x_1, φ_1 tel que $\lim\limits_{p\to+\infty} x_1^{\varphi_1(p)} = x_1$.
  $(x_2^{\varphi_1(p)})_p$ est une suite de K_2 donc il existe x_2, φ_2 tel que

$$\lim_{p\to+\infty} x_2^{\varphi_1(\varphi_2(p))} = x_2$$

  On construit ainsi par récurrence une suite $(x_n)_n$ et $(\varphi_n)_n$ tels que $\lim\limits_{p\to+\infty} x_n^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p)(p)} = x_n$.
  Soit n fixé. Pour tout $p \geqslant n$, on a :

$$x_n^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p)(p)} = x_n^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n)((\varphi_{n+1}\circ\ldots\circ\varphi_p)(p))}$$

  Or $\lim\limits_{p\to+\infty} (\varphi_{n+1} \circ \ldots \circ \varphi_p)(p) = +\infty$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} x_n^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p)(p)} = x_n$.
  Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} X^{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_p)(p)} = (x_n)_n$.
  Donc K est séquentiellement compact.
- Les autres cas sont admis. ■

Proposition 3.6 Si K est compact et $f : (K, d) \to (E', d')$ continue, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Supposons que f ne soit pas continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x_\eta, y_\eta \in K$ tel que $d(x_\eta, y_\eta) \leqslant \eta$ et $d(f(x_\eta), f(y_\eta)) > \varepsilon$.

Avec $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans K.

Il existe l, φ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$. On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = l$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) = 0$.

$$\varepsilon < d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \leqslant d(f(x_{\varphi(n)}), f(l)) + d(f(l), f(y_{\varphi(n)})) \to 0$$

D'où une contradiction. ■

3.3 Compacité et espaces vectoriels normés

Lemme 3.1.1
Soit $\mathbb{R}^N$ muni de la norme infinie et $K \subset \mathbb{R}^N$.

$$K \text{ compact} \quad \text{ssi} \quad K \text{ fermé borné}$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Déjà fait

$\Leftarrow$ K est borné donc $K \subset \prod\limits_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$.

Lemme 3.1.2
$[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons la propriété de Borel-Lebesgue pour $[a, b]$.
Si $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i\in I} \omega_i$, posons

$$A = \{x, \in [a, b], \exists J_x \in \mathcal{P}_f(I), [a, x] \subset \text{ d} \cup i \in J_x \omega_i\}$$

$A \neq \varnothing$ car $a \in A$.
Soit $x \in A$. $[a, x] \subset \bigcup\limits_{i\in J_x} \omega_i$ donc il existe i_0 tel que $x \in \omega_{i_0}$ qui est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \omega_{i_0}$.
Donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$ et A ouvert.
Soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a, b]$.
$[a, x_n] \subset \bigcup\limits_{i\in J_{xn}} \omega_i$ et il existe i_0 tel que $x \in \omega_{i_0}$ donc il existe $N > 0$ tel que $x_N \in \omega_{i_0}$.

$[a, x_N \subset \bigcup_{i \in J_{x_N}} \omega_i$ donc $[a,x] \subset \left(\bigcup_{i \in J_{x_N}} \omega_i \right) \cup \omega_{i_0}$.
Donc $x \in A$.
A est ouvert fermé de $[a,b]$ qui est connexe donc $A = [a,b]$ donc $b \in A$ donc $[a,b]$ compact. ■

Donc K est fermé dans un compact, donc compact. ■

Corollaire 3.2 *Si $x \in (\mathbb{R}^N)^{\mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Il existe $R > 0$ tel que pour tout n, $x_n \in \overline{B}(O,R)$ qui est fermée bornée donc compacte donc séquentiellement compacte, ce qui assure le résultat. ■

Théorème 3.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie N et notons $(e_1, \dots, e_N)$ une base de E.*

- *L'application :*

$$T : \begin{cases} (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty) & \to & (E, \|\cdot\|_E) \\ (x_1, \dots, x_N) & \mapsto & \sum_{i=1}^{N} x_i e_i \end{cases}$$

  est un homéomorphisme.
- *K est compact ssi K est fermé borné.*
- *Les normes sont équivalentes.*
- *Toute application linéaire est continue.*

Démonstration.
- T est clairement une bijection.

$$\|T(x)\|_E \leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i| \, \|e_i\|_E \leqslant \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{N} \|e_i\|_E$$

  Donc T est lipschitzienne donc continue.
  Il reste à montrer que T^{-1} est continue.
  $S = S_\infty(O,1)$ est compact et :

$$\overline{T} : \begin{cases} S & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|T(x)\|_E \end{cases}$$

  est continue sur icelui donc $\overline{T}$ est minorée par $\overline{T}(x_0)$.
  On a $0 < \overline{T}(x_0) \leqslant \overline{T}(x)$ pour tout $x \in S$.
  Donc pour tout $x \neq 0$, $\overline{T}(\frac{x}{\|x\|_\infty}) \geqslant \overline{T}(x_0)$ donc T^{-1} est aussi lipschitzienne.

- K compact ssi $T^{-1}(K)$ compact ssi $T^{-1}(K)$ fermé borné ssi K fermé borné.
- T^{-1} est un homéomorphisme donc toutes les normes sont équivalentes à la norme infinie.
- Les projections sont continues car on est en dimension finie, $+$ et $\cdot$ sont continues donc :

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \sum_{i=1}^{N} x_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{N} x_i f(e_i) \end{cases}$$

le reste.

■

Corollaire 3.3 *Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $\dim(F)$ finie. F est fermé.*

Démonstration. $B_F(O,1)$ est compacte donc fermé et F reste fermé par dilatation. ■

Corollaire 3.4 *Pour tout $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f-P\| = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-Q\|$.*

Démonstration.

$$T : \begin{cases} (\mathbb{R}_n[X], \|\cdot\|) & \rightarrow & (\mathbb{R}, \|\cdot\|) \\ Q & \mapsto & \|Q-f\| \end{cases}$$

est continue et $\lim_{\|Q\|\to+\infty} T(Q) = +\infty$ car $\|f-Q\| \geqslant \|Q\| - \|f\|$.

Il existe donc $R > 0$ tel que $\|Q\| \geqslant R \Rightarrow T(Q) \geqslant \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} T(Q) + 1$.

On a de plus $\inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} T(Q) = \inf_{Q\in\overline{B}(O,R)} T(Q)$ qui est donc atteint car $\overline{B}(O,R)$ est compacte. ■

Théorème 3.3 Riesz *Soit E un espace vectoriel normé.*
$\overline{B}_E(O,1)$ est compacte ssi $\dim(E)$ est finie.

Démonstration.

$\Rightarrow$ $B = \overline{B}_E(O,1)$ est compact donc précompact donc $B \subset \bigcup_{i=1}^{p} \overline{B}(x_i, \frac{1}{2})$.

Posons $F = \text{Vect}\{x_1, \ldots, x_p\}$.

$$B \subset F + \frac{1}{2}B \subset \frac{3}{2}F + \frac{1}{4}B \subset \ldots \subset F + \frac{1}{2^n}B$$

Donc $B \subset \overline{F} = F$ donc $E \subset F$. Donc $\dim(E) = p$.

$\Leftarrow$ B est fermé borné donc compact. ■

<u>THÉORÈME 3.4</u> *Soit E un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ linéaire compacte (ie pour tout borné B, $T(B) \subset K$ avec K compact).*

Si $\lambda \neq 0$, $\dim(\underbrace{\{x \in E, T(x) = \lambda x\}}_{=E_\lambda})$ est finie.

Démonstration. $B_{E_\lambda}(O,1) = B_E(O,1) \cap E_\lambda \subset \frac{1}{\lambda} T(B_E(O,1))$ qui est donc inclus dans un compact.

Donc $B_{E_\lambda}(O,1)$ est fermé dans un compact donc compact et $\dim(E_\lambda)$ est finie. ■

3.4 Espace quotient

3.4.1 Topologie quotient

<u>Définition 3.4</u> Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace de E. On définit E/F comme le quotient de E par la relation d'équivalence :

$$\forall x, y \in E^2, x \sim y \quad \text{ssi} \quad x - y \in F$$

Proposition 3.7 Si F est fermé, la topologie quotient sur E/F est une topologie d'espace vectoriel normé via la norme :

$$\|\overline{e}\|_{E/F} = \inf_{f \in F} \|e - f\|_E = \mathrm{d}(e, F)$$

qui est indépendante du représentant.

Proposition 3.8 $\tau_{\|\cdot\|}$ est la topologie quotient τ.

Démonstration. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\chi_1"] \arrow[d, "\chi_2"] & (E/F, \|\cdot\|) \\
(E/F, \tau) \arrow[ur, "\widetilde{\chi_1} = \mathrm{Id}"'] &
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que $\widetilde{\chi_1}$ est continue et ouverte.

Elle est continue car linéaire et lipschitzienne en 0 ($\|\chi_1(e)\| = \|\overline{e}\| \leqslant \|e\|$)

Soit O un ouvert de $(E/F, \tau_F)$. On a $O = \chi_2(\chi_2^{-1}(O))$ car χ_2 est surjective.

Donc $\widetilde{\chi_1}(O) = \widetilde{\chi_1}(\chi_2(\chi_2^{-1}(O))) = \chi_1(\chi_2^{-1}(O))$ qui est bien un ouvert car χ_1 est ouverte ($\chi_1(B(e,r)) = B(\chi_1(e), r)$). ■

Proposition 3.9 Soit E un espace vectoriel normé, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

φ est continue ssi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé.

Démonstration. Si φ est continue, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est donc fermé.

Si $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé, soit $\varphi = 0$ et c'est fini, soit φ est surjective.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi"] & \mathbb{R} \\ E/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

On a alors un isomorphisme $\widetilde{\varphi}$ entre $E/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathbb{R} = \mathrm{Im}(\varphi)$.

On a donc $\dim(E/\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ donc $\widetilde{\varphi}$ est linéaire dans un espace de dimension finie donc continue donc φ l'est aussi car χ l'est. ∎

3.4.2 Supplémentaires topologiques

Définition 3.5 Soit E un espace vectoriel normé, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

On dit que F et G sont des supplémetaires topologiques ssi les projections p_F et p_G sont continues.

Remarque 3.3 Comme $p_F + p_G = \mathrm{Id}$, p_F continue ssi p_G continue.

Proposition 3.10 Avec les mêmes notations, si $\dim(F)$ est finie et G fermé, F et G sont des supplémentaires topologiques.

Démonstration. On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p_F"] \arrow[d, "\chi"] & F \\ E/G \arrow[ur, "\widetilde{p_F}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widetilde{p_F}$ est injective car $G = \mathrm{Ker}(p_F)$ et surjective car p_F l'est.

Donc $\dim(E/G) = \dim(F)$ qui est finie donc $\widetilde{p_F}$ est continue et $p_F = \widetilde{p_F} \circ \chi$ le reste. ∎

Corollaire 3.5 *Tout sous-espace vectoriel fermé de codimension finie admet un supplémentaire topologique.*

Chapitre 4

Espaces complets

Le héros de l'histoire est un métrique (E, d).

4.1 Complétude, suites de Cauchy

4.1.1 Définition et propriétés

Définition 4.1 On dit qu'une suite u est de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant N, d(u_n, u_p) < \varepsilon$$

On écrit alors $\lim\limits_{p,q\to\infty} d(u_p, u_q) = 0$.

Proposition 4.1 Toute suite convergente est de Cauchy.

Remarque 4.1 $u_n = n$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ [1] *mais ne converge pas donc* $\mathbb{R}$ *n'est pas complet.* [2]

Proposition 4.2
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toutes suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente converge vers la limite de cette dernière.
- Les applications uniformément continues préservent la cauchytude.

Démonstration.
- En fixant $p = N$ dans la définition, on a $\forall q \geqslant N$, $d(u_q, u_N) < \varepsilon$ donc pour tout $q \geqslant N$, $u_q \in B(u_N, \varepsilon)$.
  Donc u est ultimement bornée donc bornée.

1. pour la distance $d : (x, y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$
2. Toujours pour cette distance !

- S'il existe φ, l tel que $u \circ \varphi$ converge vers l, il existe K tel que pour tout $n \geqslant K$, $d(u_{\varphi(n)}, l) < \varepsilon$.
  Il existe aussi $K' > K$ tel que pour tout $n \geqslant K'$, $\varphi(n) \geqslant N$.
  On a alors pour tout $p \geqslant N$, $d(u_p, l) \leqslant d(u_p, u_{\varphi(K')}) + d(u_{\varphi(K')}, l) < 2\varepsilon$.
  Donc u converge vers l.
- Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ uniformément continue et u de Cauchy dans (E, d).
  Soit $\eta > 0$, par uniforme continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d'(x, y) < \eta$.
  Or, pour $p, q \geqslant N$, $d(u_p, u_q) < \varepsilon$ donc $d'(f(u_p), f(u_q)) < \eta$.

■

Définition 4.2 On dit que d et d' sont équivalentes ssi $\mathrm{Id} : (E, d) \to (E, d')$ est continue ouverte.

4.1.2 Applications

Proposition 4.3 Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Démonstration. Soit E l'espace vectoriel normé, $n = \dim(E)$ finie.

On a vu que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E,

$$T : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \mapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

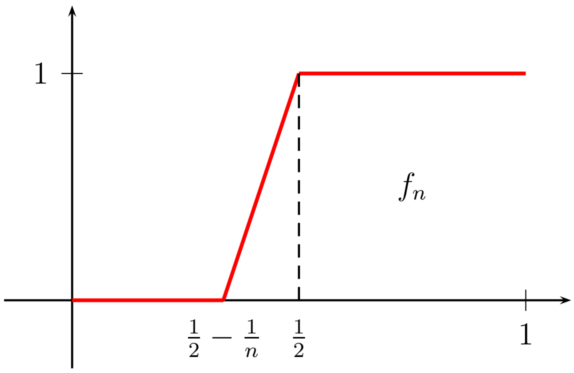
est une bijection linéaire continue donc uniformément continue.

Donc il suffit de montrer $\mathbb{R}^n$ complet. Il suffit de le montrer pour la norme infinie car les normes y sont équivalentes.

Si $(x^k)_k$ est de Cauchy, pour tout i, $(x_i^k)_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc converge vers x_i.

On a donc x^k qui converge vers $x = (x_1, \dots, x_n)$. ■

Remarque 4.2 $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$ *n'est pas complet :*



On a $\|f_p - f_q\|_1 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}} |f_p(t) - f_q(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}} f_p(t) + f_q(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} \to 0$.

Donc $(f_n)_n$ *de Cauchy mais ne converge pas. Si* $(f_n)_n$ *converge vers* f*, on a* $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n(t) - f(t)| \, \mathrm{d}t \to 0$ *donc* $\int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f(t) \, \mathrm{d}t = 0$ *et* $f = 1$ *presque partout sur* $]\frac{1}{2}, 1]$.

On a de même $f = 0$ *presque partout sur* $[0, \frac{1}{2}[$ *donc* f *a une forte tendance à ne pas être continue.*

Proposition 4.4 Soit X un ensemble non vide et (E, d) un espace métrique.

On note $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées et on définit la distance (habituelle) par $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Si (E, d) est complet, $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$ l'est aussi.

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$.

Par définition de d_∞, on a pour tout $x \in X$ et $p, q \geqslant N$, $d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$ donc $(f_p(x))_p$ est de Cauchy dans E donc y converge vers $f(x)$.

Avec $q \to +\infty$ dans la définition de la cauchytude, on a pour tout x, $d(f_p(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$ donc $d_\infty(f_p, f) \leqslant \varepsilon$ donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f. ∎

Proposition 4.5 Soit (E, d) un complet, $F \subset E$.

$(F, d|_F)$ est complet ssi F est fermé dans E.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Soit $(f_n)_n$ une suite de F qui converge vers $f \in E$. $(f_n)_n$ est de Cauchy dans E donc dans F donc y converge donc $f \in F$ et F fermé.
- $\Leftarrow$ Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans F.

  Elle est de Cauchy dans E donc y converge vers $f \in E$ donc, comme F fermé, $f \in F$ et $(f_n)_n$ converge dans F. ∎

Proposition 4.6

- $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
- $(C_b(]0,1[), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
- $(C_0(]0,1[) = \{u \in C(]0,1[), \lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 1} u(x) = 0\}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
- Pour tout ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $C(\overline{\Omega})$, $C_b(\Omega)$,

  $$C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

  , $l^\infty = \{\text{suites bornées}\}$, $c_0 = \{(u_n)_n \in l^\infty, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$ et $c = \{\text{suites convergentes}\}$ sont complets munis de $\|\cdot\|_\infty$.
- $\mathcal{L}_c(E,F)$ est complet pour la norme induite si F l'est.
- En particulier, $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ est toujours complet.

Démonstration.

- Montrons le premier point. Les quatre premiers points se font de la même façon.
  On sait que $C([0,1]) \subset \mathcal{F}_b([0,1])$ donc si on montre $C([0,1])$ fermé dans $\mathcal{F}_b([0,1])$, on a le résultat.
  Or les limites uniformes de suites de fonctions continues restent continues d'où le résultat.
- On peut appliquer le résultat précédent car la norme induite est bien la norme uniforme : $|||f||| = \|f\|_{L^\infty(\overline{B}_1^E, F)}$. ■

4.2 Quelques théorèmes importants

4.2.1 Théorème du point fixe

<u>Théorème 4.1</u> (Point fixe contractant) *Soit (E,d) un complet.*

Toute application $T : E \to E$ strictement contractante (il existe $k \in [0,1[$, tel que pour tout $x,y \in E$, $d(T(x),T(y)) \leqslant kd(x,y)$) admet un unique point fixe.

Démonstration.

$\exists$ (méthode d'itération de Picard)

Considérons la suite de E définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= T(u_n) \\ u_0 &\in E \text{ choisi} \end{cases}$$

Montrons que cette suite converge.

Pour tout n, p, q avec $p \leqslant q$, on a :

$$d(u_{n+1}, u_n) \leqslant d(T(u_n), T(u_{n-1})) \leqslant kd(u_n, u_{n-1}) \leqslant k^n d(u_1, u_0)$$

$$d(u_p, u_q) \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} d(u_{n+1}, u_n) \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} k^n d(u_1, u_0)$$

Donc, u est de Cauchy donc convergente. Notons l sa limite.
On a alors, comme T est contractante donc continue, $l = T(l)$.
! Si u et u' sont deux points fixes, $d(u, u') = d(T(u), T(u')) \leqslant kd(u, u')$.
Comme $k < 1$, $u = u'$. ■

Remarque 4.3

- *C'est faux si E n'est pas complet : si $E =]0, 1]$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ n'a pas de point fixe.*
- *On a besoin d'une constante de Lipschitz uniforme : avec l'hypothèse $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$, ça ne marche pas.*
  Par exemple si $E = \mathbb{R}$ et $T = x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, on a $|T'(x)| < 1$ pour tout x donc, par le théorème des accroissements finis, $|T(x) - T(y)| < |x - y|$. Cependant, $x = \sqrt{1 + x^2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- *Ce théorème est l'outil essentiel pour la démonstration du théorème de* Cauchy-Lipschitz *et du théorème des fonctions implicites.*

4.2.2 Prolongement des applications continues

Théorème 4.2 (prolongement) *Soient (E, d) et (E', d') deux métriques complets, $D \subset E$ dense.*

Si $T : D \to E'$ est uniformément continue, il existe un unique prolongement $\widetilde{T}$ uniformément continue de T à E.

Remarque 4.4 Si T est aussi linéaire et E, E' des espaces vectoriels normés, alors $\widetilde{T}$ reste linéaire. Si de plus T est une isométrie, $\widetilde{T}$ aussi.

Démonstration. Soit $x \in E$.

Il existe $(x_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Cette suite est donc de Cauchy.

Puisque T est uniformément continue, $(T(x_n))_n$ est de Cauchy donc elle converge.

- La limite ne dépend que de x. En effet, si $(x'_n)_n$ converge vers x, $d'(T(x_n), T(x'_n))$ tend vers 0 car $d(x_n, x'_n)$ tend vers 0 et T est uniformément continue.
  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(x'_n)$. On note $\widetilde{T}(x)$ cette limite.
- On a de plus clairement $\widetilde{T}|_D = T$.

- Montrons que $\widetilde{T}$ est unformément continue.
  Soient $x, y \in E$ avec $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$.
  $d'(\widetilde{T}(x), \widetilde{T}(y)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d'(T(x_n), T(y_n))$.
  Or pour tout $\varepsilon > 0$, et n assez grand,

$$d'(T(x_n), T(y_n)) \leqslant \omega_T(d(x_n, y_n)) \leqslant \omega_T(d(x, y) + \varepsilon)$$

  avec $\omega_T(r) = \sup\{d'(T(x), T(y)), d(x, y) \leqslant r\}$ le module de continuité uniforme de T.
  Donc $d'(\widetilde{T}(x), \widetilde{T}(y)) \leqslant \omega_T(d(x, y))$ donc $\widetilde{T}$ est uniformément continue et a le même module de continuité uniforme que T. ■

Application : Construction de l'intégrale de Riemann.

On pose D l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $E' = \mathbb{R}$ et :

$$T : \begin{cases} D & \to & E' \\ f & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_{i+1} - x_i) \end{cases}$$

On a $|T(f)| \leqslant (b - a) \|f\|_\infty$ donc, comme T est linéaire elle est uniformément continue et on peut la prolonger à $E = \overline{D} = C([a, b], \mathbb{R})$.

On peut aussi étendre l'intégrale aux limites uniformes de fonctions en escalier (fonctions réglées). Ce sont les fonctions qui ont une limite à gauche et à droite en tous points.

Une deuxième : Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^n$.

Pour tout ξ, $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{i\langle \xi, x\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$. est bien définie si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

On montre que si $f \in L^1 \cap L^2$, $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} \leqslant c\,\|f\|_{L^2}$.

Par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2, $f \mapsto \widehat{f}$ se prolonge à L^2 entier mais le prolongement n'est pas donné par l'intégrale.

4.2.3 Complétion

<u>Définition 4.3</u> On dit que (E', d') est un complété de (E, d) ssi (E', d') est complet et existe une isométrie $I : E \to E'$ telle que $I(E)$ soit dense dans E'.

<u>Théorème 4.3</u> (Unicité du complété) *Soit (E, d) un métrique.*

S'il existe un complété E' de E, il est unique au sens où si (E'', d'') est un autre complété, E' et E'' sont isométriques. On dit que (E', d') et (E'', d'') sont des réalisations du complété de E.

Démonstration. On a $I : E \to E'$ et $I' : E \to E''$.

Considérons $I \circ I'^{-1} : I'(E) \to E'$. C'est une isométrie.

Par densité de $I'(E)$ dans E'', on peut la prolonger en une isométrie I'' de E'' dans E'. Montrons que celle-ci est surjective (on a déjà l'injectivité).

$I''(E'')$ est dense car elle contient $I'(E)$ qui est dense. De plus, $I''(E'')$ est fermée (car E'' est complet donc $I''(E'')$ aussi) dans E' donc $I''(E'') = E'$ et on a la surjectivité. ■

<u>THÉORÈME 4.4</u> *Soit (E, d) un métrique. Il admet un complété.*

Démonstration. Posons $E' = S(E)/\sim$ avec $S(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de E et $\sim$ la relation d'équivalence :

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad \text{ssi} \quad \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Posons χ la surjection canonique de $S(E) \to E'$ et d' la distance sur E' définie par $d'(\chi((x_n)_n), \chi((y_n)_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$. Montrons que la limite existe et que cette définition est indépendante du représentant.

- On a $|d(x, x') - d(y, y')| \leqslant d(x, y) + d(x', y')$ donc $|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \leqslant d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q) \to 0$.
  Donc $(d(x_n, y_n))_n$ est de Cauchy donc la limite existe.
- Si $(x'_n)_n \sim (x_n)_n$ et $(y'_n)_n \sim (y_n)_n$, $|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leqslant d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0$ donc la définition est indépendante du représentant.
- C'est de plus une distance : c'est clairement symétrique, ça vérifie l'inégalité triangulaire d'après celle de d et le troisième axiome à vérifier est vraie par définition de E'.
- (E, d) s'injecte isométriquement et densément dans (E', d'). Posons :

$$I : \begin{cases} E & \to & E' \\ x & \mapsto & \chi(x, x, x, \dots) \end{cases}$$

  C'est bien une isométrie : $d'(I(x), I(y)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, y) = d(x, y)$.
  $I(E)$ est de plus dense : soit $\chi((x_n)_n) \in E'$, on a $d'(\chi((x_n)_n), I(x_p)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_p) = d_p$.
  Et on a $\lim\limits_{p\to+\infty} d_p = 0$ car les suites sont de Cauchy.
- Il reste à montrer que (E', d') est complet, ce qui est laissé en exercice.

■

Autre démonstration. Posons :

$$I : \begin{cases} (E, d) & \to & (\mathcal{F}(E, \mathbb{R}), d_\infty) \\ a & \mapsto & d(\cdot, a) \end{cases}$$

I est une isométrie car $d_\infty(d(\cdot,a),d(\cdot,b)) = \sup\limits_{x\in E} |d(x,a)-d(x,b)| \leqslant d(a,b)$ et c'est une égalité car $x=a$ réalise le sup.

$\overline{I(E)}$ est un fermé dans un complet donc complet, c'est une réalisation du complété de E. ■

Remarque 4.5 Si E est un espace vectoriel normé, il admet un complété qui est lui-même un espace vectoriel normé (Banach)

4.2.4 Théorème de Baire

<u>Théorème 4.5</u> Baire *Soit (E,d) un complet.*

- *Toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.*
- *(Ce qui est équivalent) Toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Démonstration. On a le lemme :

Lemme 4.5.1
Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0.

$\bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n$ est un singleton.

Démonstration. Il y a au plus un point car le diamètre tend vers 0.

Soit $x_n \in F_n$. $(x_n)_n$ est de Cauchy car les diamètres tendent vers 0.

Donc $(x_n)_n$ converge vers x donc $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n$. ■

Remarque 4.6 On ne peut pas supprimer l'hypothèse $\delta(F_n)\to 0$ sinon l'intersection peut même être vide.

Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts dense.

Montrons que $\bigcap\limits_{n\geqslant 0}\Omega_n$ est encore dense, ie que si ω est un ouvert non vide, $\omega \cap \left(\bigcap\limits_{n\geqslant 0}\Omega_n\right) \neq \varnothing$.

$\omega\cap\Omega_1 \neq \varnothing$ car Ω_1 est dense. Comme cette intersection est ouverte, il existe $x_1, r_1>0$ tel que $\omega\cap\Omega_1 \supset B(x_1,r_1)\subset \overline{B}(x_1,\frac{r_1}{2})$.

$\omega\cap\Omega_1\cap\Omega_2 \supset \overline{B}(x_1,\frac{r_1}{2})\cap\Omega_2 \supset B(x_1,\frac{r_1}{2})\cap\Omega_2\supset B(x_2,r_2)\subset\overline{B}(x_2,\frac{r_2}{2})$.

Par récurrence et par densité, on construit des boules emboîtées dont l'intersection est (par le lemme précédent) un singleton.

Icelui est inclus dans $\omega\cap\left(\bigcap\limits_{n\geqslant 0}F_n\right)$ qui en devient non vide. ■

Corollaire 4.1 *Aucun espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base dénombrable.*

Démonstration. Supposons que $(e_n)_n$ soit une base dénombrable. L'espace $E_n = \text{Vect}\{(e_i)_{i \leqslant n}\}$ est un fermé (clair) et d'intérieur vide car sinon on a une contradiction avec le théorème de Baire. ■

Corollaire 4.2 *Il n'existe pas de norme sur* $\mathbb{R}[X]$ *qui le rende complet.*

4.2.5 Théorème de Stone-Weierstrass

Cas réel

Soit X un compact et $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Le théorème de Stone-Weierstaß donne des conditions suffisantes sur H pour qu'il soit dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Définition 4.4 Soit H une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{R})$.

H est dite séparante ssi pour tout $x \neq x' \in X$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) \neq u(x')$.

Théorème 4.6 *Soit* $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$.

Si H *est une sous-algèbre séparante qui contient les constantes, alors* H *est dense.*

Corollaire 4.3 *Pour* $X = [0, 1]$*, les fonctions polynômiales forment un sous-espace dense dans* $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Remarque 4.7

- *Ça marche aussi pour les fonctions polynômiales en* n *variables.*
- *On en déduit que les fonctions* C^∞ *sont denses dans* $C^0(X, \mathbb{R})$.
- *L'ensemble des fonctions combinaisons linéaires de fonction de la forme* $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ *avec* f, g *continues.*

Définition 4.5 Un espace vectoriel est dit réticulé ssi pour tout $u, v \in H$, $\sup(u, v) \in H$ et $\inf(u, v) \in H$.

Théorème 4.7 *Soit* $H \in \mathscr{G}(C^0(X, \mathbb{R}))$ [3] *réticulé, séparant et contenant les constantes.* H *est dense.*

Remarque 4.8 Ça montre que les fonctions lipschitziennes sont denses. En effet, la seule difficulté consiste à montrer que leur ensemble est réticulé.

On peut remarquer que $\sup(u, v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}$*. Comme on a affaire à un espace vectoriel, il suffit de montrer que* $|u|$ *est lipschitzienne, ce qui est vrai car* $||u|(x) - |u|(y)| \leqslant |u(x) - u(y)| \leqslant k_u|x - y|$.

3. La graßmannienne

<u>THÉORÈME 4.8</u> *Le théorème 4.6 est une conséquence du théorème 4.7.*

Démonstration. Soit H une sous-algèbre séparante contenant les constantes.

On va montrer que $\overline{H}$ vérifie les hypothèses de théorème 4.7.

$\overline{H}$ est une sous-algèbre séparante qui contient les constantes, il reste donc à montrer qu'elle est réticulée. Comme on a vu précédemment, il suffit de montrer que pour tout $u \in \overline{H}$, $|u| \in \overline{H}$.

<u>THÉORÈME 4.9</u> DINI *Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers f continue, alors on a une convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $F_n = \{x \in X, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Les F_n forment une suite de fermés décroissants d'intersection vide car f_n converge simplement.

Comme X est compact, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $F_n = \varnothing$. D'où la convergence uniforme. ■

Lemme 4.9.1
La suite de polynômes définie par :

$$P_0 = 0 \text{ et } P_{n+1} = P_n + \frac{X^2 - P_n^2}{2}$$

converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Démonstration. On montre par récurrence que ce sont des polynômes et que $0 \leqslant P_n(r) \leqslant |r|$.

On a de plus une convergence simple. Par DINI, on a le résultat. ■

Soit $(P_n)_n$ la suite de polynômes du lemme et $u \in \overline{H}$.

En considérant $\frac{u}{\|u\|_\infty}$, on peut supposer $\|u\|_\infty \leqslant 1$, on a $\|P_n(u) - u\|_\infty = \sup_{x\in X} |P_n(u(x)) - |u(x)|| \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x) - |x|| \to 0$.

Donc $|u| \in \overline{H}$.

Donc $\overline{H}$ vérifie les hypothèse du théorème 4.7 donc $\overline{H}$ est dense donc H l'est. ■

<u>Définition 4.6</u> On dit que H est fortement séparant ssi pour tout $x \neq x' \in X$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(x') = \alpha'$.

Lemme 4.9.2
Si $\text{Card}(X) > 1$ et si $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ réticulé et fortement séparant, alors H est dense.

Démonstration de : Lemme ⇒ Théorème 4.7. Soit H qui vérifie les hypothèses du théorème 4.7. Montrons qu'il est fortement séparant.

Soit $x \neq x' \in X$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$.

Il existe $u \in H$ tel que $u(x) \neq u(x')$.

On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda u(x) + \mu = \alpha$ et $\lambda u(x') + \mu = \alpha'$.

Or ce système a une solution en λ, μ car son déterminant est $u(x') - u(x)$.

Donc H est fortement séparant. Donc H est dense. ∎

Démonstration du lemme. Soit $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ et x fixé.

Pour tout $x' \in H$, il existe $u_{x'} \in H$ tel que $u_{x'}(x) = f(x)$ et $u_{x'}(x') = f(x')$.

On pose $O_{x'} = \{y \in X, u_{x'}(y) > f(y) - \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient x et x'.

On a $X = \bigcup_{x' \neq x} O_{x'}$ mais X est compact donc $X = \bigcup_{i=1}^{p} O_{x'_i}$.

Posons $v_x = \sup\{u_{x'_1}, \dots, u_{x'_p}\} \in H$ car H est réticulé.

On a $v_x(x) = f(x)$ et $v_x(x') > f(x') - \varepsilon$ pour tout $x' \in X$.

On pose $O^x = \{x' \in X, v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient x et on a $X = \bigcup_{x \in X} O^x$ donc par compacité, $X = \bigcup_{j=1}^{q} O^{x_j}$.

Posons $v = \inf\{v_{x_1}, \dots, v_{x_q}\}$. On a alors $\|u - f\|_\infty < \varepsilon$ avec $u \in H$. Donc H est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$. ∎

Cas complexe

<u>THÉORÈME 4.10</u> *Soit $H \subset C^0(X, \mathbb{C})$.*

Si H est une sous-algèbre séparante stable par conjuguaison et qui contient les constantes, alors H est dense.

COROLLAIRE 4.4 (STONE-WEIERSTRASS TRIGONOMÉTRIQUE) *Les polynômes trigonométriques (en $\mathrm{e}^{i\theta}$) sont denses dans les fonctions continues périodiques.*

4.3 Critères de complétude

4.3.1 Convergence absolue

<u>Définition 4.7</u> On dit qur la série de terme général $(u_n)_n$ est absolument convergente ssi $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ existe.

Proposition 4.7 Soit E un espace vectoriel normé.

E est complet ssi toute série absolument convergente converge.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $(u_n)_n$ absolument convergente. On va montrer qu'elle est convergente via la cauchytude des sommes partielles : si $p < q$,

$$\left\|\sum_{n=0}^{q} u_n - \sum_{n=0}^{p} u_n\right\| = \left\|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} \|u_n\| \to 0$$

$\Leftarrow$ Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.

On peut en extraire une sous-suite qui converge rapidement

$$\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

(C'est possible car u est de Cauchy : il suffit de mettre $\frac{1}{2^n}$ dans la définition de la cauchytude de u.)

Donc la série de terme général $(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)})_n$ est absolument convergente. Donc les sommes partielles convergent. Or icelles valent $u_{\varphi(N)} - u_{\varphi(0)}$ donc u admet une valeur d'adhérence donc elle y converge.

Donc E est complet. ∎

Applications :

- L^1 est complet
- Définition de exp, sin, cos, $(I_n + \cdot)^{-1}$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{e}^M = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ qui converge absolument (si on prend une norme d'algèbre, mais ce choix nous chaut peu puisqu'on est en dimension finie et que les normes sont donc équivalentes).

Proposition 4.8 Soient E et F des espaces de Banach.

L'ensemble des application linéaires inversibles à réciproque continue est un ouvert de $L_c(E, F)$.

4.3.2 Produits d'espaces complets

<u>THÉORÈME 4.11</u> *Un produit dénombrable d'espaces métriques est complet pour la distance :*

$$d(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_n(X_n, Y_n)\}}{2^n}$$

Démonstration. On sait que la topologie associée est la topologie produit.

Soit $(X^p)_p$ de Cauchy.

On a $d(X^p, X^q) \to 0$ pour $p, q \to +\infty$ donc $d_n(X_n^p, X_n^p) \to 0$ donc X_n^p est de Cauchy donc converge vers X_n.

On a donc la convergence de $(X^p)_p$ vers $X = (X_n)_n$ pour la topologie produit, donc pour la distance ci-dessus. ∎

Remarque 4.9 Le résultat subsiste pour des distances pour lesquelles les projections sont uniformément continues.

Chapitre 5

Exercices

1. Un compact métrique est complet.
2. Soit (E, d) un complet et $K \subset E$.
   On dit que K est relativement compact ssi $\overline{K}$ est compact (ie pour toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $\overline{K}$)
   Montrer que K est relativement compact ssi K est précompact.