**ALBI**
**L3, semestre 1 (2023-2024) - Groupe magistère**
**Université Rennes - ENS Rennes**

*TD 3 : Espaces quadratiques*

## Exercice 1

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$. On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$.

**1.** Soit $q$ une forme quadratique sur $E$ et $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $q$ dans la base précédente. Montrer que

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j.$$

**2.** Réciproquement, on se donne une application $Q : K^n \to K$ définie par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Montrer que l'application $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto Q(x_1, \dots x_n)$ définit une forme quadratique sur $E$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice $A$ ayant pour coefficients les $a_{i,j}$ au dessus (au sens large) de la diagonale, et complétée ensuite sous la diagonale de manière à en faire une matrice symétrique.

## Exercice 2

On considère l'application définie sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]_{<3}$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 par la formule :

$$q(P) = \int_0^1 P'(t) P(1-t) dt + P(0) P(1).$$

**1.** Montrer que $q$ est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire.
**2.** Déterminer la matrice de $q$ dans la base $(1, X, X^2)$ de $E$.
**3.** Calculer le discriminant de $q$. Est-elle dégénérée ?
**4.** La forme $q$ possède-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?

## Exercice 3

On dit qu'une forme quadratique $q$ sur $E$ *représente* l'élément $\alpha \in K^\times$ s'il existe $x \in E$ tel que $q(x) = \alpha$.

**1.** Montrer que deux formes quadratiques isométriques représentent exactement le même ensemble de scalaires.

**2.** Montrer que si $q$ représente $\alpha \in K^\times$, alors il existe $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tels que $q$ soit isométrique à :

$$\alpha x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2.$$

**Exercice 4**

Soit $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une famille de représentants de $K^\times/(K^\times)^2$. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée est équivalente à une forme quadratique de la forme :

$$\varepsilon_{i_1}x_1^2 + \varepsilon_{i_2}x_2^2 + \cdots + \varepsilon_{i_n}x_n^2.$$

**Exercice 5**

Soit $(E,q)$ un espace quadratique et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

**1.** Montrer que $F \cap F^\perp = N(q_{|F})$.

**2.** En déduire que si $q$ est non dégénérée et si $F \subset E$ est un sous-espace totalement isotrope de $E$ (*i.e.* contenu dans son cône isotrope), alors $2\dim F \leq \dim E$.

**3.** Donner un exemple où il y a égalité dans l'inégalité précédente.

**4.** Dans le cas de la forme quadratique $q\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, dessinez le cône isotrope et les sous-espaces totalement isotropes de dimension maximale.

**Exercice 6**

On dit qu'un espace quadratique $(E,q)$ de forme polaire $f$ est un *plan hyperbolique* s'il admet une base $\{e_1, e_2\}$ formée de vecteurs isotropes, tels que $f(e_1,e_2) \neq 0$.

**1.** Soit $(E,q)$ un plan hyperbolique. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $q$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La forme $q$ est-elle dégénérée ?

**2.** Soit $(E,q)$ un espace quadratique non dégénéré possédant un vecteur isotrope non nul $x$. Montrer que $E$ contient un sous-espace $F$ contenant $x$ qui est un plan hyperbolique.

**3.** Démontrer par récurrence que $E$ est somme directe orthogonale de (sous-espaces isométriques à des) plans hyperboliques et d'un sous-espace ne contenant pas de vecteurs isotropes.

**Exercice 7**

**1.** Montrer que le groupe $\mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2$ est infini.

**2.** En déduire qu'il y a une infinité de classes de formes quadratiques sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel non nul.

**Exercice 8**

Montrer qu'une forme quadratique est de rang $r$ si et seulement si elle s'écrit comme combinaison linéaire de $r$ carrés de formes linéaires indépendantes.

**Exercice 9**

Ecrire les matrices des formes quadratiques réelles suivantes dans la base canonique. Déterminer leur rang et leur signature.

**1.** $q(x,y,z) = 4xy - 4yz - y^2 - z^2$.

**2.** $q(a,b,c) = b^2 - 4ac$

**3.** $q(x,y,z) = y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz - 2xz$.

**Exercice 10**

Soit $q$ une forme quadratique réelle non dégénérée de signature $(p, n-p)$.

**1.** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $q(x) = 1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

**2.** Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

**Exercice 11**

Soient $(E, q), (E', q')$ des espaces quadratiques réels de dimension finie, de formes polaires respectives $f, f'$.

**1.** Montrer que l'on peut définir une structure d'espace quadratique sur $E \otimes E'$ en posant $g(x \otimes x', y \otimes y') = f(x, y)f'(x', y')$.

**2.** Déterminer le rang et la signature de $E \otimes E'$ en fonction de ceux de $E$ et $E'$.

**Exercice 12**

Soit $K$ un corps fini de cardinal $q$ impair.

**1.** En considérant l'endomorphisme de groupe $x \mapsto x^2$ défini sur $K^\times$, démontrer que $(K^\times)/(K^\times)^2$ est d'ordre 2.

**2.** Combien y a-t-il de carrés dans $K$ ?

**3.** En déduire que pour $a, b, c \in K$ tous non nuls, l'équation $ax^2 + by^2 = c$ possède au moins une solution non nulle dans $K^2$.

**4.** En utilisant l'exercice 3, en déduire que toute forme quadratique non dégénérée sur $K^2$ est isométrique à $x^2 + \beta y^2$ pour un certain $\beta \in K^\times$.

**5.** Soit $\alpha \in K^\times$ non carré, et soit $(E, q)$ un espace quadratique de dimension $n$, non dégénéré sur $K$. Montrer que $q$ est isométrique à $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ ou à $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2$.

**6.** Dans les deux cas précédents, donner la valeur du discriminant de $q$. En déduire que deux formes quadratiques non dégénérées sur $E$ sont isométriques si et seulement si elles ont même discriminant.

**Exercice 13**

Soit $(E, q)$ un espace quadratique non dégénéré sur $\mathbb{Q}$.

**1.** On suppose que $q$ représente $\alpha$. Montrer que la famille $q^{-1}(\{\alpha\})$ engendre $E$.

**2.** Montrer que $q^{-1}(\{\alpha\})$ est vide ou infini.

**3.** Montrer que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est infini.