

### AL3

## L3, semestre 1 (2023-2024) - Groupe magistère Université Rennes - ENS Rennes

### TD 1 : Espaces vectoriels et applications linéaires

#### Exercice 1

Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset E$  une famille libre, et soit  $Y \subset E$  une famille génératrice. On suppose  $Y$  de cardinal fini  $n$ , et on note  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ .

1. Montrer que, quitte à permuter les  $y_i$ , la famille  $\{x_1, y_2, \dots, y_n\}$  engendre  $E$ .
2. Supposons que  $m > n$ . Montrer que, pour tout  $1 \leq k \leq n$ , et toujours quitte à permuter les  $y_i$ , la famille  $\{x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n\}$  engendre  $E$ .
3. En déduire que  $m \leq n$ , puis que toutes les bases de  $E$  ont même cardinal.

#### Exercice 2

Soient  $E_1, \dots, E_r$  des  $K$ -espaces vectoriels. Soit  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r$ .

1. Pour  $1 \leq i \leq r$ , on note  $\tilde{E}_i = \{0\} \times \dots \times E_i \times \dots \times \{0\}$ . Justifier que  $\tilde{E}_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et exhiber un isomorphisme de  $E_i$  vers  $\tilde{E}_i$ .
2. Montrer que  $E = \bigoplus_{i=1}^r \tilde{E}_i$ .

#### Exercice 3

Soient  $E, E'$  des  $K$ -espaces vectoriels. Soient  $E'_1, E'_2$  des sous-espaces de  $E'$ .

1. Montrer que  $\mathcal{L}(E, E'_1)$  est un sous-espace de  $\mathcal{L}(E, E')$ .
2. On suppose que  $E' = E'_1 \oplus E'_2$ . Montrer que  $\mathcal{L}(E, E') = \mathcal{L}(E, E'_1) \oplus \mathcal{L}(E, E'_2)$ .

On se donne maintenant  $E_1, E_2$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

3. Montrer que l'application « restriction à  $E_1$  » :  $\mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E')$  est linéaire et surjective.
4. On suppose que  $E = E_1 \oplus E_2$ . Montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, E') &\rightarrow \mathcal{L}(E_1, E') \times \mathcal{L}(E_2, E') \\ f &\mapsto (f|_{E_1}, f|_{E_2}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

5. Ces résultats se généralisent-ils aux sommes plus que 2 sous-espaces ?

#### Exercice 4

Soient  $E, E'$  des  $K$ -espaces vectoriels, et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. On note  $\pi$  la projection canonique de  $E$  vers  $E/F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, E')$ . On suppose que  $F \subset \ker u$ .

1. Soient  $x, y \in E$ . On suppose que  $\pi(x) = \pi(y)$ , montrer que  $u(x) = u(y)$ .
2. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $\tilde{u} : E/F \rightarrow E'$  telle que  $u = \tilde{u} \circ \pi$ .

#### Exercice 5

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $F \subset E$  stable par  $u$ . On note  $\pi$  la projection canonique de  $E$  vers  $E/F$ .

1. Montrer que  $F \subset \ker(\pi \circ u)$ .

2. En déduire qu'il existe un endomorphisme  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E/F)$  tel que  $\pi \circ u = \tilde{u} \circ \pi$ .
3. On suppose  $E$  de dimension finie. Que peut-on dire du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de  $\tilde{u}$  ?

### Exercice 6

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $\pi : E \rightarrow E/F$  la projection canonique. Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On considère la restriction  $\pi_G$  de  $\pi$  à  $G$  :  $\pi_G : G \rightarrow E/F$ .

1. Démontrer que  $\pi_G$  est surjective si et seulement si  $E = F + G$ .
2. Démontrer que  $\pi_G$  est injective si et seulement si  $F$  et  $G$  sont en somme directe.
3. En déduire que  $\dim E/F + \dim F = \dim E$ .
4. En déduire le théorème du rang.

### Exercice 7

Soit  $E$  de dimension finie, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. On fixe une base de  $E$ . Décrire la matrice de  ${}^t u$  dans sa base duale.
2. Montrer que  ${}^t({}^t u)$  s'identifie à  $u$  par l'isomorphisme canonique de  $E$  avec son bidual.

### Exercice 8

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Pour toute base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on note  $\varphi_{\mathcal{B}} : E \rightarrow E^*$  l'isomorphisme défini par  $e_i \mapsto e_i^*$ .

1. Soient  $\mathcal{B}_1 = (e_i)$ ,  $\mathcal{B}_2 = (f_i)$  deux bases de  $E$ . Soit  $u \in GL(E)$  défini par  $u(e_i) = f_i$ . Montrer que  ${}^t u \varphi_{\mathcal{B}_2} u = \varphi_{\mathcal{B}_1}$ .
2. Soit  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ . Déduire de ce qui précède que  $\varphi_{\mathcal{B}_1} = \varphi_{\mathcal{B}_2}$  si et seulement si  ${}^t M M = I_n$ .
3. En déduire qu'il n'existe pas d'isomorphisme  $E \rightarrow E^*$  qui envoie toute base sur sa base duale.

### Exercice 9

Soit  $E$  de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $A \subset E$  un sous-ensemble de  $E$ , on définit  $A^0 \subset E^*$  comme l'ensemble des  $\varphi \in E^*$  telles que pour tout  $x \in A$ ,  $\varphi(x) = 0$ .

1. Décrire  $E^0$  et  $\{0\}^0$ .
2. Montrer que  $A^0$  est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ .
3. Montrer que si  $B \subset A$ , alors  $A^0 \subset B^0$ .
4. Montrer que si  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel, alors  $(F^0)^0$  s'identifie à  $F$  par l'isomorphisme canonique de  $E$  avec son bidual.
5. Montrer que si  $F, G \subset E$  sont des sous-espaces vectoriels, alors  $(F + G)^0 = F^0 \cap G^0$ .
6. En déduire que  $\dim F^0 + \dim F = \dim E$ .
7. Redémontrer ce résultat en considérant l'application « restriction à  $F$  » :  $E^* \rightarrow F^*$ .

### Exercice 10

1. Pour  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ . Justifier qu'il existe une unique forme linéaire  $\varphi_a : K[X] \rightarrow K$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_a(X^i) = a_i$ .
2. Montrer que  $a \mapsto \varphi_a$  définit un isomorphisme  $K^{\mathbb{N}} \rightarrow K[X]^*$ .
3. Pour  $\lambda \in K$ , on considère  $a_\lambda = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Justifier que la famille  $(a_\lambda)_{\lambda \in K}$  est libre.

4. On suppose  $K$  non dénombrable. Justifier que  $K[X]$  et  $K[X]^*$  ne sont pas isomorphes.
5. Traiter le cas où  $K$  est dénombrable (on pourra montrer que  $K[X]$  est dénombrable et que  $K[X]^*$  ne l'est pas).

**Exercice 11**

Soit  $E, E'$  des  $K$ -espaces vectoriels, et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Montrer que  $F \otimes E'$  s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de  $E \otimes E'$  et que :

$$(E \otimes E') / (F \otimes E') \simeq (E/F) \otimes E'.$$

**Exercice 12**

Soient  $E, F$  des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $F \otimes E^* \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  qui envoie  $y \otimes \varphi$  sur  $\varphi(\cdot)y$  pour tout  $(y, \varphi) \in F \times E^*$ .
2. En déduire que  $\mathcal{L}(E, F) \simeq F \otimes E^*$ .
3. On fixe une base de  $E$  et une base de  $F$ . Donner la base de  $\mathcal{L}(E, F)$  obtenue par l'isomorphisme précédent, et donner la décomposition de  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  sur cette base.
4. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire  $t$  sur  $E \otimes E^*$  telle que  $t(y \otimes \varphi) = \varphi(y)$  pour tout  $(y, \varphi) \in E \times E^*$ .

En composant les applications précédentes, on définit une forme linéaire, notée  $T$ , sur  $\mathcal{L}(E)$ .

5. On fixe une base de  $E$ . En utilisant cette base et sa base duale, donner une formule pour  $T(u)$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
6. Identifier la forme linéaire  $T$ .

**Exercice 13**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(E', F')$ . On fixe des bases de  $E, F, E', F'$  (supposés de dimension finie) ainsi que les matrices de  $u$  et  $v$  dans ces bases.

1. Décrire la matrice de  $u \otimes v$  dans les bases associées de  $E \otimes E'$  et  $F \otimes F'$ .
2. On suppose désormais que  $E = F$  et  $E' = F'$ . Déduire du calcul précédent que  $\text{Tr}(u \otimes v) = \text{Tr}(u)\text{Tr}(v)$ .
3. Calculer  $\det(u \otimes v)$ .

*Indication : on pourra commencer par montrer que  $u \otimes v = (\text{id}_F \otimes v) \circ (u \otimes \text{id}_{E'})$ .*

**Exercice 14**

On note  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $(f_1, f_2)$  les bases canoniques respectives de  $\mathbf{R}^3$  et de  $\mathbf{R}^2$ . Soit  $u: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'application linéaire dont la matrice dans ces bases est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de  $\wedge^2(u): \wedge^2(\mathbf{R}^3) \rightarrow \wedge^2(\mathbf{R}^2)$  dans les bases  $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$  et  $(f_1 \wedge f_2)$ .

**Exercice 15**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On identifie  $\bigwedge^n E$  à  $K$ .

1. En considérant l'application

$$\begin{array}{ccc} E^{n-1} & \rightarrow & E^* \\ (x_2, \dots, x_n) & \mapsto & (x \mapsto x \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \end{array},$$

montrer qu'on a un isomorphisme naturel  $\bigwedge^{n-1} E \simeq E^*$ .

2. En déduire qu'on a un isomorphisme naturel  $E \simeq (\bigwedge^{n-1} E)^*$ .

3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il existe un unique  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,

$$x_1 \wedge u(x_2) \wedge \dots \wedge u(x_n) = v(x_1) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n.$$

4. Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  comme dans la question précédente. Montrer que  $v \circ u = \det(u)id$ .  
 5. On fixe une base de  $E$ , donner les coefficients de la matrice de  $v$  dans cette base en fonction de ceux de la matrice de  $u$ .

**Exercice 16**

Donner une formule pour l'inverse de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$  lorsque son déterminant est non nul.

**Exercice 17**

Déterminer une base de l'image et du noyau des matrices réelles suivantes :

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 12 \end{pmatrix}$

**Exercice 18**

On considère les sous espaces  $F$  et  $G$  de  $\mathbb{R}^4$ ,  $F$  étant engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et  $G$  engendré par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les dimensions de  $F$  et  $G$ .

2. Montrer que  $F \subset G$ .
3. Donner une base d'un supplémentaire de  $F$  dans  $G$ .